

KATIA PIRES DO NASCIMENTO

**SOCIODINÂMICA: UMA ABORDAGEM POR SIMULAÇÕES
COMPUTACIONAIS**

RECIFE-PE

NOVEMBRO/2014



Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Doutor.

Área de Concentração: Modelagem Estatística e Computacional

Orientador: Prof. Dr. Aduino José Ferreira de Souza

RECIFE-PE
NOVEMBRO/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

SOCIODINÂMICA: UMA ABORDAGEM POR SIMULAÇÕES
COMPUTACIONAIS

KATIA PIRES DO NASCIMENTO

Tese julgada adequada para obtenção do título doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 24/11/2014 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. ADAUTO JOSÉ FERREIRA DE
SOUZA
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física-UFRPE

Banca Examinadora:

Prof. Dr. FRANCISCO GEORGE BRADY
MOREIRA
Universidade Federal de Rio Grande do
Norte
externo-UFRN

Prof. Dr. PEDRO HUGO DE
FIGUEREDO
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física-UFRPE

Prof. Dr. TIAGO ALESSANDRO
ESPÍNOLA FERREIRA
Universidade Federal de Pernambuco
DEINFO-UFPE

Prof^a. Dra. VIVIANA MORAES DE
OLIVEIRA
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física-UFRPE

*Dedico,
aos meus pais, José Pires do Nascimento,
Lúcia Soares do Nascimento, a meu marido,
Vinicius Pereira do Sacramento, e a meu fi-
lho, José Vinicius Pires do Sacramento.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo na minha vida.

Agradeço ao meu orientador Aduino José Ferreira de Souza, por aceitar a orientação, sem se importar com a opinião de ninguém. Pela orientação firme, coerente, e honesta. Pelo seu trabalho intenso, dedicação, e por tudo que me ensinou.

A minha mãe, Lúcia Soares do Nascimento, por assumir meu filho para eu poder cursar as disciplinas do doutorado.

Ao meu marido e amigo de doutorado Vinicius Pereira do Sacramento, por todas as disciplinas que pagamos juntos, pela ajuda, pelo companheirismo, por tudo que passamos, e por todo amor.

Ao meu pai, José Pires do Nascimento, por ele ser um anjo na minha vida. Por todo amor, dedicação, trabalho, inteligência, firmeza, e por tudo que sou.

Aos meus irmãos, Amanda Pires do Nascimento e Luciano Pires do Nascimento, pela força, pelo apoio, conversas, e por serem meus amigos.

A todos do departamento de Matemática da UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI, por todo apoio; especialmente: Ana Josicleide, Josenice, e a Flaviana. Agradeço aos nobres colegas: Paulo César, Flávio, Alex, Mário, Rosa, Leidmar, José Tiago, Valéria, Tiago, Francisco Braga, Luciana, Zélalber, Jocel, Luiza, e Fátima.

A professora Tatijana Stosic, pela amizade, ajuda, apoio, e por tudo.

Aos meus amigos: Francisca e Cícero Carlos, pela acolhida, ajuda, apoio, conversas, por todo carinho comigo e minha família.

Ao Secretário Marco Antônio dos Santos, pela assistência.

Resumo

Estudamos dois modelos de dinâmica social através de simulações Monte Carlo de tempos curtos. O primeiro modelo corresponde a uma versão tridimensional de uma extensão da regra da maioria para variáveis contínuas e corresponde a um modelo xy de não equilíbrio. O segundo modelo estudado foi o modelo do votante majoritário de dois estados, também, em três dimensões. O comportamento crítico de ambos os modelos foi obtido a partir da relaxação de não equilíbrio de certas grandezas que satisfazem leis de escalas em tempos curtos. Em particular, introduzimos uma nova grandeza, Ψ , que nos permite localizar o ponto crítico com precisão, cuja estimativa envolve um processo de diferenciação numérica de curvas afetadas por flutuações estatísticas. Para este fim, aplicamos uma técnica de diferenciação numérica baseada na regularização de Tikhonov. Além de fornecer o valor crítico do parâmetro de controle que induz a transição de fases, Ψ pode ser empregada na assim chamada técnica de “colapso dos dados”, que consiste em apresentar os dados em um plano de variáveis convenientemente reescaladas. Neste plano, os dados obtidos em diversas condições distintas se distribuem sobre a mesma curva — a função de escala. Como os valores de alguns dos expoentes críticos e o valor crítico do parâmetro de controle são empregados no cálculo destas variáveis de escala, este se configura em um método poderoso para se estimar os parâmetros críticos. Apenas os valores corretos desses parâmetros leva ao colapso dos dados. Aqui, empregamos um método de otimização de uma estatística associada ao espalhamento dos dados em torno da função de escala para determinar os valores dos expoentes críticos e obter uma outra estimativa do valor crítico do parâmetro de controle. Para o modelo do voto da maioria contínuo obtivemos as seguintes estimativas: para o parâmetro de controle $q_c = 0,189708(3)$; $\beta = 0,349(6)$; $\nu = 0,670(14)$; $\gamma = 1,316(18)$; expoente crítico dinâmico $z = 2,762(7)$. Os valores para os expoentes críticos estáticos são muito próximos dos valores existentes na literatura para o modelo xy de equilíbrio em três dimensões. Porém, o expoente crítico dinâmico está muito acima de $3/2$, valor considerado exato para o modelo de equilíbrio. Os valores estimados para os expoentes críticos do modelo do votante majoritário discreto são: o ruído crítico $q_c = 0,177226(59)$; $\beta = 0,332(3)$; $\nu = 0,635(5)$; $\gamma = 1,2867(14)$; $z = 2,419(11)$. Os resultados estimados dos expoentes críticos estáticos concordam com os dos modelos pertencentes à classe de universalidade do modelo de Ising (de equilíbrio), em redes cúbicas.

Palavra-chave: modelo do voto da maioria contínuo, modelo do voto da maioria discreto, simulações Monte Carlo, Regularização Tikhonov, interpolação linear, colapso.

Abstract

We study two models of social dynamics through short-time Monte Carlo. The first model is a three-dimensional version of a generalization of the majority rule for continuous degrees of freedom and resembles a non-equilibrium xy model. The second one is a two-state majority vote model also in three dimensions. The critical behavior of both models was obtained from the relaxation towards equilibrium of certain quantities that present short-time scaling behavior. In particular, we introduce a new quantity, Ψ , that allows for a precise determination of the critical point location. A numerical differentiation of a noisy function is involved in calculating Ψ . Thus, we applied a numerical differentiation technique based in the Tikhonov's regularization. Besides the critical point location, Ψ provides a way of making a "scaling plot" analysis of the simulation data. Some critical exponents as well as the critical value of the control parameter are included in the definition of the scaling variables. Thus, the scaling plot is a powerful method of finding good estimates for the critical parameters, since the whole set of data collapses at a single curve only when the right values for these parameters are employed in the calculation of the scaled variables. Here, we employed a measure that quality the collapse. Through this procedure we obtained the following estimates for the critical parameters investigated in this thesis. The estimates for the critical exponents of the continuous majority vote values are: for the control parameter $q_c = 0,189708(3)$; $\beta = 0,349(6)$; $\nu = 0,670(14)$; $\gamma = 1,316(18)$; dynamic critical exponent $z = 2,762(7)$. The values for the static critical exponents are very close to existing literature values for the model xy equilibrium in three dimensions. However, the dynamic critical exponent is far above $3/2$, which is considered exact for the equilibrium model. The estimates for the critical exponents of the discrete model majority voting values are: critical noise $q_c = 0,177226(37)$; $\beta = 0,332(3)$; $\nu = 0,635(5)$; $\gamma = 1,2867(14)$; $z = 2,419(11)$. The estimated results of static critical exponents agree with those of models belonging the universality class of the Ising (equilibrium) model, in cubic networks.

Key words: continuous majority vote, discrete model majority voting, Monte Carlo simulation, Tikhonov's regularization, linear interpolation, collapse.

Lista de Figuras

1	Interação dos spins, no modelo tipo Sznajd-Weron. Os símbolos + e – indicam posições a favor e contra a uma determinada questão, respectivamente.	p. 5
2	Foto inicial do voto da maioria em uma rede regular bidimensional, com opções ± 1	p. 14
3	Foto correspondente ao dia 994 da dinâmica do voto da maioria em uma rede regular bidimensional, com opções ± 1	p. 14
4	Gráfico suavizado, via regularização Tikhonov, da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, para a rede cúbica de tamanho $L=128$	p. 21
5	$\Psi(\tau, \epsilon)$ em função de τ , para diversos valores de q , em uma rede cúbica $L = 128$	p. 24
6	$\Psi(\tau, \epsilon)$, em função de q , em uma rede cúbica $L = 128$. Estimativa do ruído crítico q_c e do expoente $\beta/\nu z$	p. 25
7	Estimativas das qualidades dos dados colapsados.	p. 28
8	Funcionamento do método de validação cruzada para 4 subconjuntos, utilizando o método “leave-one-out”	p. 37
9	Gráfico suavizado (utilizando regularização Tikhonov) da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, para diferentes valores do ruído, para $L = 128$	p. 40
10	Gráfico da magnetização M em função do tempo t , na escala duplo-logarítmica, para diversos valores de q , com a rede cúbica de tamanho $L = 64$	p. 41
11	Evolução temporal da magnetização, na escala duplo-logarítmica, para diversos valores de q , em uma rede cúbica de tamanho $L = 32$	p. 42

12	Gráfico da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, próximos de q_c , para ($L = 128$).	p. 42
13	Ajuste linear da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, próximos do ruído crítico q_c , para a rede de tamanho $L = 128$	p. 45
14	Ajuste linear dos dados a função estimada $\log(M) = -0,578 - 0,162 \log(t)$, para $q = 0,1895$, para rede cúbica $L=128$	p. 46
15	Análise residual vs valores ajustados linearmente, para $q = 0,1895$, para $L=128$	p. 47
16	Plot QQ normal, comparação entre os quantis teóricos vs quantis amostrais, para $q = 0,1895$, rede de tamanho $L=128$	p. 47
17	Parâmetro de locação e escala ajustados, para $q = 0,1895$, rede de tamanho $L=128$	p. 48
18	Distância de cook, investigação de pontos influentes, para $q = 0,1895$, rede de tamanho $L=128$	p. 49
19	Ajuste linear nos dados para a função estimada $\log(M) = -0,517 - 0,184 \ln(t)$, para $q = 0,1896$, na rede de tamanho $L=128$	p. 50
20	Ajuste QQ normal, comparação dos quantis teóricos com os quantis amostrais, para $q = 0,1896$, na rede de tamanho $L=128$	p. 50
21	Gráfico resíduo vs ajuste linear, para o resíduo $q = 0,1896$, na rede de tamanho ($L=128$).	p. 51
22	Distância de cook, investigação de pontos influentes, valor do ruído $q = 0,1896$, para rede ($L=128$).	p. 51
23	Ajuste linear nos dados para a função estimada $\log(M) = -0,3847 - 0,201 \log(t)$, para $q = 0,1898$, e a rede de tamanho ($L=128$).	p. 52
24	Ajuste qqnormal, comparação dos quantis teóricos e amostrais, para $q = 0,1898$ e ($L=128$).	p. 52
25	Gráfico resíduo vs ajuste, para o valor de ruído $q = 0,1898$ e ($L=128$).	p. 53
26	Gráfico distância de Cook, investigação de pontos influentes, para $q = 0,1898$ e ($L=128$).	p. 53

- 27 Gráfico dos dados suavizados (utilizando regularização Tikhonov) e interpolados linearmente da magnetização em função do tempo do MVMC, na escala duplo-logarítmica, para $q = 0,189708$, para $L = 128$ p. 54
- 28 Gráfico do χ_0 em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, na rede cúbica de tamanho ($L=128$). p. 55
- 29 Comprimento de correlação em função do tempo, para $L=128$ p. 56
- 30 Escala duplo-logarítmica do comprimento de correlação em função do tempo em $q = 0,18962$ e $q = 0,18980$, na rede cúbica $L=128$ p. 57
- 31 Evolução temporal do comprimento de correlação para o valor do ruído crítico $q_c = 0,189708$ do MVMC, na escala duplo-logarítmica, em uma rede cúbica $L=128$ p. 58
- 32 Gráfico das estimativas dos resíduos $\hat{\epsilon}$ de $x\tilde{\Psi}(x)$ do (MVMC), para diferentes valores do expoente $1/\nu z$, em uma rede cúbica $L = 128$ p. 59
- 33 Gráfico das estimativas dos resíduos $\hat{\epsilon}$ de $x\tilde{\Psi}(x)$ do (MVMC), para diferentes valores do ruído q , na rede cúbica $L = 128$ p. 60
- 34 Gráfico do colapso dos dados da grandeza $x\tilde{\Psi}(x)$, para diferentes valores de x , do MVMC na rede cúbica $L = 128$ p. 61
- 35 Resultados teóricos e experimentais do expoente β , do MVMC. Na Figura, as siglas indicam: MC= Monte Carlo, TC= tempos curtos, temp=temperatura, Experim=experimental. As linhas tracejadas são para destacar que o valor estimado do expoente crítico estático *beta* do nosso trabalho, utilizando a técnica MC e TC, coincide com os valores obtidos por outros trabalhos. p. 63
- 36 Resultados teóricos e experimentais do expoente ν , do MVMC. Na Figura, as siglas indicam: MC= Monte Carlo, TC= tempos curtos, temp=temperatura, experim=experimental. p. 64
- 37 Magnetização em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, para diferentes valores do ruído, para $L = 1024$ p. 66
- 38 Magnetização em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, para valores de ruídos extremos e próximos a região crítica, para $L = 1024$. p. 67

- 39 Gráfico dos dados obtidos por interpolação linear da magnetização em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, para $q = 0,177238$, para a rede cúbica $L = 1024$. Os dados foram suavizados utilizando Regularização Tikhonov e a reta é um ajuste linear dos dados interpolados. p. 68
- 40 Gráfico da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo do MVMD, para diferentes valores do ruído, para $L = 1024$ p. 69
- 41 Gráfico da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo do MVMD, para os valores extremos do ruído e para os valores próximos a região crítica, para $L = 1024$ p. 70
- 42 Gráfico das estimações dos resíduos $\hat{\epsilon}$ em função dos ruídos q , para diferentes valores $1/\nu z$, do MVMD para a rede cúbica $L = 1024$ p. 71
- 43 Gráfico das estimações dos resíduos $\hat{\epsilon}$ em função dos ruídos q , para diferentes valores $1/\nu z$, do MVMD para a rede cúbica $L = 1024$ p. 72
- 44 Gráfico do colapso de $\tilde{\Psi}(x)$ em função de x , para diferentes instantes de tempos do MVMD, para a rede cúbica $L = 1024$ p. 73
- 45 Gráfico do comprimento de correlação em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, obtido por interpolação linear para o valor de $q = 0,177238$, para a rede cúbica $L = 1024$ p. 74
- 46 Gráfico dos valores estimados do expoente β e a barra de incerteza, obtidos por diferentes autores. A ilustração em vermelho indica o valor estimado do expoente crítico estático *beta*, do modelo Ising em três dimensões, no equilíbrio, com sua barra de incerteza. As outras figuras (laranja, verde e azul) indicam os valores estimados do expoente β para o modelo do votante majoritário discreto, em três dimensões. p. 76
- 47 Gráfico dos valores estimados do expoente ν e a barra de incerteza, obtidos por diferentes autores. p. 77

Lista de Tabelas

- 1 Resultado do ajuste linear para o valor de ruído $q = 0,1895$. As abreviações Est.=Estimado, σ =Erro padrão, e os valores destacados em amarelo indicam a significância do ajuste. p. 44
- 2 Resultado do ajuste linear em $q = 0,1896$. As abreviações são as mesmas da Tabela 1 os valores destacados em amarelo indicam a significância do ajuste. p. 44
- 3 Resultado do ajuste linear em $q = 0,1898$. Significado das abreviações ver a Tabela 1, os valores destacados em amarelo indicam a significância do ajuste. p. 44
- 4 Comparação dos resultados dos expoentes críticos do MVMC com os valores obtidos por outros autores. As numerações entre parenteses são os erros estimados. p. 61
- 5 Valores dos expoentes do modelo do votante majoritário discreto em três dimensões, para $L = 1024$ p. 74

Sumário

1	Introdução	p. 1
1.1	Conceitos e ferramentas	p. 1
1.2	O sistema social e a dinâmica de opinião	p. 10
1.3	Modelo do Votante	p. 12
1.3.1	Reticulados regulares	p. 12
2	Objetivo	p. 17
2.1	Objetivo Geral	p. 17
2.2	Objetivos específicos	p. 17
3	Dinâmica Crítica de Curto Tempo	p. 18
3.1	Modelo do voto da maioria contínuo na rede cúbica	p. 19
3.1.1	Colapso dos dados	p. 26
3.1.2	Medida de qualidade dos colapsos dos dados	p. 26
3.2	Modelo do votante majoritário discreto na rede cúbica	p. 28
4	Método	p. 32
4.1	Diferenciação e suavização de dados com ruídos	p. 32
4.1.1	Equações governantes	p. 33
4.1.2	Equação discretizada	p. 34
4.1.3	Regularização Tikhonov	p. 35
4.1.4	Validação cruzada generalizada	p. 36

5 Resultados	p. 38
5.1 Resultados do modelo do votante majoritário contínuo em três dimensões	p. 38
5.1.1 Comportamento da magnetização	p. 39
5.1.2 Comportamento da transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos	p. 55
5.1.3 Comportamento do comprimento de correlação	p. 55
5.1.4 Colapso dos dados	p. 57
5.2 Resultados do modelo do votante majoritário discreto em três dimensões	p. 62
5.2.1 Comportamento da magnetização	p. 65
5.2.2 Método da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo	p. 65
5.2.3 Colapso dos dados	p. 66
5.2.4 Comportamento do comprimento de correlação	p. 69
6 Conclusão	p. 78
Referências	p. 80

1 Introdução

1.1 Conceitos e ferramentas

Sistemas sociais têm despertado cada vez mais o interesse de cientistas naturais, com o objetivo de aplicar os mesmos métodos de análise de seu campo de conhecimento nas mais variadas formas dos fenômenos sociais. Sem sombra de dúvida, governos, corporações, agências de marketing entre outros gostariam de ser capazes de prever o comportamento de grupos sociais com a mesma precisão que somos hoje capazes de descrever o movimento dos astros ou o comportamento das marés. Indo muito mais além, talvez alguma dessas instituições até sonhe um dia poder inferir, controlar ou até mesmo induzir determinado comportamento das massas.

Um sistema social exhibe uma complexidade muito maior que qualquer sistema “físico”. Em geral, um dado sistema físico responde sempre da mesma forma a estímulos idênticos enquanto um grupo social pode reagir completamente diferente a estímulos semelhantes, dependendo do estado de humor, estresse ou motivação de seus membros. Além disso, cada indivíduo do grupo é ele próprio um sistema altamente complexo, que pode responder de forma distinta dos demais componentes do grupo. Já todo e qualquer elétron do universo responde da mesma forma a um determinado campo elétrico.

Uma diferença essencial no estudo de um sistema natural e um sistema social deve-se ao fato de conhecermos as leis básicas que regem o comportamento do primeiro enquanto sabemos muito pouco sobre o segundo. No mínimo, o sonho referido acima terá que esperar muito tempo para ser realizado.

O termo sociofísica (GALAM; GEFEN; SHAPIR, 1982) é empregado para designar um conjunto de métodos quantitativos ou matemáticos ao estudo do comportamento de sistemas sociais, composto por pessoas ou indivíduos, utilizando técnicas e ferramentas da física. Um dos objetivos da sociofísica é descrever as propriedades emergentes que caracterizam uma “sociedade”. Tais propriedades originam-se das interações entre as partes

de um sistema e correspondem a novos comportamentos que não podem ser inferidos do estudo dos componentes individualmente.

A sociofísica é um campo de estudo interdisciplinar que surgiu na década de 1970, ela começou a atrair o interesse de alguns físicos em meados dos anos 90 e hoje tem ampla aplicação na física estatística acondicionando teorias e métodos de diversas ciências, como a biologia, a psicologia, a sociologia, combinados com métodos quantitativos tanto estocásticos quanto determinísticos. O aumento da capacidade de processamento computacional aliado às técnicas estatísticas, permitiram, ainda, aos físicos estudarem diversas classes de sistemas que envolvem o estudo das interações sociais. Nesta perspectiva, diversos modelos de sociedades artificiais foram propostos, dinâmica populacional, epidemia, terrorismo, formação da coalizão e a dinâmica de opinião, cada um sendo responsável por quantificar e qualificar fenômenos coletivos e de comportamentos específicos encontrados em sistemas sociais reais. Entre esses temas a dinâmica de opinião é responsável por uma gama de publicações (GALAM, 2008), (CHAKRABARTI; CHAKRABORTI; CHATTERJEE, 2007), (GALAM; MOSCOVICI, 1995), (GALAM; MOSCOVICI, 1994), (GALAM; MOSCOVICI, 1993).

Modelos propostos para descrever a dinâmica de um conjunto de spins interagentes foram reformulados, a fim de empregá-los na descrição de certos aspectos de sistemas sociais, formados por indivíduos que se influenciam mutuamente, principalmente no que diz respeito à tomada de decisões coletivas.

Posteriormente, no trabalho (GALAM; GEFEN; SHAPIR, 1982) foi apresentada uma nova abordagem para compreender o comportamento social, baseado na estrutura de fenômenos físicos. O modelo, por exemplo, poderia expressar o comportamento médio de um dado funcionário, de uma fábrica, durante um processo de greve. O modelo continha somente um número limitado de parâmetros característicos da fábrica considerada e da sociedade. Além disso, um parâmetro de insatisfação foi introduzido ao modelo. Neste trabalho, ainda, verificou-se que o comportamento médio dos funcionários poderia ter um estado coletivo ou um estado individual. Estas duas fases (coletivo e individual) são separadas por um ponto crítico (um dado valor do parâmetro de insatisfação), em que na sua vizinhança o sistema é muito sensível a pequenas alterações dos parâmetros que modela o sistema.

Era de se esperar que estas novas abordagens teóricas dessem um novo sopro de vida a um campo de pesquisa que forneceu fatos sólidos. Subsequentemente, alguns trabalhos publicados apresentaram o esboço de um modelo que contemplava uma série de hipóteses

de psicologia social bem estabelecidas e com os conceitos recentes da física estatística aplicadas a fenômenos coletivos (GALAM; MOSCOVICI, 1991a), (GALAM; MOSCOVICI, 1993), (GALAM; MOSCOVICI, 1994), (GALAM; MOSCOVICI, 1995). Especificamente, esses estudos começaram a partir das regularidades observadas nos trabalhos sobre polarização de atitudes e decisões. Estas análises revelaram que quando lidamos com fenômenos que foram denotados como fenômenos de polarização, estamos diante não de um único fenômeno, como se acreditava até então, mas com toda uma classe de fenômenos. Por este motivo, seria apropriado lidar com eles tanto empiricamente quanto de um ponto de vista teórico.

Sobre o enfoque teórico, foi considerado um modelo, muito popular entre os físicos estatísticos, conhecido como o modelo de Ising (TOMÉ; OLIVEIRA, 2001). O modelo de Ising foi proposto para descrever o comportamento de sistemas magnéticos por Lenz (LENZ, 1925). Neste modelo, os spins (uma espécie de ímã microscópico) podem permanecer alinhados todos na mesma direção devido às fortes interações entre eles. Da mesma forma, os participantes de uma discussão podem chegar a mesma conclusão devido a influência que cada membro exerce sobre os demais. No modelo de Ising, em um contexto social, os participantes podem assumir um de dois possíveis estados de opinião, por exemplo no caso de mobilidade, ir ou ficar, numa discussão concordar ou discordar, num plebiscito ser contra ou a favor, e assim por diante.

No modelo tipo Ising quando é acrescentado um viés individual a dinâmica de decisão muda e se aproxima das atitudes convencionais, pois sem ele o indivíduo concordaria, sempre, com a opinião dos seus vizinhos, no caso de modelos de dinâmica de opinião por exemplo. Deste modo, com a inserção do viés (comumente chamado de ruído), alguns participantes podem mudar ou não de opinião (estado), ou seja, seu estado final é estocástico. E, portanto, quando esses indivíduos são distribuídos na população, o resultado final das discussões pode ser difundido.

Como dito acima, houve um avanço significativo no número de trabalhos sobre dinâmica de opinião, e muitos outros modelos de sociodinâmica foram e continuam sendo propostos (OLIVEIRA, 1992), (AXELROD, 1997), (GALAM, 2008) e (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009). Agora, com um pouco mais de 20 anos de pesquisas, outros questionamentos foram levantados. Por exemplo, é de se esperar que, devido às interações sociais, as pessoas tendam a se tornar mais parecidas em suas crenças, atitudes e comportamento. Como podemos ainda observar diferenças entre povos ou grupos sociais? Por que todas as diferenças não desapareceram? Questionamentos dessa natureza foram investigados através de um modelo adaptativo baseado em agentes. Especificamente, o modelo pro-

cura estudar a difusão de culturas em populações com indivíduos com diferentes traços culturais. O modelo considera que quanto mais um indivíduo é semelhante com seus vizinhos, mais provável é que ele venha a adotar um de seus traços (AXELROD, 1997). O estudo revelou uma riqueza de cenários. Tanto a população pode evoluir para um estado mais homogêneo (o número de traços diminuem) quanto para um estado de maior diversidade cultural. Os fatores influenciando o comportamento global da população foram investigados através de simulações computacionais. Dentre os fatores investigados destacamos o alcance da interação entre os agentes e o tamanho do território geográfico aonde eles vivem.

Um modelo tipo Ising foi proposto no artigo (SZNAJD-WERON; SZNAJD, 2000), para descrever um mecanismo de tomada de decisão em comunidades fechadas, a técnica utilizada foi a de simulações Monte Carlo. Nesta publicação verificou-se que uma comunidade fechada evoluiu, com o passar do tempo, seja a uma ditadura ou a um impasse. Entenda como impasse a incapacidade de tomar qualquer decisão comum. Para melhor entender a dinâmica utilizada descrevemos, sucintamente, o modelo abaixo.

Considere uma comunidade que uma vez ou outra deva tomar uma posição em relação a alguma matéria, por exemplo votação de um presidente, em um sistema partidário. Se cada membro da comunidade pode ter, apenas, uma das duas atitudes (A ou B) e, nas várias votações, se espera alguma diferença m de eleitores a favor ou contra a A. A dinâmica leva o sistema a três estados que, uma vez entrado em um deles, não se pode abandoná-lo exceto se o processo for reiniciado. Vejamos os três casos limites

1. Todos os membros da comunidade votam em A (no estado “todos em A”),
2. Todos os membros da comunidade votam em B, (no estado “todos em B”)
3. 50% votam em A e 50% votam em B.

Os estados 1, 2 e 3 são as soluções estáveis do modelo.

Para modelar o sistema acima, considerou-se uma cadeia de spins ($S_i; i = 1, 2, \dots, N$), e cada S_i assume o valor $+1$ se o indivíduo i vota em A ou o valor -1 , caso contrário. O sistema evolui de acordo com as seguintes regras dinâmicas

- se $S_i S_{i+1} = 1$, então S_{i-1} e S_{i+2} adotam a direção do par $(i, i + 1)$,
- se $S_i S_{i+1} = -1$, então S_{i-1} adota a direção de S_{i+1} e S_{i+2} adota a direção de S_i .

Nesta regra, do ponto de vista de interação humana, assume-se que um par de vizinhos (“Pessoas”), em uma rede, convence seus vizinhos, se e somente se as duas pessoas do par compartilham a mesma opinião. Quando os membros de um par apresentam opiniões diferentes, em seguida, o vizinho mais próximo de cada membro não concorda com ele, como pode ser observado na Fig1. Para maiores detalhes consultar (SZNAJD-WERON;

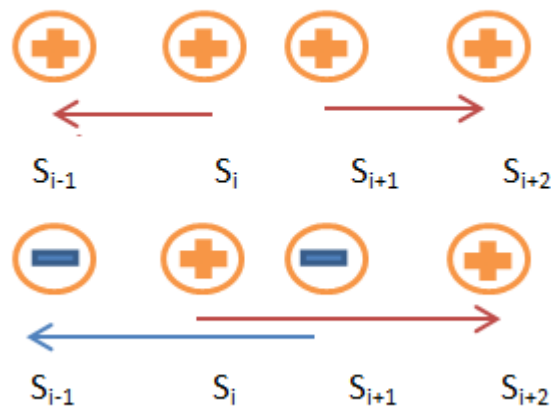


Figura 1: Interação dos spins, no modelo tipo Sznajd-Weron. Os símbolos + e – indicam posições a favor e contra a uma determinada questão, respectivamente.

SZNAJD, 2000). Vejamos mais alguns detalhes deste artigo visto que ele impulsionou vários outros artigos e ilustra bem o tipo de questionamentos que se tenta responder em socio-física.

Uma generalização do modelo de Sznajd foi proposta por Stauffer, no artigo (STAUFFER, 2001). Neste artigo, os agentes i têm opiniões contínuas x_i . Em cada passo de tempo, quaisquer dois agentes, escolhidos aleatoriamente, se encontram. Os agentes ajustam suas opiniões quando a distância entre duas opiniões é menor que um limiar d . Suponha que dois agentes tenham opiniões x e x' e que $|x - x'| < d$. As opiniões num passo de tempo posterior são ajustadas de acordo com a seguinte regra

$$x(t+1) = x(t) + \mu[x'(t) - x(t)]. \quad (1.1)$$

Onde μ é o parâmetro de convergência que pode assumir valores entre 0 e 0.5. Esta abordagem usa a idéia de (DEFFUANT et al., 2000), na qual uma pessoa localizada no centro do grupo pode convencer seus vizinhos, se a sua opinião for muito próxima à deles.

Outros modelos de certa forma relacionados ao modelo de Snazdj podem ser encontrados em (STAUFFER, 2002a) ; (STAUFFER, 2002b), modelo de rumores com (ZHAO et al., 2013) e (GALAM, 2003).

Recentemente, uma generalização do modelo de rumor clássico (SIR) Suscetível-Infetado-Recuperado foi proposta por (ZHAO et al., 2013). Na qual foi acrescentado ao modelo (SIR) uma ligação direta a um novo grupo de indivíduos que passa de infectados para hibernador, ou comumente conhecido como letárgicos. Neste último artigo, eles mostram que existem diferenças significativas entre espalhar rumores e epidemias nas mídias sociais, especialmente, levando em consideração mecanismos de efeitos dicotômicos, como esquecimento e lembrança.

Pesquisas em redes complexas, impulsionados pelos trabalhos iniciais de (WATTS; STROGATZ, 1998) e (BARABÁSI; ALBERT, 1999), tornaram-se uma área vibrante na academia. Muitos físicos e cientistas sociais aplicam metodologias de teorias de redes em uma variedade de questões sociais por exemplo, (DEFFUANT, 2006), (ADAMIC; ADAR, 2005), (STAUFFER; MEYER-ORTMANN, 2004), (TASSIER, 2004), (AMBLARD; DEFFUANT, 2004), (JONES; HANDCOCK, 2003), (WATTS; DODDS; NEWMAN, 2002), (GALAM, 2002) e (ORLÉAN, 1995). Este último, desenvolveu um trabalho de Inferência Bayesiano de dinâmica coletiva de opiniões aplicados a comportamento de manada e contágio mimético.

Neste contexto, muitos trabalhos relatam a importância de como os físicos têm explorado campos, claramente, muito longe de seus domínios tradicionais de investigações a fim de modelar problemas de mecânica estatística (??) e (STAUFFER, 2002b). Essa falsa dicotomia se dá por exemplo porque se tratando de fenômenos sociais os elementos básicos do estudo não são partículas, como na Física, mas sim indivíduos que se relacionam, convivem, com um número limitado de pessoas (vizinhança mais próxima) que apresentam certas regularidades, segundo declarações de (BUCHANAN, 2007). Nos sistemas sociais, é possível detectar a existência de transições da desordem à ordem, como a formação espontânea de uma linguagem comum ou a emergência de um consenso sobre um tema específico. Na linguagem de um físico estatístico, há exemplos de invariância de escala e de comportamento universal. Esses fenômenos macroscópicos, perceptíveis a olhos nus, naturalmente exigem uma abordagem da mecânica estatística para o comportamento social, ou seja, tenta-se compreender as regularidades em grande escala como resultado dos efeitos coletivos da interação entre indivíduos isolados.

Pode ser surpreendente, mas a idéia de modelagem física dos fenômenos sociais é, em certo sentido, mais velha que a idéia de modelagem estatística de fenômenos físicos

(AXELROD; BENNETT, 1993). A descoberta de leis quantitativas nas propriedades coletivas de um grande número de pessoas, como foi revelada, por exemplo, taxas de natalidade e de mortalidade ou estatísticas de criminalidade, foi um dos fatores que impulsionaram o desenvolvimento da estatística e fez com que muitos cientistas e filósofos sentissem a necessidade de um melhor entendimento quantitativo (no sentido da física) sobre a forma como tais regularidades precisas surgem do comportamento aparentemente aleatório de indivíduos isolados. Por volta do século *XVII*, diversos pesquisadores tinham diferentes perspectivas políticas, como Thomas Hobbes, Laplace, Comte, Stuart Mill e muitos outros e diferentes linhas de pensamento, seja ela determinista ou probabilística. Dentre estes pensadores, Thomas Hobbes destacou-se por ter usado a mecânica de Galileu para a construção de uma teoria de governo usando a teoria da conservação do movimento. Apesar de propor um governo do tipo mão de ferro, Hobbes procurou regras “científicas” que governassem a sociedade (BALL, 2004).

A visão mecanicista de Hobbes era bem conhecida por Maxwell e Boltzmann que desempenharam um importante papel quando abandonaram a idéia de descrever a trajetória das partículas individuais e introduziram uma descrição probabilística ao estudo dos gases, lançando as bases da física estatística moderna. Em seu livro, Ball (BALL, 2004) entusiasticamente demonstra como a aplicação das leis da física moderna às ciências sociais podem enriquecer muito a nossa compreensão das leis do comportamento humano. O valor das leis estatísticas nas ciências sociais foi também previsto por Majorana em seus famosos artigos (MAJORANA, 1942) e (MAJORANA, 2005). Nos últimos anos, a idéia de aproximar a física estatística das ciências sociais tem motivado vários pesquisadores a estudar o surgimento de novos fenômenos sociais (principalmente relacionado com a Internet), como eles se propagam, causas e consequências a longo prazo, bem como a formulação de novos modelos sociais, simplificados ou não, contribuindo para a evolução do conhecimento.

Nesta revisão, é importante discutir vários aspectos diferentes de uma única questão fundamental da dinâmica social: as interações entre os agentes sociais criam ordem em uma situação inicialmente desordenada? Ordem é uma tradução na linguagem da física do que é indicado na área de ciências sociais como consenso, acordo, uniformidade, enquanto a desordem significa discordância, caos, confusão. É razoável supor que, sem interações domina a heterogeneidade: sozinhos, cada agente iria escolher uma resposta pessoal a uma questão política, um conjunto único de características culturais à sua própria correspondência especial entre objetos e palavras. Ainda assim, existem grupos homogêneos e é de experiência comum que existam opiniões compartilhadas, culturas, línguas. O foco

da física estatística à dinâmica social é entender como isso acontece. O fator chave é que os agentes interagem e isso geralmente tende a tornar as pessoas mais semelhantes (embora existam muitos contra-exemplos). Interações repetidas, no tempo, podem levar a graus mais elevados de homogeneidade (acordo), que pode ser parcial ou completa, dependendo de escalas temporais ou espaciais. A investigação desse fenômeno é de natureza intrinsecamente dinâmica.

Ao relacionar as dinâmicas sociais a partir do ponto de vista da física estatística surgem dificuldades conceituais, pois modelos microscópicos são propostos para descrever o comportamento macroscópico de todo o sistema, que este é resultante da interação de um grande número de elementos “simples”, além disso, a maioria dos modelos seguem uma dinâmica. Já com as pessoas, nem se sabe, precisamente, a dinâmica de um único indivíduo, tampouco a forma de como ele interage com os outros. Portanto, qualquer modelagem de agentes sociais, inevitavelmente, envolve uma enorme simplificação do problema real. A crítica que os modelos usados por físicos para descrever sistemas sociais são demasiadamente simplificados para descrever qualquer situação verdadeira é na maioria das vezes muito bem fundamentada. Esta crítica também se aplica aos modelos altamente aclamados introduzidos pelos cientistas sociais, como o modelo de Schelling de segregação urbana (SCHELLING, 1971) e o modelo de Axelrod (AXELROD, 1997) para a difusão cultural.

A maioria das situações qualitativas (e mesmo algumas propriedades quantitativas) de fenômenos de grande escala, não dependem dos detalhes microscópicos do processo. Apenas recursos de nível superior, como simetrias, dimensionalidade ou leis de conservação, são relevantes para o comportamento global. De forma que, sistemas aparentemente muito diferentes podem apresentar os mesmos comportamentos sob certas circunstâncias. Próximo a uma transição de fases de segunda ordem o sistema se torna invariante por transformações de escala. Dizemos então que o sistema é *crítico*. E seu comportamento é descrito por um pequeno conjunto de índices (expoentes críticos). Neste contexto, podemos falar de *classe de universalidade* que engloba um conjunto de sistemas físicos com o mesmo conjunto de expoentes críticos (TOME, 1996).

O trabalho de Janssen, Schaub, e Schmittmann demonstrou, usando análise de grupos de renormalização, que o relaxamento crítico em tempos curtos apresenta comportamento universal (JANSSEN; SCHAUB; SCHMITTMANN, 1989). Grupo de Renormalização é uma técnica que permite a investigação sistemática das mudanças de um sistema físico, quando visto em diferentes escalas de comprimento.

A previsão de Jassen et al. foi verificada em vários modelos específicos, como o modelo tipo Ising (HUSE, 1989), (LI; RITSCHER; ZHENG, 1994), (SCHÜLKE; ZHENG, 1995), (LUO; SCHÜLKE; ZHENG, 1998), (OKANO et al., 1997) e (RITSCHER; CZERNER, 1997), e o modelo de Potts (OKANO et al., 1997), (SCHÜLKE; ZHENG, 1995) e no artigo (XIA et al., 2003). Vale a pena acrescentar que todos os modelos, acima, citados são reversíveis microscopicamente, que equivale dizer que o estado estacionário é um estado de equilíbrio.

Na dinâmica social, uma transição de fases pode ser caracterizada por uma mudança comportamental da ordem à desordem, por exemplo. Do ponto de vista social, suponhamos que, inicialmente, todos os indivíduos de um dado grupo concordem entre si. Dizemos, então que o sistema encontra-se completamente ordenado. A partir deste estado, permitimos que o sistema evolua de acordo com alguma regra dinâmica que inclua a interação entre os indivíduos juntamente com um parâmetro que regula a intensidade da “pressão social” que cada indivíduo experimenta devido à interação com seus pares. No limite em que a pressão social é muito baixa (tende a zero) cada indivíduo adota uma posição independente das de seus pares durante a evolução dinâmica. Nesse caso, o sistema atinge um estado no qual não há correlação entre as posições adotadas pelos indivíduos. E, a longo prazo, o sistema atingirá um estado desordenado — não há consenso. Por outro lado, no limite de altas pressões, a posição adotada por um dado indivíduo é fortemente influenciada pelas adotadas por seus pares. Neste outro caso, o consenso é provável e o sistema atinge um estado no qual a maioria dos agentes compartilham a mesma posição. A transição de um regime para o outro, se houver, ocorre para algum valor da pressão social entre zero e infinito.

Vários dos modelos para a dinâmica social citados até aqui se enquadram na descrição acima. Além disso, eles exibem comportamento crítico. E, nas proximidades do ponto crítico, tais sistemas têm um comportamento que acredita-se ser universal, ou seja, os expoentes críticos dependem apenas da dimensão espacial do sistema e do número de componentes da variável associada ao estado que um dado agente pode adotar (número de opções dadas ao agente)(YEOMANS, 1992) e (KELSO et al., 1984).

Uma classe interessante de modelos que lembram o comportamento social, principalmente associados a dinâmica de opinião, é formada pelos modelos de votantes (PEREIRA; MOREIRA, 2005), (CROCHIK; TOMÉ, 2005), (TOMÉ; OLIVEIRA, 1998), (MENDES; SANTOS, 1997), (OLIVEIRA, 1992). Nesses modelos, cada agente pode assumir uma dentre q possíveis opiniões. Quando $q = 2$ os agentes são do tipo Ising (ou Potts de 2 estados) e são chamados do tipo Potts para outros valores q . Outrossim, a dinâmica

microscópica desses sistemas são *irreversíveis*, ou seja, tais modelos não satisfazem *balanceamento detalhado* (TOMÉ; OLIVEIRA, 2001). Não obstante a dinâmica estocástica superpostos aos agentes desses modelos serem microscopicamente irreversíveis, resultados de simulações mostraram que os seus expoentes críticos são os mesmos que os correspondentes expoentes obtidos sob a evolução de uma dinâmica reversível (que descreve o sistema de equilíbrio) (TOMÉ; OLIVEIRA, 1998) e (TOMÉ; OLIVEIRA, 2001). Portanto, quando as variáveis dinâmicas microscópicas assumem um número finito de possíveis estados, a reversibilidade ou irreversibilidade da dinâmica é irrelevante para determinar a classe de universalidade do sistema.

Os autores da referência (COSTA; SOUZA, 2005) introduziram uma generalização do modelo do votante para permitir que cada agente possa assumir um número infinito de estados. Ou seja, a variável dinâmica que especifica o estado/opinião de um agente pertence a um suporte contínuo. Os autores realizaram simulações de Monte Carlo de tempos curtos do modelo em redes quadradas e concluíram que o comportamento crítico exibido pelo mesmo era similar ao comportamento crítico de um modelo xy de equilíbrio em duas dimensões.

Um dos nossos objetivos é estudar o comportamento deste modelo em três dimensões. Verificar se existe uma fase ordenada (como no caso dos modelos discretos), determinar a ordem da transição e sua classe de universalidade, caso a transição seja de segunda ordem.

No contexto de dinâmica social, poderíamos imaginar os agentes com um número finito de estados (discretos) como pertencente a uma sociedade com regras bem estabelecidas. Na qual os indivíduos seriam forçados a adotar um dentre os comportamentos “permitidos”. Por outro lado, quando os agentes têm infinitas possibilidades de escolha, poderíamos pensar em uma sociedade libertária, anarquista ou sem regras pré-estabelecidas. Assim, o que corresponderia à fase ordenada e qual sua natureza? Caso ela exista.

Propomos também uma nova maneira de analisar dados de simulações de Monte Carlo de tempos curtos. O processo permite a localização da transição de fases e a estimativa dos valores dos expoentes críticos estáticos e do expoente crítico dinâmico.

1.2 O sistema social e a dinâmica de opinião

Antes da década de 1980, havia poucas publicações dedicadas a questões como psicologia de massa, as pressões sociais, dinâmica de opiniões e contágio, esses assuntos foram seriamente estudados, apenas, por um pequeno grupo de pesquisadores. A princi-

pal razão para essa negligência é o fato de que, aos olhos da maioria dos pensadores, esses fenômenos eram vistos como fundamentalmente baseados em motivações irracionais e, portanto, tratavam-se de métodos não científicos (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009). Essa situação mudou consideravelmente, haja vista, nos últimos anos, um número grande de modelos baseados em agentes terem sido construídos, de modo a estudar o sistema social, o consenso e a dinâmica de opinião (AXELROD, 1997).

Em 1971 modelos estatísticos, baseados em leis de probabilidade, utilizados para a descrição do desenvolvimento dinâmico de um conjunto de spins interagentes foram reformulado. O objetivo deste trabalho era estudar a estrutura dos grupos sociais de indivíduos que influenciam mutuamente no que diz respeito ao seu comportamento de decisão (WEIDLICH, 1971). Este artigo foi considerado o primeiro a abordar a dinâmica de opinião. Uma década depois, os trabalhos pioneiros de Galam e Moscovici (GALAM; GEFEN; SHAPIR, 1982), (GALAM; MOSCOVICI, 1991a) e (GALAM; MOSCOVICI, 1991a), propuseram os primeiros modelos de consenso com base no modelo de Ising. Posteriormente, foi construído um modelo adaptativo com o objetivo de estudar a difusão da cultura entre os indivíduos, tal estudo revelou que convergências locais podem gerar polarização global. As simulações mostram que o número de regiões homogêneas estáveis diminui com o número de recursos, com o aumento de interação, e com quando o território geográfico cresce além de um determinado tamanho (AXELROD, 1997). Utilizando o modelo de Snazdj, comentado na introdução, vários outros artigos foram publicados, a saber: (STAUFFER, 2002a), (STAUFFER, 2002b), (STAUFFER, 2002a), (STAUFFER, 2002b) e os modelos de boatos, comportamentos coletivos e outros, explorados por vários artigos de Galam, como seguem: (GALAM; GEFEN; SHAPIR, 1982), (GALAM; MOSCOVICI, 1993), (GALAM, 2002) e (GALAM, 2008), também podem ser citados como importantes trabalhos, nesta área.

Um dos aspectos mais importantes na dinâmica social é o acordo. A vida cotidiana apresenta muitas situações em que é necessária a tomada de decisões compartilhadas. O acordo assume uma posição mais forte, na sociedade, quando reflete o interesse de um grupo, e conseqüentemente seu impacto na sociedade tem maior magnitude. A dinâmica de concordância ou discordância entre os indivíduos é complexa, por causa da individualidade de cada um. Os físicos estatísticos que trabalham sobre essa dinâmica visam definir os estados de opinião de uma população, e os processos elementares que determinam as mudanças de estados. A principal questão é se isso é possível e se esta abordagem pode lançar uma nova luz sobre o processo de formação de opinião. Em qualquer modelo matemático, opiniões podem ser uma variável, ou um conjunto de variáveis, isto é, um conjunto de números. Isto pode parecer limitar muito as ações pessoais, pensando na

complexidade de uma pessoa e de cada posição individualmente. A vida cotidiana, ao contrário, indica que as pessoas às vezes são confrontadas com um número limitado de posicionamento a cerca de algo ou alguma situação que exija a tomada de decisão. Se as opiniões podem ser representadas por números, o desafio é encontrar um conjunto adequado de regras matemáticas para descrever os mecanismos responsáveis pelos modelos de aplicabilidade na dinâmica de opiniões. O desenvolvimento da dinâmica de opinião, até agora, foi feito com base em tentativas individuais, onde a Mecânica Estatística ao refinar funções matematicamente bem definidas, acaba percebendo similaridades entre comportamento dinâmico das funções e os mecanismos sociais.

Como primeiro modelo à dinâmica social abordaremos, a seguir, o modelo do voto majoritário, ou simplesmente modelo do votante.

1.3 Modelo do Votante

1.3.1 Reticulados regulares

O modelo do votante foi nomeado desta forma devido a uma interpretação muito natural de suas regras em termos da dinâmica de opinião. Sua definição por ser extremamente simples tem sido investigada também por áreas muito distante das dinâmicas sociais, como a teoria das probabilidades (TOME, 1996), (TOMÉ; OLIVEIRA, 2001) e (FRIEDLI, 2011). Neste modelo, temos que a escolha tomada pelo indivíduo em um dado instante de tempo depende da escolha adotada pelos seus vizinhos mais próximos, no mesmo instante de tempo. A dinâmica do votante foi considerada pela primeira vez no artigo (CLIFFORD; SUDBURY, 1973) como um modelo para a competição de espécies e com o nome “modelo do votante”, (Holley e Liggett, 1975). Entre outros trabalhos, desenvolvidos por probabilistas, além do desenvolvido por Clifford podemos citar (HOLLEY; LIGGETT, 1975), (STRAUSS; LIGGETT; LANESE, 1985) e (COX; GRIFFEATH, 1986), que exploraram o fato de que o modelo pode ser exatamente mapeado num modelo de passeios aleatórios que se aglutinam. Esta propriedade permitiu utilizar o princípio da dualidade em passeio aleatório (STRAUSS; LIGGETT; LANESE, 1985), (LIGGETT, 1999). Entretanto, outros autores preferem seguir outra derivação da solução geral em redes (FRACHEBOURG; KRAPIVSKY, 1996), tendo como base o trabalho anterior de (KRAPIVSKY, 1992). Ainda, sobre o artigo de Frachebourg, ele afirmou que o modelo do eleitor parecia ser um dos poucos modelos que poderia ser resolvido em qualquer dimensão. Além disso, poderia ser resolvido numa rede arbitrária, embora, por simplicidade, seu trabalho fosse numa rede

hipercúbica.

A definição do modelo do votante é extremamente simples: cada agente i é dotado de uma variável binária $\sigma_i = \pm 1$, que significa a opinião favorável ou contra a um determinado assunto, por exemplo. Em cada passo de tempo um agente i é selecionado, juntamente com um de seus vizinhos j de forma que o estado $\sigma_i \leftarrow \sigma_j$, ou seja, o agente adota a opinião do vizinho. Esta regra de atualização implica que os agentes imitam seus vizinhos.

A ausência de um fator perturbativo, no modelo, que influencie na tomada decisão de cada agente i faz com que os indivíduos adotem a mesma opinião, ou similarmente entrem no estado absorvente. Sendo que, uma vez entrado no estado absorvente não pode mais sair, a menos que o processo seja reiniciado. A partir de uma condição inicialmente desordenada, a dinâmica do votante tende a aumentar a ordem do sistema (SCHEUCHER; SPOHN, 1988). Para exemplificar esta afirmação de Scheucher e Spohn, vejamos as Figuras 2 e 3.

Nas Figuras 2 e 3 mostramos o resultado da simulação da dinâmica do voto da maioria, disponível no site *wolframalpha*⁰. Cada célula tem um dos estados discreto (± 1) e que, simultaneamente, transforma-se em um estado mais comum dentro de sua vizinhança local. A inicialização, do processo, se dá com o sistema inicialmente desordenado (compostos por agentes a favor e contra a uma determinada matéria), a partir do dia zero (0), veja a Figura 2. Na Figura 3 podemos observar que o comportamento geral é a formação de um padrão irregular que engrossa ao longo do tempo, até que as fronteiras entre as zonas de diferentes estados tornam-se independentes, ficando evidente a distinção de dois grandes grupos, a medida que se passam os dias .

Nos diversos modelos do votante majoritário define-se uma taxa de transição. Esta taxa pode ser interpretada como uma medida de probabilidade que mede a ocorrência de inversão dos spins, numa rede. Diversos trabalhos estudam comportamentos dos votantes, modificando suas taxas. Nos artigos (DROUFFE; GODRECHE, 1999) e (OLIVEIRA; MENDES; SANTOS, 1993) consideraram as taxas de transição da seguinte forma

$$W_k(\sigma) = 1/2[1 - s_k f_k(\sigma)], \quad (1.2)$$

onde $\sigma = \pm 1$ e $f_k(\sigma)$ é uma função local com $|f_k(\sigma)| \leq 1$. Foi considerado $f_k(\sigma)$ tal que $W_k(\sigma)$ conserva a simetria de inversão e é simétrica espacialmente. Por exemplo, para uma rede quadrada temos $f_k(\sigma) = f(\sum_{\delta} \sigma_{k+\delta})$, uma função da soma das variáveis de spin de vizinhos mais próximos com $f(0) = 0$, $f(2) = -f(-2) = x$, e $f(4) = -f(-4) = y$,

⁰<http://www.wolframalpha.com>



Figura 2: Foto inicial do voto da maioria em uma rede regular bidimensional, com opções ± 1 .

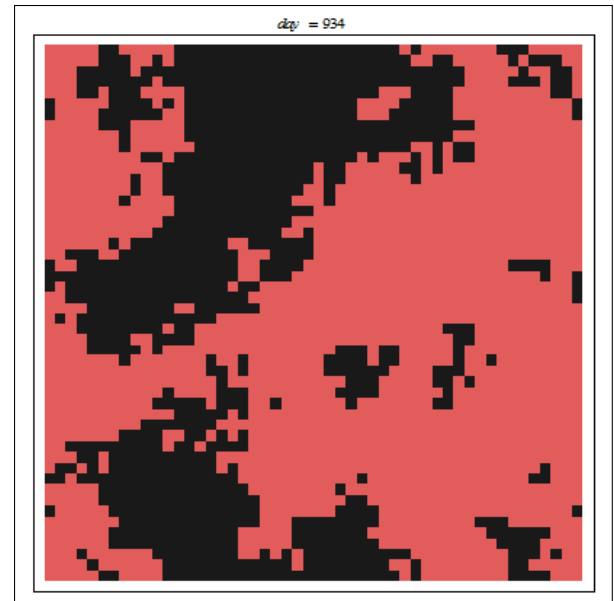


Figura 3: Foto correspondente ao dia 994 da dinâmica do voto da maioria em uma rede regular bidimensional, com opções ± 1 .

sendo x e y parâmetros restritos a $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$. Vários modelos conhecidos são casos especiais da família de dinâmicas estocásticas definidas pela Equação (1.2).

Ainda, com relação a diferentes modelos do votante majoritário, muitas versões podem ser definidas, uma vez que seja determinada a vizinhança dos spins. Um fato, importante, não foi levado em consideração nos modelos anteriores: o quanto um boato, ruído ou fofoca pode influenciar na decisão da maioria. Pois antes o sujeito, por exemplo, concordava sempre com a opinião da maioria. Mas sabemos que esse modelo não retrata fielmente a dinâmica social, pois existem pessoas que ainda que se sintam influenciadas elas não, necessariamente, mudam de opiniões, por exemplo. Outros fatores intrínsecos a um dado comportamento social, como o nível de instrução das pessoas, também influenciam em suas decisões. Deste modo, cientistas sociais, físicos e outros estudiosos no assunto foram propondo incrementos ao modelo do votante, de modo a aproximar-se mais das situações reais. Com esses novos incrementos o modelo passou a ser chamado de modelo do votante com ruído que agora tem diversas versões. Mostraremos a seguir o modelo do votante majoritário com ruído proposto por (OLIVEIRA, 1992).

No artigo de (OLIVEIRA, 1992) o modelo do votante majoritário (MVM) foi definido com uma dinâmica estocástica com regras locais e simetria de inversão em uma rede regular quadrada. Considerando-se uma rede hipercúbica d -dimensional e denotando o estado do sistema como sendo $\sigma = \sigma_k$. Em cada tempo discreto um spin σ de um sítio k

é escolhido aleatoriamente. O spin selecionado adota o sinal da maioria dos seus vizinhos com probabilidade p , ou o sinal da minoria com probabilidade complementar. A taxa de inversão $W_k(\sigma) = W_k(\sigma_k)$ do estado do k –ésimo sítio de σ_k para $-\sigma_k$ é dada por (OLIVEIRA, 1992)

$$W_k(\sigma) = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2q)\sigma_k S\left(\sum_j \sigma_j\right) \right], \quad (1.3)$$

onde $S(x)$ é a função sinal que assume os valores -1 , 0 e $+1$ para $x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$, respectivamente. O somatório é realizado sobre os j –ésimos vizinhos mais próximos do sítio k e isto define a sua vizinhança. A Equação 1.3 tem simetria de inversão, pois a taxa de transição $W_k(\sigma)$ é invariante sob a inversão de todos spins σ da rede. O parâmetro de controle (também chamado de ruído) q é restrito ao intervalo $0 \leq q \leq 1/2$, devido a simetria de inversão. O ruído q no intervalo $1/2 \leq q \leq 1$ pode ser reduzido ao caso anterior revertendo o sinal de todos os spins da rede e substituindo a probabilidade q por $p = 1 - q$.

O modelo, em questão, mostrou uma transição de fase de segunda ordem com expoentes críticos β , ν , γ que caracterizam o sistema, na vizinhança da transição de fase, idênticos aos do modelo de Ising (MENDES; SANTOS, 1997), para redes regulares.

Simulações numéricas mostraram que o modelo do votante majoritário, com ruído, apresenta uma transição de fase dinâmica de um estado estacionário ordenado para um desordenado. E, ainda está na mesma classe de universalidade do modelo Ising no equilíbrio (OLIVEIRA, 1992). O trabalho (MENDES; SANTOS, 1997) utilizou a técnica de simulação Monte Carlo em curto tempo, no modelo do votante majoritário em duas dimensões. O objetivo deste artigo era estudar a transição de fase do ferromagneto fora do equilíbrio. Foi verificado que o expoente crítico dinâmico z e o parâmetro θ associado a dimensão do parâmetro de ordem estão em concordância com os da classe de universalidade do modelo Ising cinético.

O artigo de (PEREIRA; MOREIRA, 2005) estudou o modelo do votante com ruído em grafos aleatórios do tipo Erdos-Rényi. Foram realizadas simulações de Monte Carlo para caracterizar a transição de fase ordem-desordem presente no sistema. Os expoentes críticos estáticos β/ν , γ/ν e $1/\nu$ foram calculados para vários valores de z . Verificou-se que os expoentes críticos satisfizeram a *relação de hiperescala* com dimensionalidade igual à unidade. Existe uma relação entre os expoentes críticos estáticos que é chamada de *relação de hiperescala*, referida logo acima, a saber:

$$\frac{2\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} = d, \quad (1.4)$$

sendo d a dimensão do sistema (STANLEY, 1987). Mais recentemente, (CROKIDAKIS; OLIVEIRA, 2012) estudou o impacto do atenuante local e agente de difusão sobre o comportamento crítico do modelo do votante majoritário. Diversas variantes do modelo do votante majoritário foram e ainda são objeto de estudo de muitas pesquisas em Mecânica Estatística e Computacional, (VILELA; MOREIRA, 2009), (MELO; PEREIRA; MOREIRA, 2010), (LIMA, 2013).

De um modo geral, o modelo do votante trata-se de um modelo estocástico irreversível que simula a dinâmica de opinião de indivíduos em uma sociedade ou população. O principal ingrediente, do modelo, é a hipótese de que qualquer opção de escolha de um indivíduo, em um dado instante de tempo, depende da opção adotada pela maioria dos indivíduos que se relacionam com ele neste mesmo instante. Apesar de sua simplicidade, este modelo exhibe duas fases. Dependendo da dimensão em que o modelo foi inserido, para ruídos abaixo de um valor crítico, espera-se que uma parcela de indivíduos partilhem opiniões semelhantes.

A tese está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 fornecemos o objetivo geral e os objetivos específicos deste trabalho. Em seguida no Capítulo 3 discutimos o comportamento dinâmico crítico de curto tempo, utilizando simulações Monte Carlo. Nas proximidades do ponto crítico, utilizamos o comportamento de escala para o parâmetro de ordem, dado por (ZHENG, 1998). Analisamos dois modelos de dinâmica social, a saber: modelos do votante majoritário (contínuo e discreto) em três dimensões, sendo este capítulo a nossa principal contribuição teórica. No Capítulo 4 apresentamos uma técnica que diferencia e suaviza simultaneamente os dados com ruídos. O método é de fundamental importância na análise dos dados, para obter os parâmetros críticos dos modelos com precisão comparável a outros modelos concorrentes. No capítulo 5 apresentamos os resultados das simulações dos dois modelos abordados nesta tese, bem como as estimativas dos parâmetros críticos estáticos e dinâmico, de cada modelo. No último capítulo são mostradas as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 Objetivo

2.1 Objetivo Geral

Aplicar métodos computacionais intensivos no estudo de modelos de dinâmica social.

2.2 Objetivos específicos

- Investigar os comportamentos críticos dinâmicos dos modelos dos votantes majoritários (contínuo e discreto), na rede cúbica, através de simulações Monte Carlo.
- Obter os expoentes críticos dos modelos generalizados.
- Verificar se há algum consenso, entre as opiniões dos indivíduos, nos modelos generalizados.
- Desenvolver algoritmos e ferramentas computacionais para analisar os resultados obtidos.
- Utilizar ajustes e Estatísticas de testes para obter os melhores expoentes críticos.

3 Dinâmica Crítica de Curto Tempo

Sistemas de partículas interagentes, sob certas circunstâncias, exibem um comportamento que é caracterizado por leis de escala. O termo fenômenos críticos ou simplesmente comportamento crítico é empregado para designar a gama de respostas do sistema na criticalidade — próximo ao ponto crítico onde o sistema se torna invariante por transformações de escala. Além disso, o comportamento crítico é mais ou menos independente de detalhes microscópicos dos sistemas, ou seja, alguns aspectos desse comportamento são *universais*. Isto significa que sistemas de natureza muito distintas podem exibir o mesmo comportamento crítico, conceito conhecido como *universalidade* (STANLEY, 1987).

Atualmente, é bem aceito que leis de escala e universalidade podem ocorrer também para os sistemas longe do equilíbrio. Na verdade, comportamento de escala pode mesmo aparecer em uma fase muito precoce no tempo de evolução, ou seja, o sistema está ainda longe do equilíbrio (STAUFFER, 1992).

Uma teoria para descrever a relaxação de um sistema próximo à criticalidade em tempos curtos foi desenvolvida por Janssen, Schaub e Schmittmann (JANSSEN; SCHAUB; SCHMITTMANN, 1989). Nesta teoria para a relaxação dinâmica de curto tempo, as condições iniciais macroscópicas aparecem na forma da lei de escala (JANSSEN; SCHAUB; SCHMITTMANN, 1989), (HUSE, 1989), e (ZHENG, 1998). No trabalho de Janssen, Schaub e Schmittmann (JANSSEN; SCHAUB; SCHMITTMANN, 1989) os autores demonstraram que muito antes que o regime de equilíbrio seja atingido, isto é, em regime macroscópico de curto tempo, a dinâmica já apresenta comportamento de escala e universalidade. Mais importante ainda, os expoentes críticos envolvidos nessas leis são os mesmos expoentes que seriam medidos em regimes de longo prazo, no equilíbrio ou em um estado estacionário.

A maioria das leis de escala são válidas em sistemas infinitos. No entanto, métodos numéricos, como simulações Monte Carlo, estão restritos a sistemas finitos. É importante compreender como os efeitos de tamanho finito influenciam as propriedades do sistema.

Geralmente, efeitos de tamanho finito são esperados quando o comprimento de correlação espacial se torna semelhante ao tamanho do sistema. Esta é a razão pela qual os efeitos de tamanho finito são particularmente fortes perto do ponto crítico (PRIVMAN, 1990).

Simulações Monte Carlo de dinâmica crítica de curto tempo consistem nas análises das séries temporais de observáveis físicos adequados quando o parâmetro que induz a transição de fases, q , se aproxima de seu valor crítico, q_c (ZHENG, 1998). De acordo com a teoria de Janssen, Schaub e Schmittmann (JANSSEN; SCHAUB; SCHMITTMANN, 1989), nas proximidades do ponto crítico o parâmetro de ordem (SCHEUCHER; SPOHN, 1988) obedece ao seguinte escalonamento

$$M(t, \epsilon) = t^{-\beta/\nu z} \widetilde{\mathcal{M}}(t^{1/\nu z} \epsilon) \quad (3.1)$$

onde $\epsilon = (q - q_c)/q_c$, β e ν são os expoentes críticos estáticos associados ao parâmetro de ordem e à divergência do comprimento de correlação, enquanto que z é o expoente crítico dinâmico e $\widetilde{\mathcal{M}}$ é uma função de escala. Por conveniência, na equação (3.1) assumimos um estado inicial totalmente ordenado. Comportamento de escala também é esperado para outros estados iniciais (ZHENG, 1998).

Podemos investigar o comportamento das curvas produzidas por (3.1) para diferentes valores de ruídos entre $[0, 1/2]$. Após investigar todo espaço de parâmetro de q , os dados que melhor se ajustarem linearmente na escala duplo-logarítmica corresponderá à estimativa do ruído crítico. Simultaneamente encontramos a estimativa do expoente $\beta/\nu z$ e a barra de incerteza. Para as regiões onde $q \neq q_c$ o comportamento da curva é modulado pela função universal $\widetilde{\mathcal{M}}(x)$. A função $M(t, \epsilon)$ é analítica na vizinhança de $\epsilon = 0$.

3.1 Modelo do voto da maioria contínuo na rede cúbica

Uma generalização do modelo do voto da maioria para variáveis contínuas foi introduzida na referência (COSTA; SOUZA, 2005). O modelo considera uma extensão da regra da maioria (OLIVEIRA, 1992) para variáveis dinâmicas contínuas, com as mesmas características da regra para variáveis discretas. Os autores da referência (COSTA; SOUZA, 2005) estudaram o modelo em duas dimensões e encontraram que o comportamento do sistema segue muito próximo daquele exibido por um modelo xy de equilíbrio. No nosso trabalho a dinâmica é a mesma da referência (COSTA; SOUZA, 2005), entretanto, o sistema de variáveis, que é planar, está contido em uma rede cúbica. Diferentemente da referência (COSTA; SOUZA, 2005) em que o sistema de variáveis está contido em uma rede quadrada.

As variáveis dinâmicas do modelo são rotores clássicos planares que designaremos por vetores do \mathfrak{R}^2 , $\vec{S}_i = (S_{x,i}, S_{y,i})$ com $|\vec{S}_i| = 1$, i denota o sítio da rede.

A dinâmica consiste nos seguintes passos

1. a cada passo de tempo, uma direção aleatória em \mathfrak{R}^2 , $\hat{r}(t)$, é selecionada e um sítio i é escolhido;
2. a rede é percorrida e, para cada sítio i , a variável dinâmica $\vec{S}_i(t)$ é projetada sobre $\hat{r}(t)$;
3. A soma dos vetores vizinhos ($\sum_{\delta} \vec{S}_{i+\delta}$) é projetada sobre $\hat{r}(t)$. No caso da rede cúbica, cada indivíduo tem seis vizinhos.
4. Se o sinal de $(\vec{S}_i(t) \cdot \hat{r}(t))$ for igual ao sinal $(\sum_{\delta} \vec{S}_{i+\delta} \cdot \hat{r}(t))$, então a componente $\vec{S}_i(t)$ na direção $\hat{r}(t)$ inverte com probabilidade q .
5. Se o sinal de $\vec{S}_i(t) \cdot \hat{r}(t)$ for diferente do sinal $(\sum_{\delta} \vec{S}_{i+\delta} \cdot \hat{r}(t))$, então a componente $\vec{S}_i(t)$ na direção $\hat{r}(t)$ inverte com probabilidade $1 - q$.

Dito de outra forma, a probabilidade de que a componente de \vec{S} na direção \hat{r} seja invertida é dada por

$$w_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1 - 2q) \mathcal{S}(\vec{S}_i \cdot \hat{r}) \mathcal{S} \left(\left(\sum_{\delta}^z \vec{S}_{i+\delta} \right) \cdot \hat{r} \right) \right\} \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{S}(x)$ é a função sinal, já conhecida da Equação 1.3. O somatório é realizado sobre os primeiros vizinhos do sítio i .

Uma relação do modelo do voto da maioria contínuo com a dinâmica social se dá pelo fato de que a generalização proveio do modelo do voto da maioria discreto. A essência deste último modelo é a decisão do indivíduo. Dada uma problemática, ao indivíduo cabe apenas escolher entre duas decisões contrárias, não cabendo a ele, se quer, ficar indeciso. Como exemplo, podemos citar o indivíduo condenado à morte, cabendo ao júri a decisão do meio utilizado (eletrocutado ou envenenado). Mas, sabemos que situações similares são muito particulares e que na maioria das situações que nos circundam podemos ter infinitas reações, a variar de pessoa para pessoa, ainda que vizinhos mais próximos possam exercer alguma influência sobre nossas atitudes, tudo isso é muito variável (mutável).

O modelo do voto da maioria contínuo (MVMC) do ponto de vista da dinâmica social se assemelha a um sistema anarquista, onde, *a priori*, não são impostas possibilidades de

escolhas, aos cidadãos. No MVMC observaremos se após a interação dos indivíduos com seus vizinhos próximos é possível que uma parcela de indivíduos cheguem ao consenso.

Numa dada componente x as variáveis de interesse para descrever o comportamento coletivo do sistema são as seguintes. A magnetização $M(t)$ da equação (3.1), que descrevivamente nada mais é que a média amostral das opiniões da maioria, é dada por

$$M(t) = \frac{1}{L^3} \sum_i s_{x,i}, \quad (3.3)$$

onde L representa o tamanho da rede.

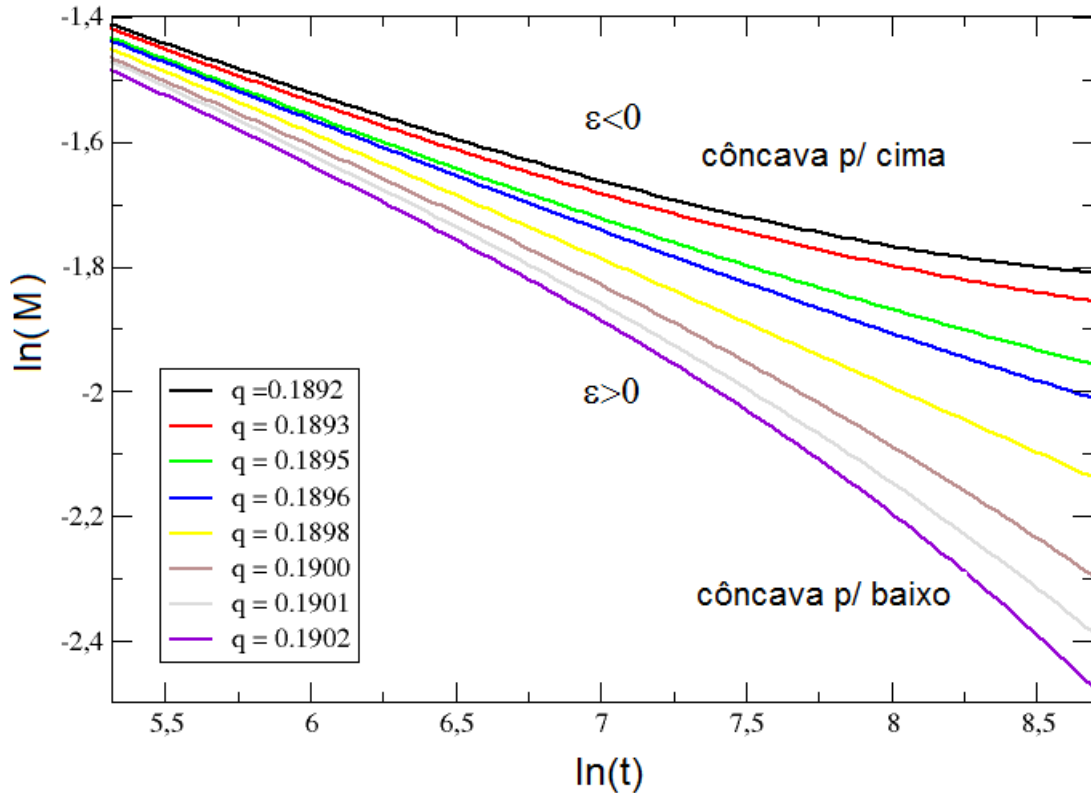


Figura 4: Gráfico suavizado, via regularização Tikhonov, da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, para a rede cúbica de tamanho $L=128$.

A magnetização, exatamente, no ponto crítico q_c , para tempos curtos, tem o comportamento de lei de potência,

$$M(t) \sim t^{-\beta/\nu z}. \quad (3.4)$$

Na Figura 4 podemos observar o comportamento geral da magnetização (3.1), na

escala duplo-logarítmica, em uma rede cúbica de tamanho $L = 128$. Para suavizar as curvas utilizamos a técnica de regularização Tikhonov (LUBANSKY et al., 2006). Ainda nessa Figura, observamos os seguintes comportamentos do logaritmo da magnetização:

- $\ln M(t)$ tende a uma constante, para $\epsilon < 0$,
- $\ln M(t)$ tende para $-\infty$, para $\epsilon > 0$,
- para $\epsilon = 0$, $\ln(M(t))$ se torna proporcional a $\ln(t)$.

Para t fixo, aplicamos o logaritmo natural na equação (3.1), e em seguida a derivada em relação a ϵ em ambos os lados da equação, temos

$$\begin{aligned}\ln M(t, \epsilon) &= \frac{-\beta}{\nu z} \ln(t) + \ln\left(\widetilde{M}(t^{1/\nu z} \epsilon)\right) \\ \frac{\partial \ln M(t, \epsilon)}{\partial \epsilon} &= \mathcal{M}(t^{1/\nu z} \epsilon) t^{1/\nu z},\end{aligned}\tag{3.5}$$

sendo \widetilde{M} e \mathcal{M} funções de escala universal.

Pelo resultado (3.5), inferimos que $\partial \ln M(t, \epsilon)/\partial \epsilon$ apresenta comportamento de lei de potência em $\epsilon = 0$, a saber

$$\left. \frac{\partial \ln M(t, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \sim t^{1/\nu z}.\tag{3.6}$$

Podemos utilizar (3.6), na escala duplo-logarítmica, para estimar a razão $1/\nu z$.

Através da Fig. 4, observamos que as curvas da equação (3.1) para os valores de $\epsilon < 0$ têm côncavas para cima, e para $\epsilon > 0$ são côncavas para baixo. Estes comportamentos das curvas são importantes nos cálculos das derivadas desta equação (3.1) com relação a $\tau = \ln(t)$, como sugere

$$\Psi(\tau, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln(M(t, \epsilon)).\tag{3.7}$$

Resolvendo equação 3.7, temos

$$\ln(M(\tau, \epsilon)) = \frac{-\beta}{\nu z} \tau + \ln(\widetilde{M}(e^{\tau/\nu z} \epsilon))\tag{3.8}$$

Introduzindo a variável de escala $x = e^{\tau/\nu z} \epsilon$ na equação (3.8), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(M(\tau, \epsilon))}{\partial \tau} &= \frac{-\beta}{\nu z} + \frac{1}{\widetilde{M}(x)} \frac{\partial \widetilde{M}(x)}{\partial \tau}, \\
&= \frac{-\beta}{\nu z} + \frac{1}{\widetilde{M}(x)} \frac{\partial \widetilde{M}(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau}, \\
&= \frac{-\beta}{\nu z} + \frac{1}{\widetilde{M}(x)} \frac{\partial \widetilde{M}(x)}{\partial x} x \frac{1}{\nu z}, \\
&= \frac{-\beta}{\nu z} + x \left[\frac{1}{\widetilde{M}(x)} \frac{\partial \widetilde{M}(x)}{\partial x} \frac{1}{\nu z} \right], \\
\Psi(\tau, \epsilon) &= \frac{-\beta}{\nu z} + x \widetilde{\Psi}(x).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

sendo $\widetilde{\Psi}$ uma função de escala.

A Figura 3.1 ilustra o comportamento de $\Psi(\tau, \epsilon)$, à medida que τ cresce. Foram destacados os valores de $\Psi(\tau, \epsilon)$, para instantes fixos e diferentes valores de ruídos, em uma rede cúbica de tamanho $L = 128$. As curvas foram suavizadas, utilizando a técnica de regularização Tikhonov, descrito na Seção 4.1. Para os valores de $\epsilon < 0$ e $\epsilon > 0$, à medida que o ruído q cresce a função $\Psi(\tau, \epsilon)$ diminui. No ponto crítico $\Psi(\tau, \epsilon = 0) = -\beta/\nu z$. Para cada valor de τ obteremos o comportamento da função $\Psi(\tau, \epsilon)$ em função de q . As curvas de $\Psi(\tau, \epsilon)$, em função de q , se interceptam em $(q_c, -\beta/\nu z)$.

A Figura 6 exibe o comportamento das curvas de $\Psi(\tau, \epsilon)$ (3.7) em função do ruído q . Observamos que uma família de curvas, para diferentes τ , se interceptaram no par de coordenadas $(q_c, \beta/\nu z)$. Deste modo, uma estimativa para o ruído crítico é $q_c = 0.189708$ (3). Observando o valor com relação a $\Psi(\tau, \epsilon)$, estimamos o expoente $\beta/\nu z = 0.189522$ (74).

O segundo momento da magnetização, para um dado instante de tempo t , é dada por

$$\chi_0(t) = \frac{1}{L^3} \left(\sum_i s_{x,i} \right)^2. \tag{3.10}$$

A transformada de Fourier da função de correlação entre dois spins, no instante de tempo t , é dada por

$$\chi_k(t) = \frac{1}{L^3} \sum_{i,r} s_{x,i} s_{x,i+r} \exp(ikr), \tag{3.11}$$

sendo $k = 2\pi/L$.

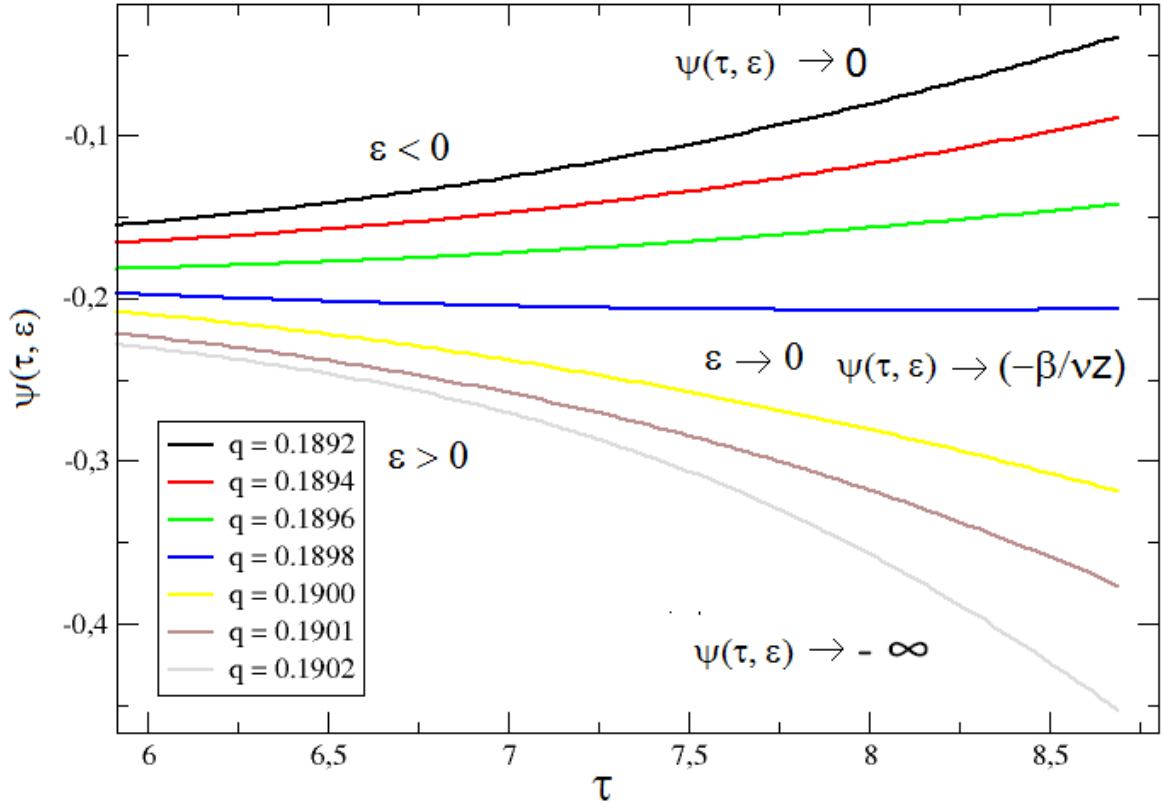


Figura 5: $\Psi(\tau, \epsilon)$ em função de τ , para diversos valores de q , em uma rede cúbica $L = 128$.

A equação (3.11) assintoticamente tem o comportamento

$$\chi_k(t) \sim t^{\gamma/\nu z}, \quad (3.12)$$

ainda, χ_0 é assintoticamente igual a

$$\chi_0 \sim t^{-2\beta/\nu z}. \quad (3.13)$$

Os expoentes $\gamma/\nu z$ e $-2\beta/\nu z$ das equações (3.12) e (3.13), respectivamente, caracterizam a dependência das equações com o instante de tempo do sistema, próximo do ponto crítico. As equações (3.10) e (3.11) nos permitem introduzir a medida do comprimento de correlação, dependente do tempo, através de

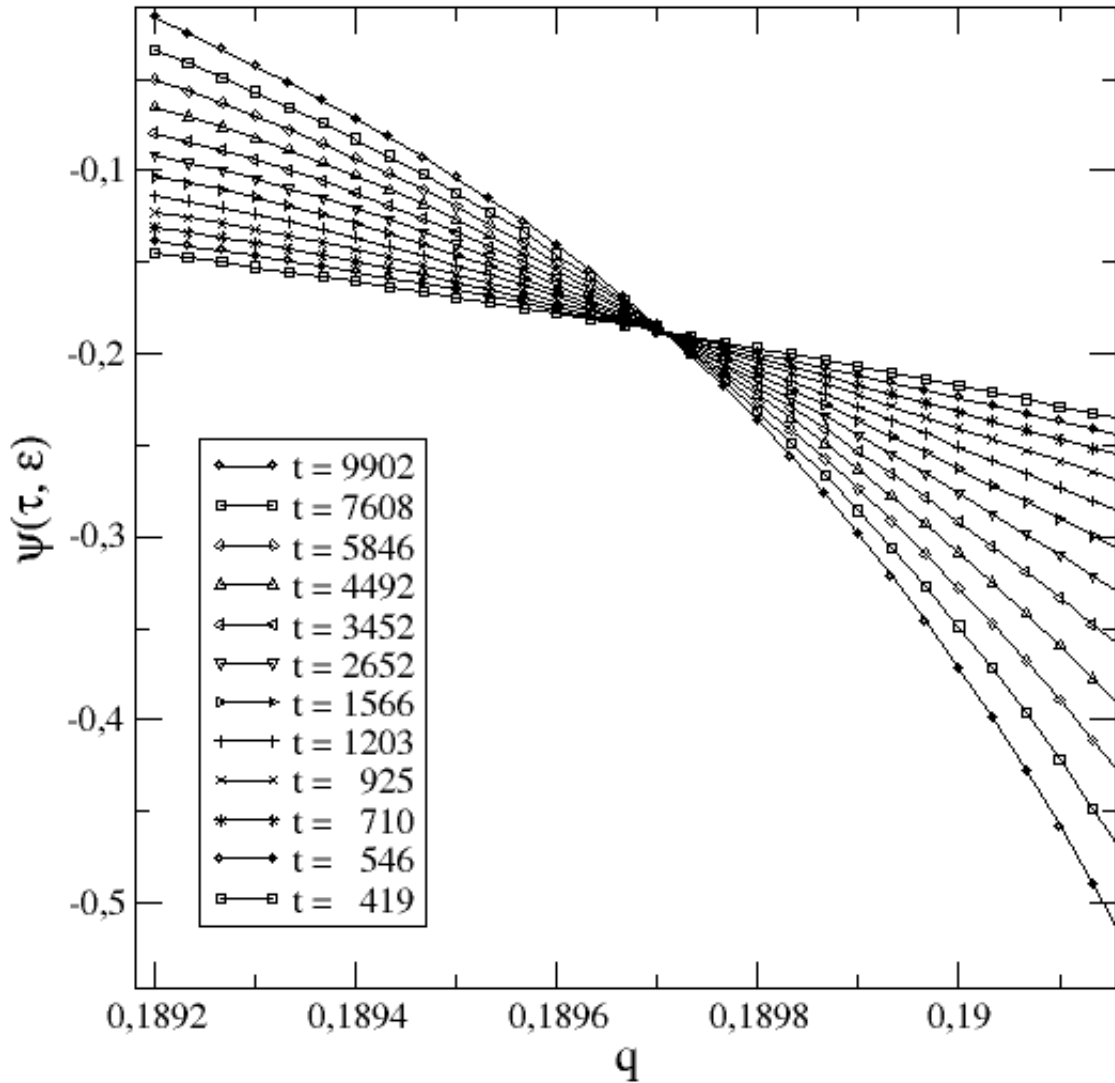


Figura 6: $\Psi(\tau, \epsilon)$, em função de q , em uma rede cúbica $L = 128$. Estimativa do ruído crítico q_c e do expoente $\beta/\nu z$.

$$\xi = \frac{1}{k} \sqrt{\left(\frac{\chi_0}{\chi_k} - 1\right)}. \quad (3.14)$$

Utilizando (3.12), (3.13), e a relação de hiperescala (1.4) na equação (3.14) obtemos o comportamento assintótico do comprimento de correlação em função do tempo, como segue

$$\xi(t) \sim t^{-d/2z}, \quad (3.15)$$

sendo $d = 3$ a dimensão do sistema.

3.1.1 Colapso dos dados

A equação 3.9 pode ser reescrita da seguinte forma

$$x\tilde{\Psi}(x) = \frac{\beta}{\nu z} + \Psi(\tau, \epsilon), \quad (3.16)$$

lembre-se que a variável de escala x é dada por $x = e^{\tau/\nu z} = t^{1/\nu z}$. Ajustando adequadamente o expoente $1/\nu z$ e o ruído crítico q_c os vários valores de $\Psi(t, \epsilon)$ para diferentes t e ϵ deveriam colapsar em uma única curva $x\tilde{\Psi}(x)$, caso não houvesse erros estatísticos associados ao cálculo de $\Psi(t, \epsilon)$.

À sobreposições das curvas, condicionadas a uma mudança adequada de escala, chamamos de colapso dos dados. Por outro lado, a dispersão dos pontos em torno de $x\tilde{\Psi}(x)$ deve ser mínima para os valores corretos do expoente $1/\nu z$ e o ruído crítico q_c .

Esta técnica de colapso dos dados será utilizada também para estimar o expoente $1/\nu z$ e o ruído crítico q_c do modelo do voto da maioria discreto, da Seção 3.2.

3.1.2 Medida de qualidade dos colapsos dos dados

A dificuldade de se introduzir um critério de qualidade para o colapso dos dados deve-se ao fato de não conhecermos a forma funcional da curva $x\tilde{\Psi}(x)$. Não obstante, o lado direito da equação (3.9) fornece uma estimativa para esta função a partir dos dados da simulação. Isto permite definir um critério de qualidade para o colapso dos dados mesmo não se conhecendo a forma funcional da função de escala. Abaixo vamos descrever um método, proposto na referência (BHATTACHARJEE; SENO, 2001), capaz de determinar a função de escala a partir dos dados da simulação. O processo baseia-se numa estatística que atinge seu mínimo quando os melhores valores dos parâmetros críticos são usados para definir as variáveis de escala.

Para sermos específicos, considere as curvas mostradas na figura 6. Cada curva corresponde a um dos N valores de t . Suponha $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ e os K valores do ruído $q \in \{q_1, q_2, \dots, q_K\}$. No plano $x \times x\tilde{\Psi}(x)$, das variáveis re-escaladas, as abcissas são da forma $x_{ij} = t_i^{1/\nu z} (q_j - q_c)/q_c$, que corresponde a um mapa $x_{ij} = x(\tau_i, \epsilon_j)$. No caso de um colapso perfeito, qualquer um dos N conjuntos de K pontos, pode ser utilizado para representar $x\tilde{\Psi}(x)$, da equação (3.16).

Suponha que escolhamos o conjunto de pontos associados à curva correspondente ao instante de tempo $t = t_p$, ou seja, de abcissas $x_{pj} = x(\tau_p, \epsilon_j)$ no plano de variáveis reescaladas. Neste último plano, um ponto da representação de $x\tilde{\Psi}(x)$, oriunda do conjunto p , será denotado por $(x_{p,j}, I_p)$. Uma medida da qualidade de colapso dos dados é dada por (BHATTACHARJEE; SENO, 2001)

$$\hat{e}(1/\nu z, q_c) = \frac{1}{\eta} \sum_p \sum_{i \neq p} \sum_{j, \text{sobre}} |\Psi(t_i, \epsilon_j) - I_p(x_{ij})|. \quad (3.17)$$

Nesta expressão a soma mais interna sobre j (denotada j, sobre) corre apenas sobre os pontos x_{ij} que satisfazem a relação $x_{pk} \leq x_{ij} \leq x_{p,k+1}$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ e os demais pontos são desprezados. O somatório intermediário acumula a contribuição das diversas curvas (diferentes t_i) para a discrepância. Por fim, o somatório mais externo deve-se ao fato que qualquer um dos N conjuntos de pontos pode ser escolhido para representar a função de escala. Note que a medida de qualidade 3.17 é normalizada pelo número total de termos envolvendo os três somatórios, η . E este depende dos valores arbitrados para os parâmetros críticos, a saber, $1/\nu z$ e q_c .

Há ainda uma dificuldade prática com a estimativa 3.17. Dificilmente as abcissas x_{ij} associadas ao conjunto de pontos da i -ésima curva irão coincidir com as abcissas oriundas do conjunto de pontos oriundos da p -ésima curva. Portanto, $I_p(x_{ij})$ é estimado por algum método de interpolação. Nas nossas aplicações, dada a alta densidade de pontos contidos nas curvas, realizamos uma interpolação linear simples.

Na Figura 7, o conjunto de pontos p está representado pelos pontos pretos. Na referida ilustração, o intervalo comum a todos os conjuntos de dados, com relação a x , está representado pelo intervalo em vermelho.

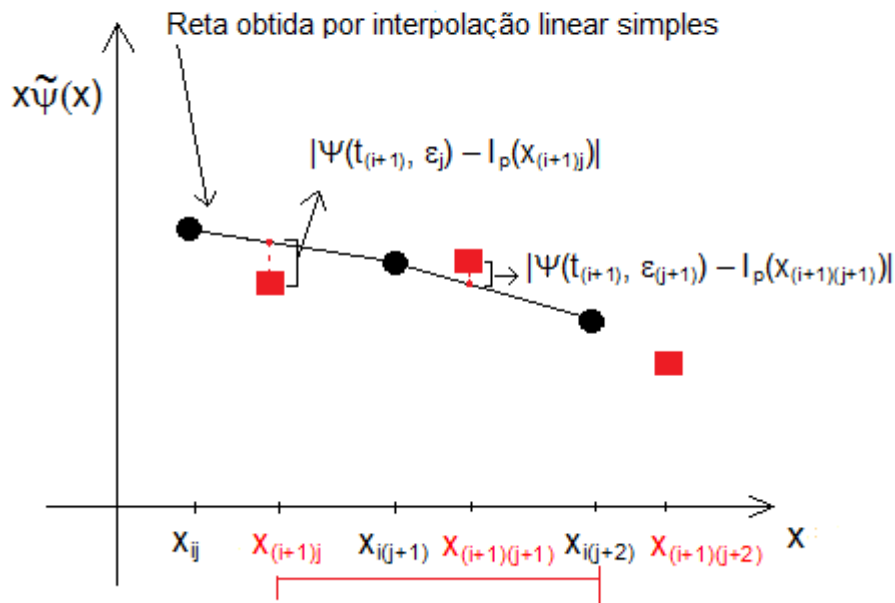


Figura 7: Estimativas das qualidades dos dados colapsados.

3.2 Modelo do votante majoritário discreto na rede cúbica

O modelo do votante majoritário (MVM) com ruído, é um modelo estocástico de não equilíbrio (OLIVEIRA, 1992). A regra de evolução dinâmica do modelo é local e possui simetria de inversão. As propriedades críticas do MVM, em redes regulares bidimensionais, foram obtidas em diversos estudos (SANTOS; TEIXEIRA, 1995), (MENDES; SANTOS, 1997), (CHAVES; SANTOS, 1999). Os expoentes críticos do MVM são os mesmos que governam a transição de fases do modelo de Ising (de equilíbrio) bidimensional (OLIVEIRA; MENDES; SANTOS, 1993), (SANTOS; TEIXEIRA, 1995), (MENDES; SANTOS, 1997), (TOMÉ; OLIVEIRA, 1998), (TOMÉ; OLIVEIRA, 2001), (LIMA, 2012), (ACUÑA-LARA; SASTRE; VARGAS-ARRIOLA, 2014).

Estudos sobre as propriedades críticas do MVM foram feitos na referência (YANG; KIM; KWAK, 2008). Os autores realizaram simulações Monte Carlo em redes regulares hipercúbicas de dimensões dois a sete, e obtiveram os expoentes críticos do modelo. Em redes quadradas, os valores dos expoentes críticos do MVM concordavam com o do Ising

(de equilíbrio). Entretanto, em redes cúbicas, as estimativas dos expoentes críticos do modelo estudado diferiram muito com os do modelo Ising (de equilíbrio). Ainda, os valores de β e γ do MVM para a rede de dimensão quatro e cinco não são iguais aos do campo médio.

Como no artigo (YANG; KIM; KWAK, 2008) os valores dos expoentes críticos, em uma rede cúbica, discordaram com os valores do modelo Ising (de equilíbrio), então estes resultados precisam de maiores investigações.

O trabalho (ACUÑA-LARA; SASTRE, 2012) investigou os fenômenos críticos do MVM, em uma rede cúbica, usando simulações Monte Carlo. Esta última referência, utilizando teoria de escala de tamanho finito e correção de escala, obteve os expoentes críticos do MVM com maior precisão do que os expoentes do trabalho (YANG; KIM; KWAK, 2008). Nas investigações da referência (ACUÑA-LARA; SASTRE, 2012) os expoentes críticos do MVM obtidos estão em concordância com os do modelo Ising (de equilíbrio).

As duas últimas referências discordam quanto a classe de universalidade do MVM, em uma rede cúbica, como vimos acima. Deste modo, o nosso objetivo é investigar a classe de universalidade do MVMD, em uma rede cúbica, utilizando o método de simulação Monte Carlo de tempos curtos.

O modelo do votante majoritário, na rede cúbica é definido como segue. Consideremos uma rede cúbica de tamanho $L \times L \times L$, com condições de contorno periódicas, como uma forma simplificada dos indivíduos se relacionarem. Cada agente i , na população, pode assumir uma das duas possíveis opiniões $\sigma_i = \pm 1$, significando ser a favor (+1), ou contra (-1), a uma determinada matéria. Como um resultado da interação entre os agentes, estes mudam de opinião de acordo com a regra do votante majoritário (OLIVEIRA, 1992). Em cada tempo (discreto) um agente i é escolhido aleatoriamente e adota o sinal da maioria dos seus vizinhos com probabilidade p , e o sinal da minoria com probabilidade $q = 1 - p$. De outra forma, a taxa de inversão w de um agente i mudar de opinião σ_i é dada

$$w(\sigma_i) = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2q)\sigma_i \mathcal{S} \left(\sum_{\delta=1}^6 \sigma_{i+\delta} \right) \right], \quad (3.18)$$

sendo \mathcal{S} a função sinal. A soma é executada sobre os vizinhos mais próximos de σ_i . Em $t = 0$ todos os agentes i têm a mesma opinião $\sigma_i = 1$. Em seguida, o sistema é libertado e evolui segundo a dinâmica 3.18.

As grandezas de interesse para descrever o comportamento coletivo do sistema são as mesmas utilizadas no modelo anterior. Não obstante, vamos reescrevê-las aqui enfatizando

a natureza discreta das variáveis para referências futuras. A componente de magnetização é dada por

$$M(t) = \frac{1}{L^3} \sum_i \sigma_i, \quad (3.19)$$

L representa o tamanho da rede.

A magnetização, exatamente, no ponto crítico q_c , para tempos curtos, tem o comportamento de lei de potência,

$$M(t) \sim t^{-\beta/\nu z}. \quad (3.20)$$

O segundo momento da magnetização, para um dado instante de tempo t , é dada por

$$\chi_0(t) = \frac{1}{L^3} \left(\sum_i \sigma_i \right)^2. \quad (3.21)$$

A transformada de Fourier da função de correlação, no mesmo instante de tempo t , é dada por

$$\chi_k(t) = \frac{1}{L^3} \sum_{i,x} \sigma_i \sigma_{i+x} \cos(kx), \quad (3.22)$$

sendo $k = 2\pi/L$.

A equação (3.22) assintoticamente tem o comportamento proporcional a

$$\chi_k(t) \sim t^{\gamma/\nu z}, \quad (3.23)$$

ainda, χ_0 é assintoticamente igual

$$\chi_0 \sim t^{-2\beta/\nu z}. \quad (3.24)$$

As equações (3.21) e (3.22) nos permitem introduzir a medida do comprimento de correlação, dependente do tempo, através de

$$\xi = \frac{1}{k} \sqrt{\left(\frac{\chi_0}{\chi_k} - 1 \right)}. \quad (3.25)$$

O comprimento de correlação em função do tempo, assintoticamente, tem o comportamento

$$\xi(t) \sim t^{-d/2z}, \quad (3.26)$$

sendo $d = 3$ a dimensionalidade do sistema.

4 Método

4.1 Diferenciação e suavização de dados com ruídos

Nesta seção apresentaremos uma técnica de suavização de curvas em dados com ruídos, pois a mesma foi utilizada para suavizar os dados da magnetização em função do tempo, e sua derivada, para diferentes valores dos parâmetros de controle. Uma observação faz-se necessária, pois, muitas vezes durante o texto, também nos referiremos ao parâmetro de controle como sendo ruído e este pertence ao modelo dinâmico e exerce sobre o modelo o papel de perturbar o sistema, diferentemente dos ruídos advindos da aleatoriedade em que são geradas as amostras.

O método que abordaremos nessa Seção é de fundamental importância pois dada escolhas adequadas de parâmetros, a técnica empregada garante um bom equilíbrio entre manter as essenciais características dos dados e a amplificação do ruído sob controle. A fidelidade do ajuste aos dados originais é controlado por um parâmetro de regularização.

Diferenciações numéricas são amplamente utilizadas, como exemplos práticos podemos citar curvas de crescimentos das aves aplicados ao melhoramento genético animal (QUEIROZII, 2009), estimativas de parâmetros genéticos de caprinos e ovinos (LÔBO, 2008), estimação dos parâmetros de crescimento e mortalidade de machos e fêmeas (GOMIERO; CARMASSI; BRAGA, 2007), estimação de parâmetros genéticos em bovinos de corte (FREITAS, 2000).

Problema de diferenciação numérica pode ser abordado através de métodos de regularização, como por exemplo o método de regularização de Tikhonov (LUBANSKY et al., 2006), (CHENG; YAMAMOTO, 2000), (GOLUB; HANSEN; O'LEARY, 1999), (ENGL, 1987). Regularização é o procedimento de transformação de um problema matematicamente mal-posto ou mal-comportado, pela incorporação de restrições que dependem da natureza do problema. No nosso contexto, a regularização ora é utilizada onde aparece termos derivativos, ora como uma técnica de suavização dos dados, e ainda como um método

interpolador.

Este procedimento converge para um problema de otimização que deve minimizar uma função objetivo que apresenta dois termos básicos: um expressando o erro de aproximação e o outro o nível de distanciamento da condição de suavidade. A regularização de Tikhonov é uma combinação linear desses dois termos.

Um dos motivos em utilizar a regularização é que o problema da diferenciação de dados é convertido em solucionar uma equação integral do primeiro tipo. A equação integral fornece os valores da segunda derivada, que *a priori* não precisam ser uniformemente distribuídos. A técnica, uma vez aplicada, transforma os dados em uniformemente espaçados. Deste modo, esta técnica pode ser aplicada nos dados antes de efetuar os testes paramétricos, que exigem a normalidade dos dados.

Uma vantagem dessa abordagem é que ela não impõe suposições arbitrárias sobre a forma funcional dos dados. Outra vantagem é que existem muitos métodos bem testados para resolver as equações integrais do primeiro tipo.

4.1.1 Equações governantes

Supõe-se que os dados experimentais estão na forma (X, Y) e são dispostos em ordem crescente em X , com duas colunas conhecidas:

$$\mathbf{y}^M = (y_1^M, y_2^M, \dots, y_{N_D}^M)$$

e

$$\mathbf{x}^M = (x_1^M, x_2^M, \dots, x_{N_D}^M).$$

Não é necessário que x^M seja uniformemente espaçado. Sendo N_D o número de pontos do conjunto de dados, e o sobrescrito M indica que estas são quantidades medidas experimentalmente.

Por conveniência, a primeira e a segunda derivadas serão denotadas por $r(x) = dy(x)/dx$ e $f(x) = d^2y(x)/dx^2$, respectivamente. O valor de $y(x)$ está relacionado com estas derivadas pelas relações exatas

$$y^C(x) = \int_{x'=x_0}^x r(x')dx' + y_0 \quad (4.1)$$

e

$$y^C(x) = \int_{x'=x_0}^x (x - x')f(x')dx' + y_0 + (x - x_0)r_0 \quad (4.2)$$

onde x_0 é um ponto de referência arbitrário, em que consideramos como sendo x_1^M . O sobrescrito C é usado para distinguir o y obtido computacionalmente do medido experimentalmente.

As equações 4.1 e 4.2 são expansões em série de Taylor, de um termo e dois termos, em torno de x_0 e de $y(x_0)$, respectivamente. Elas devem ser resolvidas para as funções desconhecidas de $r(x)$ e $f(x)$, juntamente com as constantes desconhecidos $r(x_0) = r_0$ e $y(x_0) = y_0$. Equações integrais do primeiro tipo têm as formas 4.1 e 4.2. Para resolver as equações 4.1 e 4.2 para $f(x)$. No artigo de (LUBANSKY et al., 2006) foi desenvolvido um esquema numérico, com base na regularização de Tikhonov, o qual é então integrado para obter a função desconhecida $y(x)$.

4.1.2 Equação discretizada

Os dados medidos \mathbf{x}^M não precisam ser uniformemente distribuídos, e mais, após aplicada a técnica os dados serão uniformemente espaçados e posteriormente poderá ser utilizado por outro método que exija a uniformidade.

Vejamos o procedimento:

1. No intervalo de comprimento $x_{N_D}^M - x_1^M$ é inserido N_K pontos uniformemente espaçados de comprimento $\Delta = (x_{N_D}^M - x_1^M)/(N_k - 1)$.
2. O primeiro ponto computado é igual ao primeiro ponto dos dados originais $x_1^C = x_1^M$.
3. O segundo ponto computado é $x_2^C = x_1^M + \Delta$.
4. O terceiro ponto computado é $x_3^C = x_1^M + 2\Delta$.
5. Iterativamente, o $x_{N_k}^C = x_1^M + (N_k - 1)\Delta = x_{N_D}^M$

O valor desconhecido da segunda derivada $f(x)$ em cada ponto de x^C será denotado pelo vetor coluna $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_3, \dots, f_{N_k})$.

Aplicando a regra dos Trapézios composta em 4.2, temos

$$y^C(x) = \Delta \left[((x - x'_0)f(x'_0) + (x - x'_{N_k})f(x'_{N_k}))/2 + \sum_{j=1}^{N_k-1} (x - x'_j)f(x'_j) \right] + y_0^M + (x - x'_0)r_0 \quad (4.3)$$

desde que os coeficientes numéricos da Eq. 4.3 sejam maiores que zero, e estes serão utilizados como uma matriz B' , na regularização de Tikhonov.

A forma discretizada da equação 4.2 é

$$y_i^C = \sum_{j=i}^{N_k} \mathbf{B}_{ij} f_j + y_0 + (x_i^M - x_0) r_0, \quad (4.4)$$

para $i = 1, 2, \dots, N_D$. Em notação matricial

$$\mathbf{y}^C = \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{1}y_0 + (\mathbf{x}^M - \mathbf{1}x_0)r_0 \quad (4.5)$$

em que \mathbf{B} é uma matriz $N_D \times N_k$ de coeficientes numéricos decorrente da equação (4.3), o método utilizado no nosso trabalho foi o método do Trapezóide, entretanto poderia ser qualquer outra regra de quadratura numérica. O vetor $\mathbf{1}$ é um vetor coluna com cada elemento igual a 1.

As incógnitas $f_1, f_2, \dots, f_{N_k}, y_0$ e r_0 , da Equação 4.2, são estimadas de modo a minimizar:

1. A soma dos quadrados dos desvios S_1 de $y^C(x_i^M)$ a partir de y_i^M , para $i = 1$ até N_D .
2. A soma dos quadrados S_2 da $d^2 f(x)/dx^2$ nos pontos de discretização interior x_j^C , $j = 2, 3, \dots, N_k - 1$.

A condição (1) garante que $y^C(x)$ se aproxima $y^M(x)$ e a condição (2) assegura que $f(x)$ não apresenta variações falsas.

4.1.3 Regularização Tikhonov

Na regularização Tikhonov, em vez de minimizar as condições (1) e (2) separadamente, uma combinação linear $R = S_1 + \lambda S_2$ é minimizada, sendo λ o parâmetro de regularização que pondera estas duas exigências. Um grande valor de λ favorece a condição de suavidade, enquanto que um pequeno λ favorece a aproximação com os dados reais. A escolha apropriada de λ depende de N_D e N_K e também do nível de ruído nos dados.

Para qualquer λ , as incógnitas de $f_1, f_2, \dots, f_{N_k}, y_0,$ e r_0 que minimizam R são dadas por

$$\mathbf{f}' = \left(\mathbf{B}'^\top \mathbf{B}' + \frac{\lambda}{\Delta^4} \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{\beta} \right)^{-1} \mathbf{B}'^\top \mathbf{y}^M. \quad (4.6)$$

Por conveniência $\mathbf{f}' = (f_1, f_2, \dots, f_{N_k}, y_0, r_0)$ é usado para denotar todas as incógnitas e \mathbf{B}' é a matriz \mathbf{B} com os vetores coluna $\mathbf{1}$ e $\mathbf{x}^M - \mathbf{1}x_0$ adicionado a ele para refletir a incorporação y_0 e r_0 em \mathbf{f} , e

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

é a matriz tridiagonal decorrente de aproximação das segundas derivadas $d^2 f(x)/dx^2$. As duas colunas de 0 na equação 4.7 são decorrentes da incorporação de y_0 e r_0 , em 4.6. Podemos escrever y^C em termos de f' e \mathbf{B}' , como segue

$$\mathbf{y}^C = \mathbf{B}' f', \quad (4.8)$$

a matriz \mathbf{B}' pode ser obtida utilizando a equação(4.2). Os valores computados \mathbf{y}^C serão utilizados na técnica de validação cruzada generalizada (GCV). A matriz \mathbf{B}' , também, é utilizada para obter a matriz de influência, com os valores variados e covariados dos ajustes. A equação (4.6) é a equação algébrica linear que converte os dados experimentais \mathbf{y}^M na segunda derivada de $f(x)$ descrito por \mathbf{f} .

4.1.4 Validação cruzada generalizada

A validação cruzada generalizada (GCV) é uma técnica que primeiramente particiona o conjunto de dados em subconjuntos mutuamente exclusivos, e em seguida usa-se alguns desses subconjuntos (dados de treinamento) para estimar o parâmetro de regularização λ . O restante dos subconjuntos, os dados de testes, são utilizados para validar o modelo.

O método de avaliação utilizado nesse trabalho foi “leave-one-out”, comumente chamado de (deixando-um-fora), em que a idéia é: o conjunto de treinamento original é dividido em k subconjuntos, em que k é igual ao número de dados pertencentes ao conjunto de treinamento. Destes k subconjuntos, um subconjunto é retirado na validação do λ , e os $k - 1$ subconjuntos restantes são utilizados no treinamento. O processo de validação cruzada é, então, repetido k vezes, de modo que cada um dos k subconjuntos sejam utilizados exatamente uma vez como dado de teste para um dado λ , a Fig 8 mostra o funcionamento deste método dividido em quatro subconjuntos.

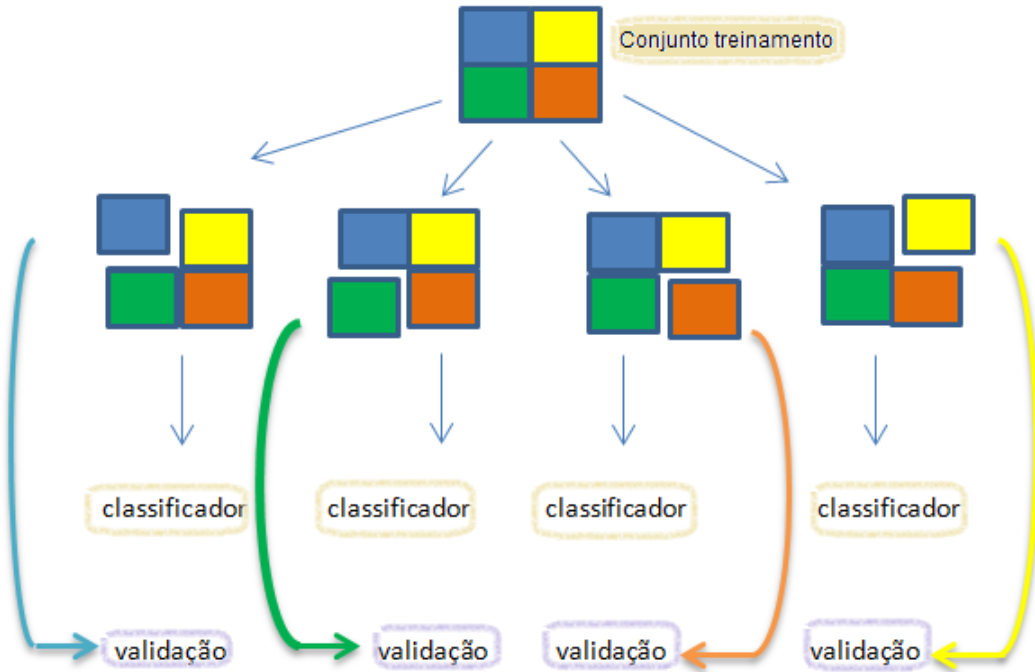


Figura 8: Funcionamento do método de validação cruzada para 4 subconjuntos, utilizando o método “leave-one-out”

A soma dos quadrados da diferença entre o valor previsto e o valor real, determinado de $V(\lambda)$, para cada um dos pontos de dados que foi descartado depende claramente de λ . O principal objetivo é estimar o nível de ajuste de um modelo para um determinado conjunto de dados de teste independente daqueles usados para treinar o modelo. Na implementação do GCV utilizando o princípio “deixando-um-fora”, $V(\lambda)$ é dado por

$$V(\lambda) = \frac{(\mathbf{y}^M - \mathbf{y}^C)^\top (\mathbf{y}^M - \mathbf{y}^C) / N_D}{(1 - \text{Tr}[\mathbf{A}] / N_D)^2} \quad (4.9)$$

$\text{Tr}[\mathbf{A}]$ indica o traço da matriz quadrada \mathbf{A} , definida logo a seguir na equação (4.10). O traço de uma matriz quadrada é a função matricial que associa a matriz à soma dos elementos da sua diagonal principal. Na diagonal das matrizes temos as variâncias (que na regularização foi penalizada pela constante $\frac{\lambda}{\Delta^4}$). Por isso, o traço da matriz A é conhecida como a matriz de influência. A matriz \mathbf{A} é definida por

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}' \left(\mathbf{B}'^\top \mathbf{B}' + \frac{\lambda}{\Delta^4} \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{\beta} \right)^{-1} (\mathbf{B}')^\top. \quad (4.10)$$

Equações (4.6) e (4.8), juntamente com a definição de \mathbf{B}' e $\boldsymbol{\beta}$ permitem que $V(\lambda)$ seja obtida em função λ/Δ^4 , para um determinado conjunto de dados.

5 Resultados

5.1 Resultados do modelo do votante majoritário contínuo em três dimensões

O modelo do votante majoritário contínuo foi estudado dentro de um procedimento de dinâmica de tempos curtos, fora do equilíbrio. Nas proximidades do ponto crítico o comportamento dinâmico é caracterizado por leis de potência, conforme (3.1), (3.4), (3.6) e (3.9). Nossas análises exploram este conjunto de leis de escala para estimar os parâmetros críticos do modelo.

As simulações Monte Carlo foram realizadas em redes cúbicas com condições de contorno periódicas. Partimos de um estado inicial completamente ordenado no qual fazemos $\vec{S}_i = (1, 0)$ para todo sítio i da rede. Em seguida, o sistema evolui segundo a regra da maioria dada pela equação (3.2). Durante a evolução dinâmica do sistema calculamos as grandezas de interesse em função do tempo. O procedimento é repetido diversas vezes para tomarmos médias sobre as diversas realizações.

Simulamos redes de tamanhos $L = 32$, $L = 64$ e $L = 128$ para investigar possíveis efeitos de tamanho finito. Na rede de tamanho $L = 32$ realizamos 8 blocos de 65.536 amostras de 400 Monte Carlo Step (MCS) de comprimento. Para $L = 64$ foram também realizados um conjunto de 8 blocos de simulações (2000 MCS) contendo 16.384 realizações, cada. Para nossa maior rede ($L = 128$) o comprimento da série temporal foi de 10000 MCS e realizamos 6 blocos simulações com 1.024 amostras, cada.

De cada bloco foram calculadas estimativas médias para a magnetização $M_x(t)$, para o segundo momento da magnetização $\chi_0(t)$, transformada de Fourier da função de correlação $\chi_k(t)$, e do comprimento de correlação $\xi(t)$. No conjunto de dados resultantes, aplicamos a técnica de reamostragem Jackknife (JONES, 1974) para eliminarmos eventuais efeitos discrepantes e outras distorções estatísticas, presentes nos dados. Esta técnica também fornece estimativas dos valores médios e respectivas incertezas estatísticas das grandezas.

A diferenciação numérica das grandezas pertinentes foram calculadas através do método de regularização de Tikhonov. Um subproduto deste procedimento é a suavização da curva dos dados. Regressões lineares foram realizadas utilizando-se o software estatístico R-edite (R Core Team, 2013).

5.1.1 Comportamento da magnetização

Mostraremos o comportamento do parâmetro de ordem do sistema em função do tempo, em redes cúbicas de tamanhos $L = 128$, $L = 64$ e $L = 32$. Os valores dos ruídos estudados, para todas as redes, foram 0,1892; 0,1893; 0,1894; 0,1895; 0,1896; 0,1898; 0,1899; 0,1900; 0,1901 e 0,1902.

A Figura 9 mostra o comportamento da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, para vários valores do ruído, em uma rede cúbica, $L = 128$. Nesta figura, observamos que a partir de $\ln(t) = 6,5(665)$ MCS as curvas para os valores de ruído $q = 0,1892$ e $q = 0,1893$, por exemplo, são côncavas para cima. Enquanto que as curvas para os valores do ruído 0,1900; 0,1901 e 0,1902 são côncavas para baixo. Para $q = 0,1895$; 0,1896 e 0,1898 as curvas apresentam um comportamento mais ou menos linear. Ainda desta Figura, inferimos que os valores do ruído crítico está nas proximidades de $q = 0,1895$; $q = 0,1896$ e $q = 0,1898$, pois os pontos parecem estar sobre linhas retas.

Na Figura 10 o comportamento da magnetização é mostrado em escala duplo-logarítmica em uma rede cúbica de tamanho $L = 64$. O comportamento global da magnetização observado nesta figura ($L = 64$) é semelhante ao visto na figura anterior ($L = 128$). Porém, os decaimentos das curvas para uma rede de tamanho menor são menos acentuados do que os obtidos para uma rede maior. Este fato é importante pois tal comportamento se reflete nas derivadas desses conjuntos de dados, da equação (3.7), aumentando a resolução na criticalidade.

Por exemplo, na Figura 11 o comportamento da magnetização para uma rede cúbica de tamanho $L = 32$ é mostrado para alguns valores de q coincidentes com os valores de ruídos da figura anterior. Podemos observar que, na escala da figura, o comportamento da magnetização é praticamente linear para esses valores de q .

Quanto maior a rede maior a resolução das curvas próximo ao ponto crítico. Verificamos que os dados para uma rede de tamanho $L = 128$ mostrou-se suficiente para os nossos propósitos. Por uma questão técnica L deve ser uma potência de 2, nesse caso o próximo tamanho que poderíamos simular seria $L = 256$. Para simular este tamanho precisaríamos

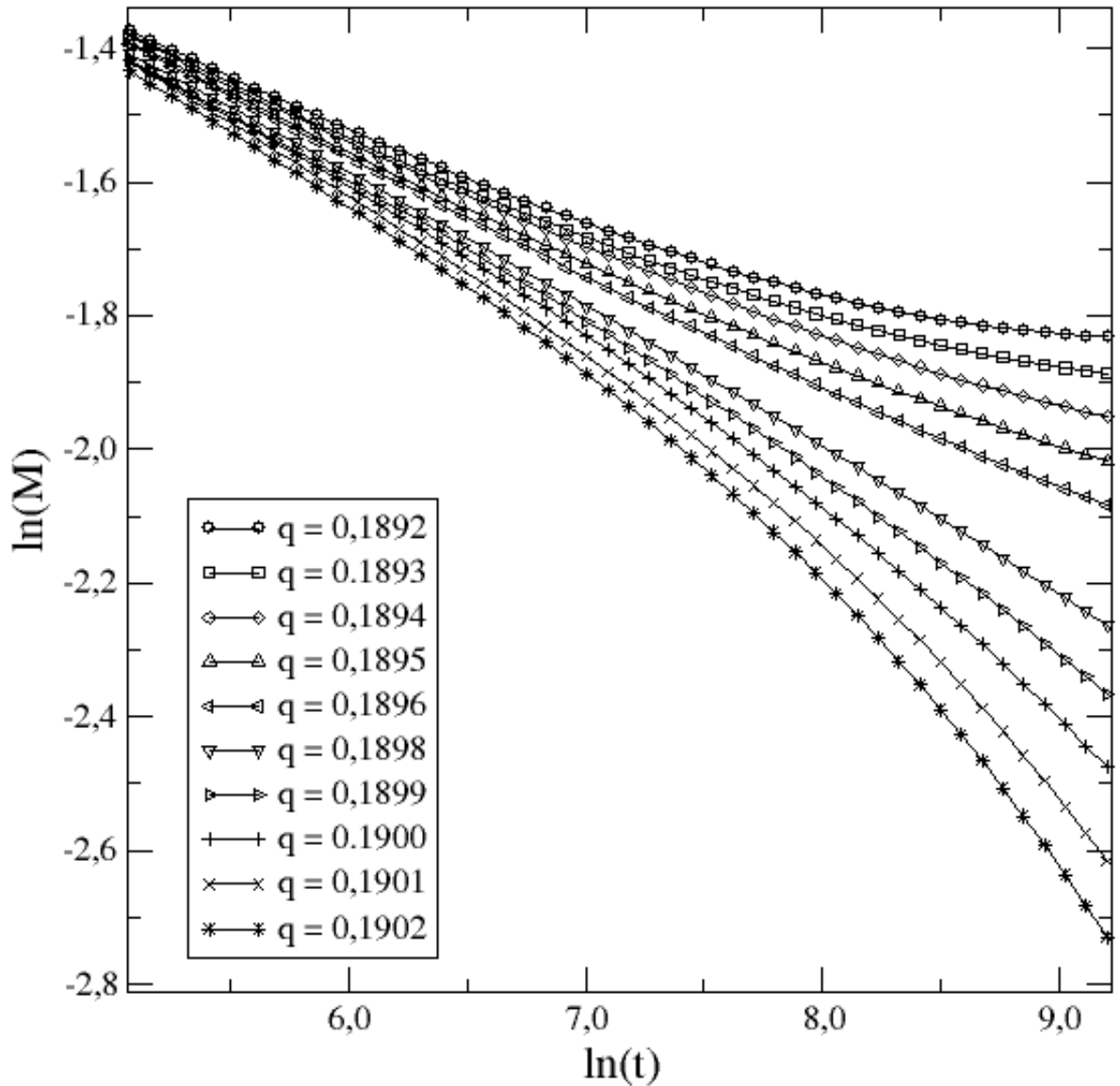


Figura 9: Gráfico suavizado (utilizando regularização Tikhonov) da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, para diferentes valores do ruído, para $L = 128$.

utilizar 8 vezes mais recursos computacionais ou 8 vezes o intervalo de tempo gasto para simular a rede de tamanho $L = 128$. Na rede $L = 128$ o tempo gasto na simulação para cada valor de ruído foi de 8 horas.

Um dos motivos das simulações exploratórias realizadas nas redes de tamanhos $L = 32$ e $L = 64$ foi determinar a região crítica. Com dito antes, os valores de ruídos $q = 0,1895$; $q = 0,1896$ e $q = 0,1898$ são candidatos a serem uma estimativa do valor crítico do

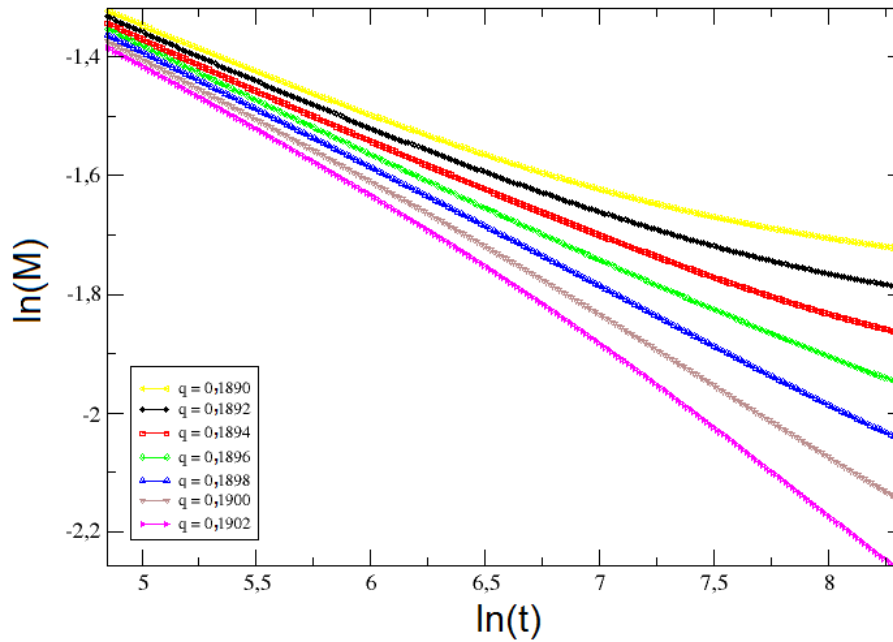


Figura 10: Gráfico da magnetização M em função do tempo t , na escala duplo-logarítmica, para diversos valores de q , com a rede cúbica de tamanho $L = 64$.

ruído. Para $q = q_c$ é esperado um comportamento linear do logaritmo da magnetização em função do logaritmo do tempo. Por tanto, utilizaremos regressão linear para investigar o comportamento das curvas para estes três valores de ruídos.

Na Figura 12 a evolução temporal da magnetização é mostrada na escala duplo-logarítmica, para os três valores de ruído da investigação acima. A propósito, não necessariamente o ruído crítico q_c será um desses três candidatos, mas algum valor próximo a eles. Podemos observar, na Figura 12, que o comportamentos das curvas para $q = 0,1896$ e $q = 0,1898$ são suavemente lineares. Indicando que estas curvas estão na região crítica. Para $q = 0,1895$ o comportamento da curva é levemente côncava para cima.

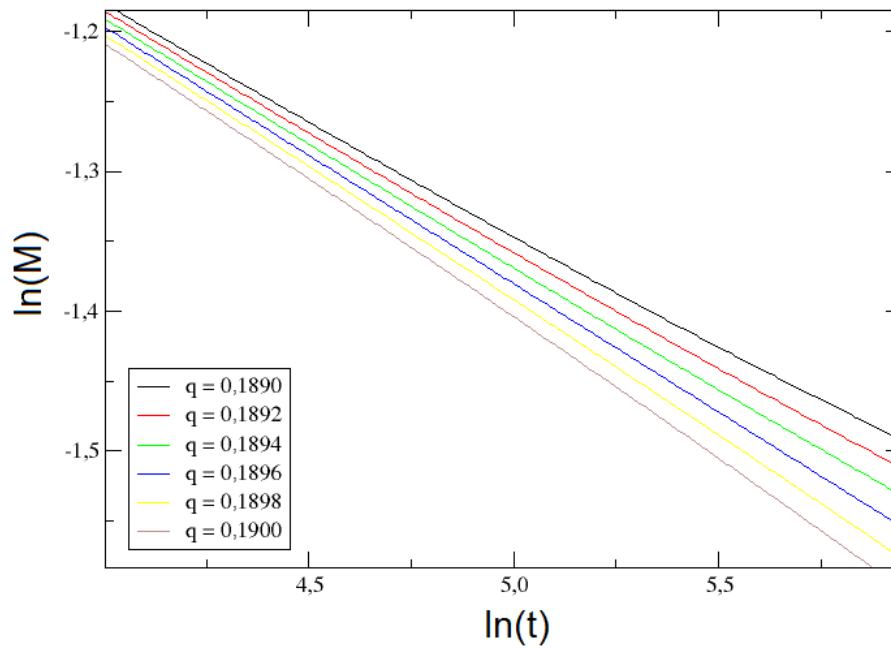


Figura 11: Evolução temporal da magnetização, na escala duplo-logarítmica, para diversos valores de q , em uma rede cúbica de tamanho $L = 32$.

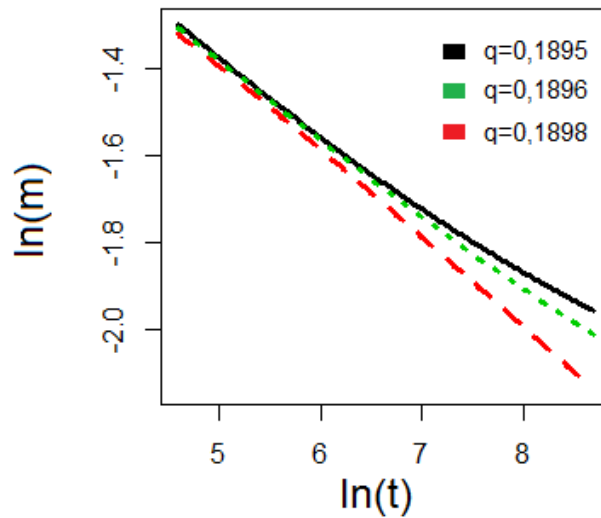


Figura 12: Gráfico da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, próximos de q_c , para ($L = 128$).

O procedimento padrão para encontrar o valor do ruído crítico q_c é ajustarmos linearmente estas curvas, e observarmos qual se adequa melhor ao ajuste, dadas as estatísticas.

Fizemos os ajustes usando o software XMGRACE (TURNER, 2005). A Figura 13 mostra os ajustes lineares para os dados dos três valores de q investigados, constando 68 observações cada. Os valores dos coeficientes angulares $-\beta/\nu z$ estimados pelo ajuste para $q = 0,1895$ foi 0,162, para $q = 0,1896$ obtivemos 0,184, e por fim $q = 0,1898$ com 0,201, todos com o erro padrão abaixo de 1%.

Para indicar o ruído q que obteve o melhor ajuste linear, observemos os valores da soma dos quadrados dos resíduos SQR . Entendemos que quanto menor for a diferença da (SQR), maior poder explicativo detém o modelo. Assim, tivemos para cada q a SQR como segue: para ($q = 0,1895, SQR = 0,005$), ($q = 0,1896, SQR = 0,002$) e ($q = 0,1898, SQR = 0,009$). Logo, o valor do ruído com maior poder explicativo foi $q = 0,1896$. Entretanto, para termos estatísticas mais confiáveis, mostraremos os ajustes lineares com os possíveis candidatos a ser o q_c .

Através do software R—edite, 64 bit, e utilizando o pacote estatístico linear models (lm) (R Core Team, 2013) obtivemos a Tabela 1. Ao executarmos regressão linear tentamos descobrir se os coeficientes para as variáveis independentes são realmente diferentes de zero. A hipótese nula (default) é que cada variável independente não exerce efeito sobre a variável dependente.

Realizamos ajuste linear com o valor do parâmetro de controle $q = 0,1895$. No ajuste, o valor do intercepto foi $-0,5777197$, o coeficiente angular da reta estimado foi de $-0,1617432$. A estatística t mostra com qual precisão o coeficiente de regressão é medido. O p — valor $< 2.2 \times 10^{-16}$ indica a probabilidade de cometermos um erro em rejeitar a hipótese nula. O poder explicativo do ajuste linear foi $R^2 = 0,961$.

Na Tabela 2, também utilizamos o pacote estatístico linear models lm , para um ajuste de regressão linear, agora para o valor do ruído $q = 0,1896$. Os resultados mostram que o coeficiente estimado foi altamente significativo, para o valor de $q = 0,1896$, pois seu p — valor foi igual a 0%. O valor do $R^2 = 0,9977$, equivale a dizer que um ajuste linear consegue explicar os dados 99,77%.

A Tabela 3 mostra o resultado do ajuste linear da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, para o valor $q = 0,1989$. O valor do intercepto foi $-0,3$, o coeficiente angular da reta foi $-0,2008$. Este é um valor importante, pois se este ruído for o crítico, o coeficiente estima $\beta/\nu z$. O valor de $R^2 = 0,9977$, e o p — valor $< 2.2 \times 10^{-16}$. Deste modo, utilizando como critério de decisão o valor do R^2 podemos inferir que para os valores de ruídos $q = 0,1896$ e $q = 0,1989$ ambos apresentaram bons ajustes.

	Est.	σ	$t - valor = Est./\sigma$	$Pr(> t)$
(Intercepto)	-0,5777	0,0051	-113,27	0,0000 ***
$\log(t)$	-0,1617	0,0008	-202,12	0,0000 ***
Signif. código:	*** = 0			
R^2 : 0,961	$p - value :< 2,2 \cdot 10^{-16}$			

Tabela 1: Resultado do ajuste linear para o valor de ruído $q = 0,1895$. As abreviações Est.=Estimado, σ =Erro padrão, e os valores destacados em amarelo indicam a significância do ajuste.

	Est.	σ	$t - valor = Est./\sigma$	$Pr(> t)$
(Intercepto)	-0,5174	0,0040	-129,58	0,0000 ***
$\log(t)$	-0,1838	0,0006	-287,53	0,0000 ***
Signif. código:	*** = 0			
R^2 : 0,9977	$p - value :< \cdot 10^{-16}$			

Tabela 2: Resultado do ajuste linear em $q = 0,1896$. As abreviações são as mesmas da Tabela 1 os valores destacados em amarelo indicam a significância do ajuste.

	Estimado	Erro padrão	t-valor	$Pr(> t)$
(Intercepto)	-0,3847	0,0018	-216,04	0,0000 ***
$\log(t)$	-0,2008	0,0003	-760,97	0,0000 ***
Signif. código:	*** = 0			
R^2 : 0,9977	$p - value :< \cdot 10^{-16}$			

Tabela 3: Resultado do ajuste linear em $q = 0,1898$. Significado das abreviações ver a Tabela 1, os valores destacados em amarelo indicam a significância do ajuste.

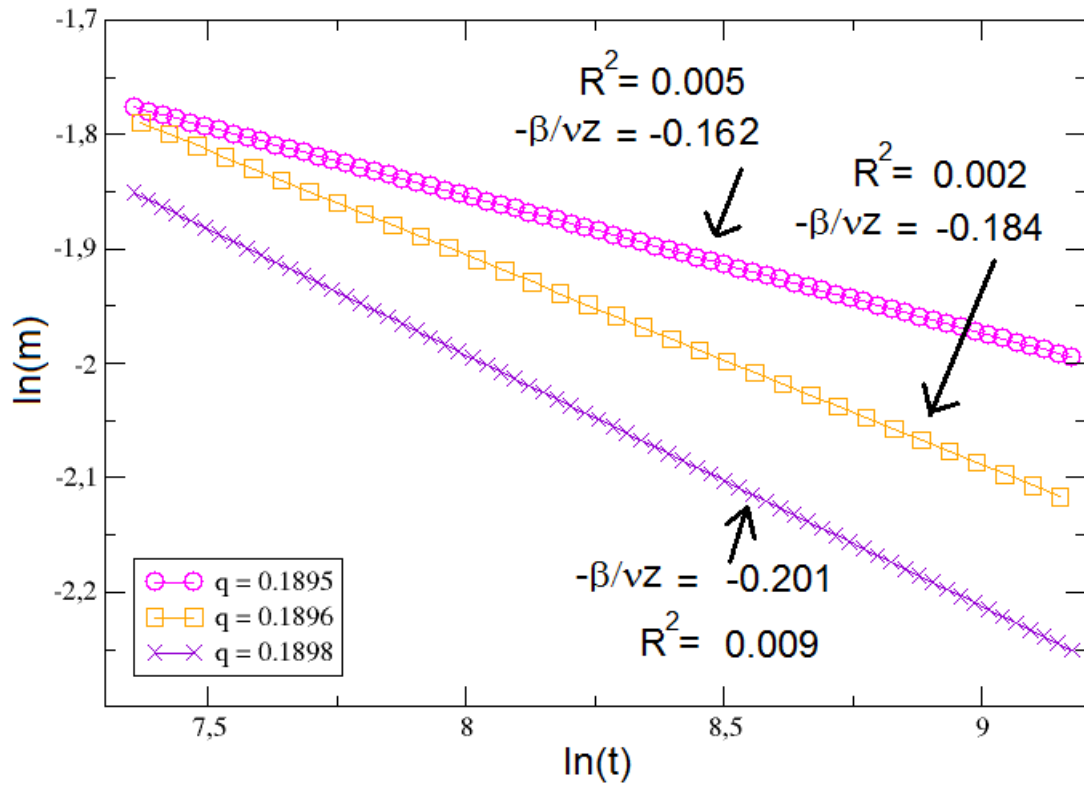


Figura 13: Ajuste linear da magnetização em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, próximos do ruído crítico q_c , para a rede de tamanho $L = 128$.

As análises gráficas para $q = 0,1895$, reforçam os resultados anteriores obtidos nos ajustes lineares, mostrados na Tabela 1. A Figura 14 mostra que os dados se ajustam linearmente, entretanto, se observarmos a reta preta no instante inicial e no final, estes dados não acompanharam o ajuste.

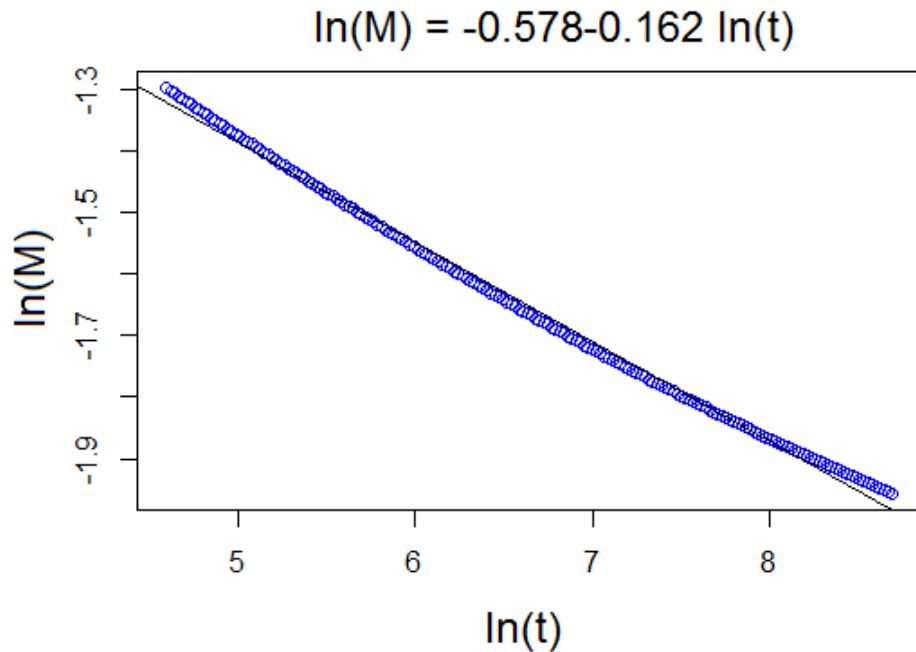


Figura 14: Ajuste linear dos dados a função estimada $\log(M) = -0,578 - 0,162 \log(t)$, para $q = 0,1895$, para rede cúbica $L=128$.

A Fig.15 mostra que o resíduo, durante o ajuste, variou entre $\pm 0,02$ significando um resíduo máximo de 4%, em outras palavras, apenas 4% dos dados não foram ajustados. Em seguida, podemos observar que os valores não ajustados ficaram de fora, como mostra a Fig.16. E, nesta análise, o ideal é que os dados estejam sobrepostos sobre a reta, pois se os quantis teóricos coincidirem com os quantis amostrais teremos um bom ajuste. Entretanto, nem todos os quantis coincidiram. A Fig.17 mostra os parâmetros de locação e o de escala ajustados, e mostra as oscilações dos erros durante o ajuste.

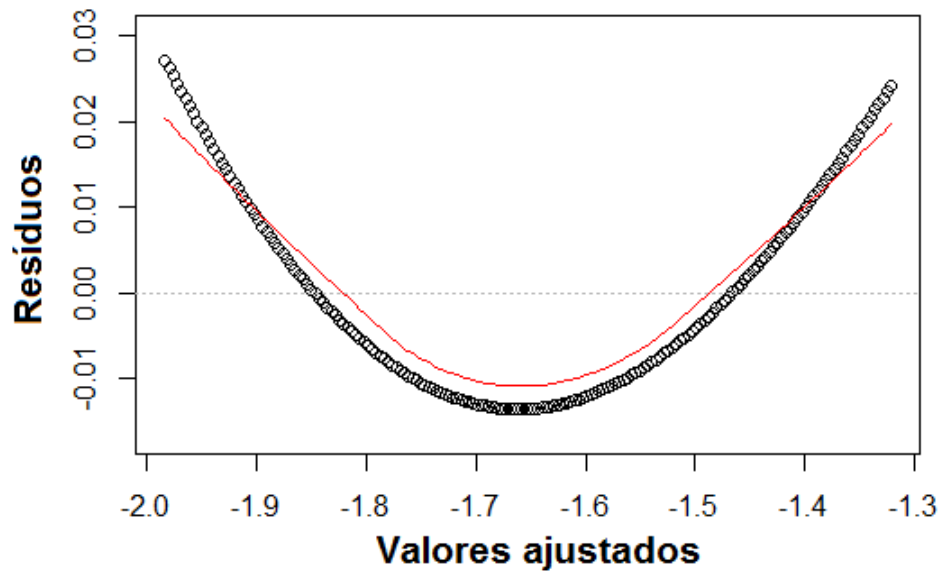


Figura 15: Análise residual vs valores ajustados linearmente, para $q = 0,1895$, para $L=128$.

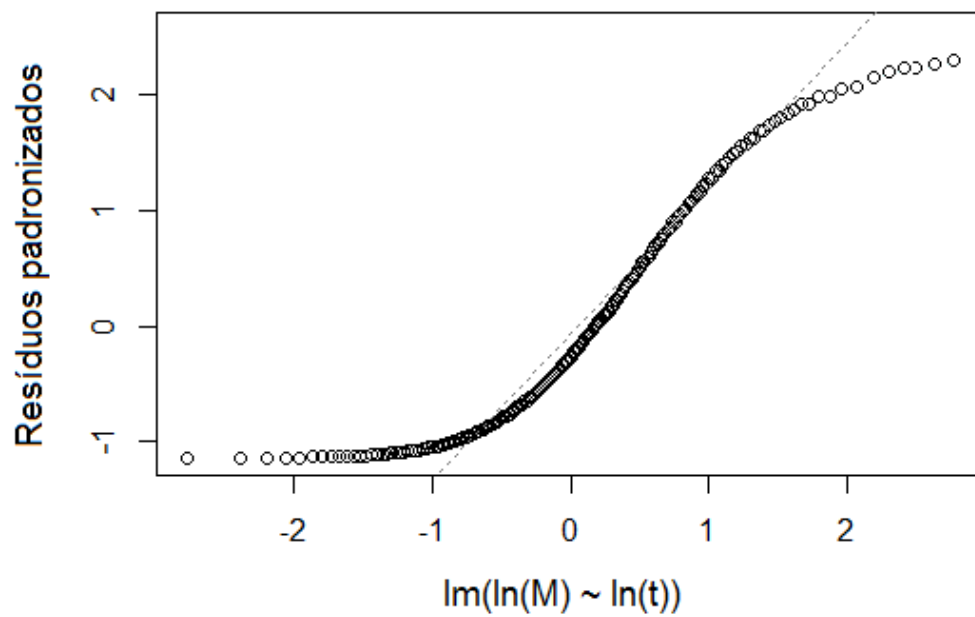


Figura 16: Plot QQ normal, comparação entre os quantis teóricos vs quantis amostrais, para $q = 0,1895$, rede de tamanho $L=128$.

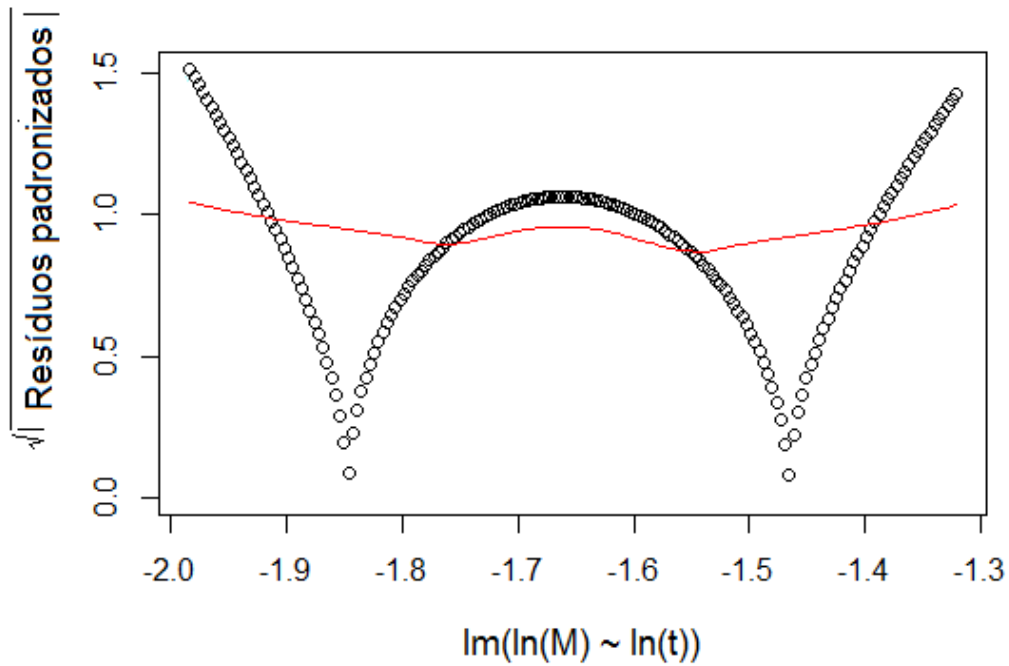


Figura 17: Parâmetro de locação e escala ajustados, para $q = 0,1895$, rede de tamanho $L=128$.

Os pontos que não receberam ajustes não exercem influência nas análises finais. Na Figura 18 notamos a existência de pontos próximos a distância de Cook (COOK, 1977), se os resultados não fossem significativos seria interessante testar os pontos próximos a distância de cook, para ver se eles exercem influência nas estatísticas.

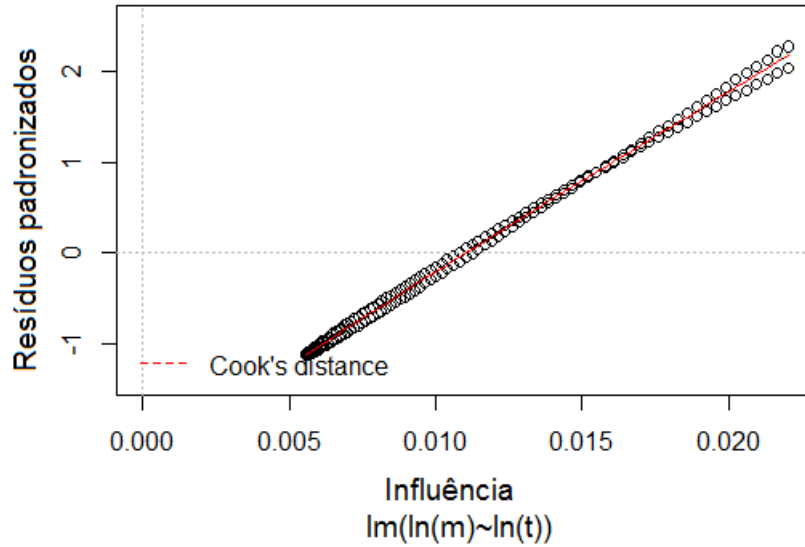


Figura 18: Distância de cook, investigação de pontos influentes, para $q = 0,1895$, rede de tamanho $L=128$.

As próximas análises são para os ruídos $q = 0,1896$ e $q = 0,1898$, respectivamente, reforçando os resultados anteriores obtidos nos ajustes lineares. A Figura 19 ilustra um bom resultado dos dados ajustados linearmente, para o valor de ruído $q = 0,1896$, este resultado foi verificado na Tabela 2. Na Figura 20 temos o gráfico dos resíduos padronizados em função dos quantis teóricos sobrepostos sobre a linha, demonstrando que os quantis teóricos coincidem com os quatis amostrais. Em seguida, a Figura 21 mostra que a média residual, no ajuste, é baixa pois está entre 0,02 e 0,00; por fim, temos que na Figura 22, aparentemente, não há indícios de pontos influentes ou aberrantes, e que em média todos os dados estão próximos do ajuste linear.

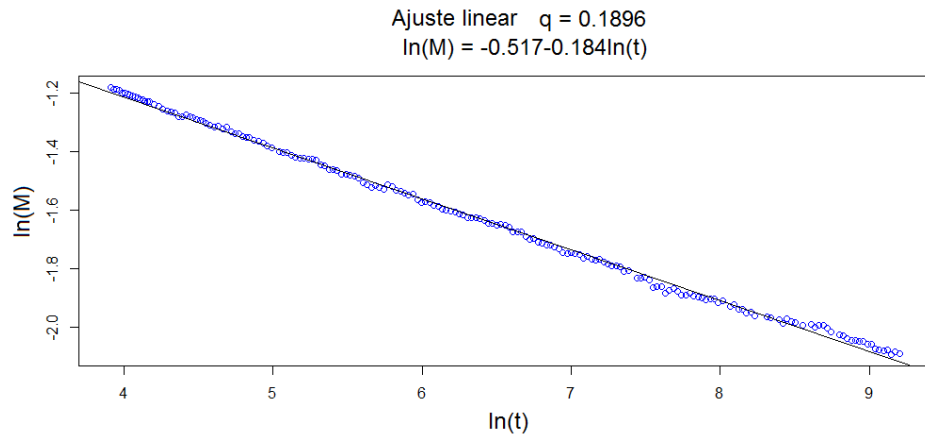


Figura 19: Ajuste linear nos dados para a função estimada $\log(M) = -0,517 - 0,184 \ln(t)$, para $q = 0,1896$, na rede de tamanho $L=128$.

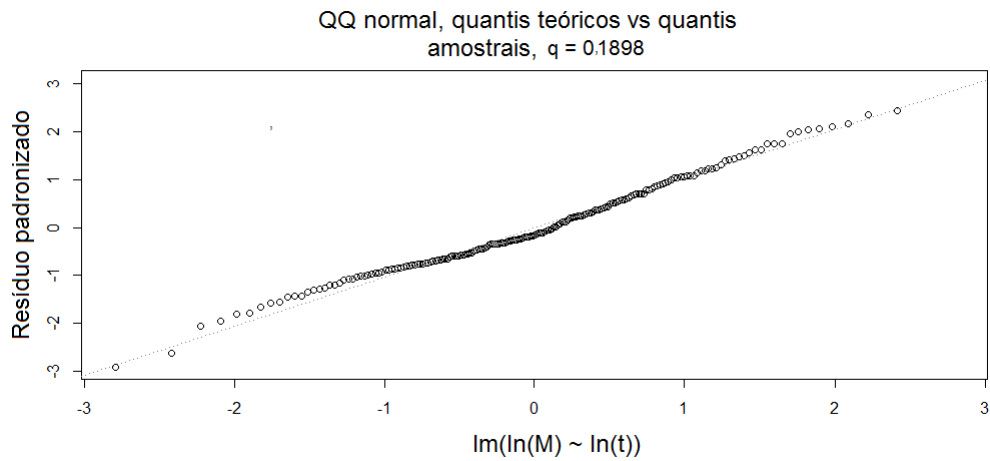


Figura 20: Ajuste QQ normal, comparação dos quantis teóricos com os quantis amostrais, para $q = 0,1896$, na rede de tamanho $L=128$.

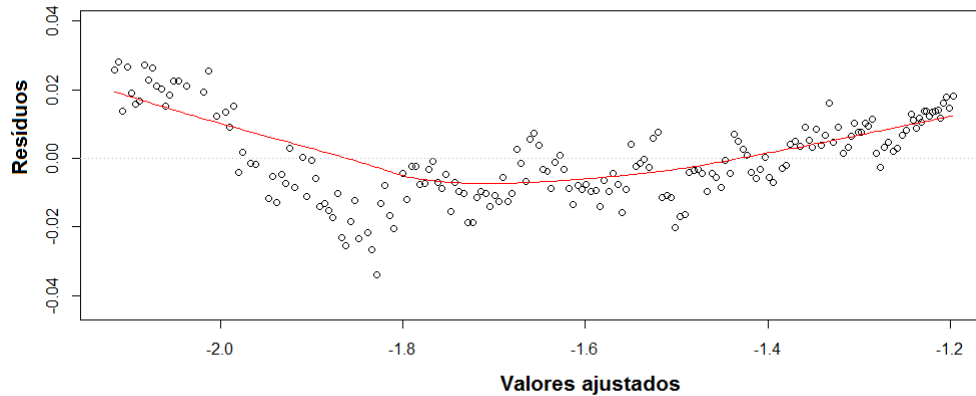


Figura 21: Gráfico resíduo vs ajuste linear, para o resíduo $q = 0,1896$, na rede de tamanho ($L=128$).

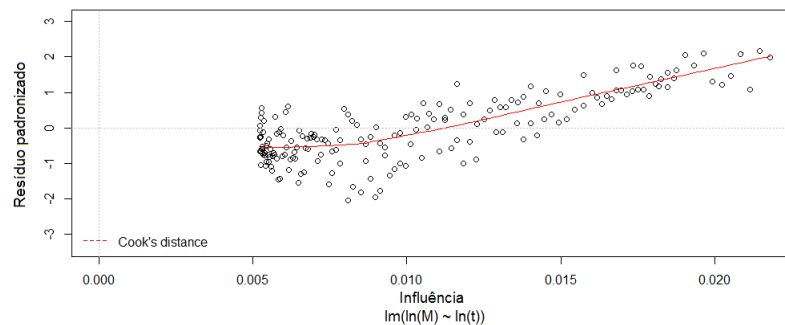


Figura 22: Distância de cook, investigação de pontos influentes, valor do ruído $q = 0,1896$, para rede ($L=128$).

Na Figura 23 temos os dados ajustados linearmente, resultado refletido na Tabela 3. Na Fig. 24 temos o gráfico dos resíduos padronizados em função dos quantis teóricos, sobrepostos sobre a linha, demonstrando também um bom ajuste. Em seguida, a Figura 25 mostra que a média residual, no ajuste, é baixa pois está entre 0,04 e $-0,04$, mas podemos dizer que o erro médio do ajuste segue a tendência do erro proveniente da amostra; por fim, na Figura 26, aparentemente, não há indícios de pontos influentes ou aberrantes. Ainda, em média, todos os dados estão próximos do ajuste linear.

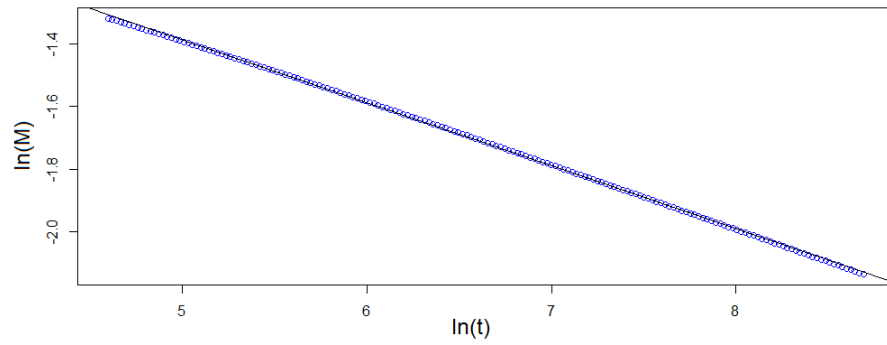


Figura 23: Ajuste linear nos dados para a função estimada $\log(M) = -0,3847 - 0,201 \log(t)$, para $q = 0,1898$, e a rede de tamanho ($L=128$).

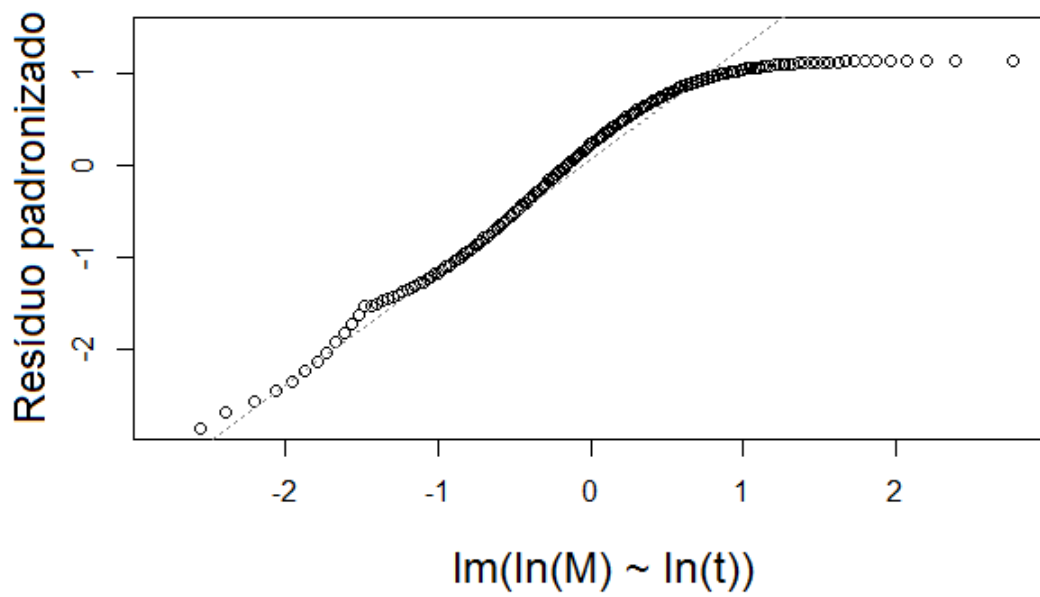


Figura 24: Ajuste qqnormal, comparação dos quantis teóricos e amostrais, para $q = 0,1898$ e ($L=128$).

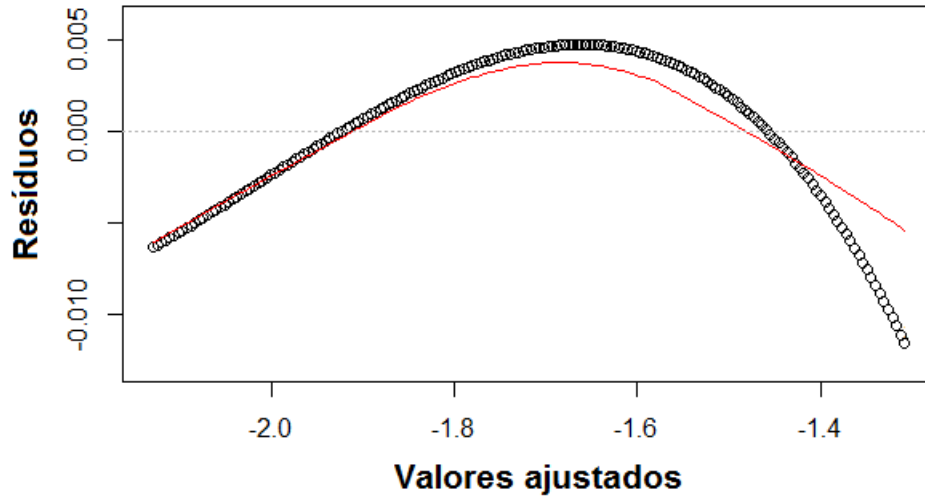


Figura 25: Gráfico resíduo vs ajuste, para o valor de ruído $q = 0,1898$ e ($L=128$).

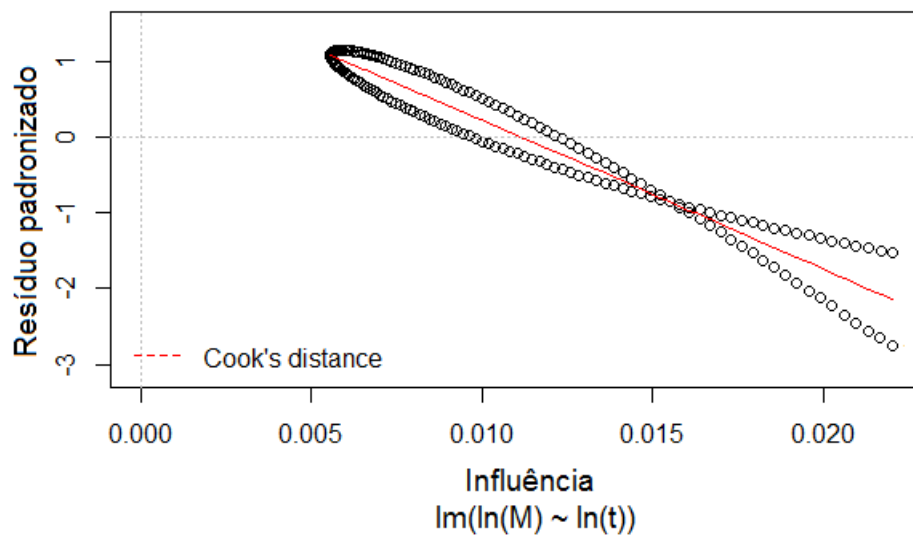


Figura 26: Gráfico distância de Cook, investigação de pontos influentes, para $q = 0,1898$ e ($L=128$).

Podemos notar que os procedimentos estatísticos de regressão linear, utilizando o software R ou o Grace, não foram satisfatórios para inferir o q_c . Um dos fatores do insucesso no método inferencial é a qualidade ruim dos dados do MVMC. Então formulamos um

novo método para estimar o ruído crítico e o expoente crítico dinâmico $\beta/\nu z$. Este método é dado pela equação (3.9). Utilizando esta equação, estimamos o valor do ruído crítico $q_c = 0,189708(3)$.

A Figura 27 mostra o ajuste linear entre os dados interpolados linearmente para o valor de ruído $q = 0,189708$. O valor do ajuste linear estima o coeficiente $\beta/\nu z = 0,18847(12)$.

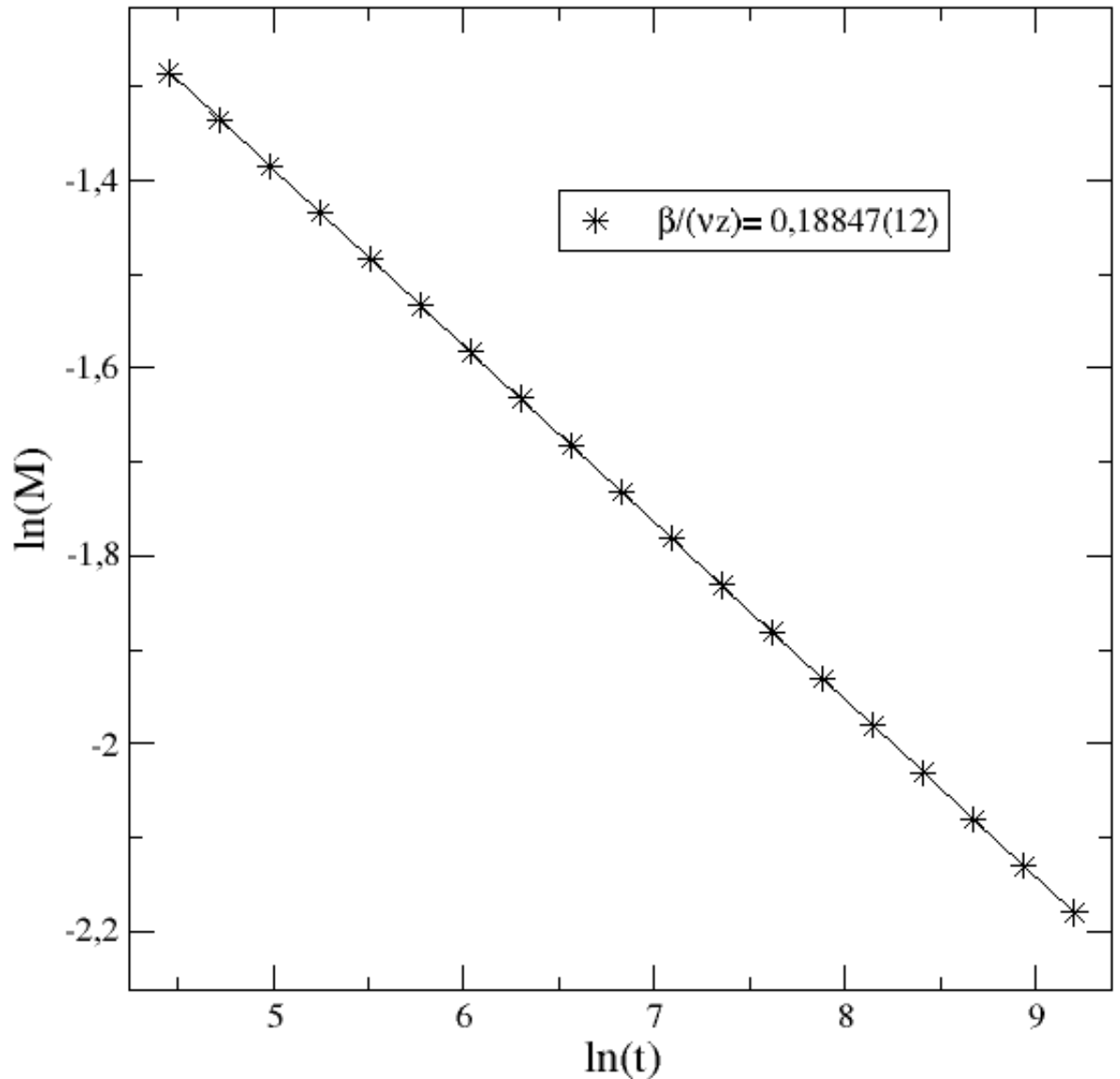


Figura 27: Gráfico dos dados suavizados (utilizando regularização Tikhonov) e interpolados linearmente da magnetização em função do tempo do MVMC, na escala duplo-logarítmica, para $q = 0,189708$, para $L = 128$.

5.1.2 Comportamento da transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos

A Figura 28 ilustra o comportamento da equação (3.10), na escala duplo-logarítmica. Nesta Figura, observamos que para os valores dos ruídos $q \leq 0,1896$ a função é côncava para cima, e para os valores de $q \geq 0,1898$ o comportamento da função $\ln(\chi_0)$ em função do logaritmo do tempo é côncava para baixo. Exatamente no valor do ruído crítico $q_c = 0,189708(3)$, a Equação (3.13) é proporcional a $-2\beta/\nu z$, na escala duplo-logarítmica.

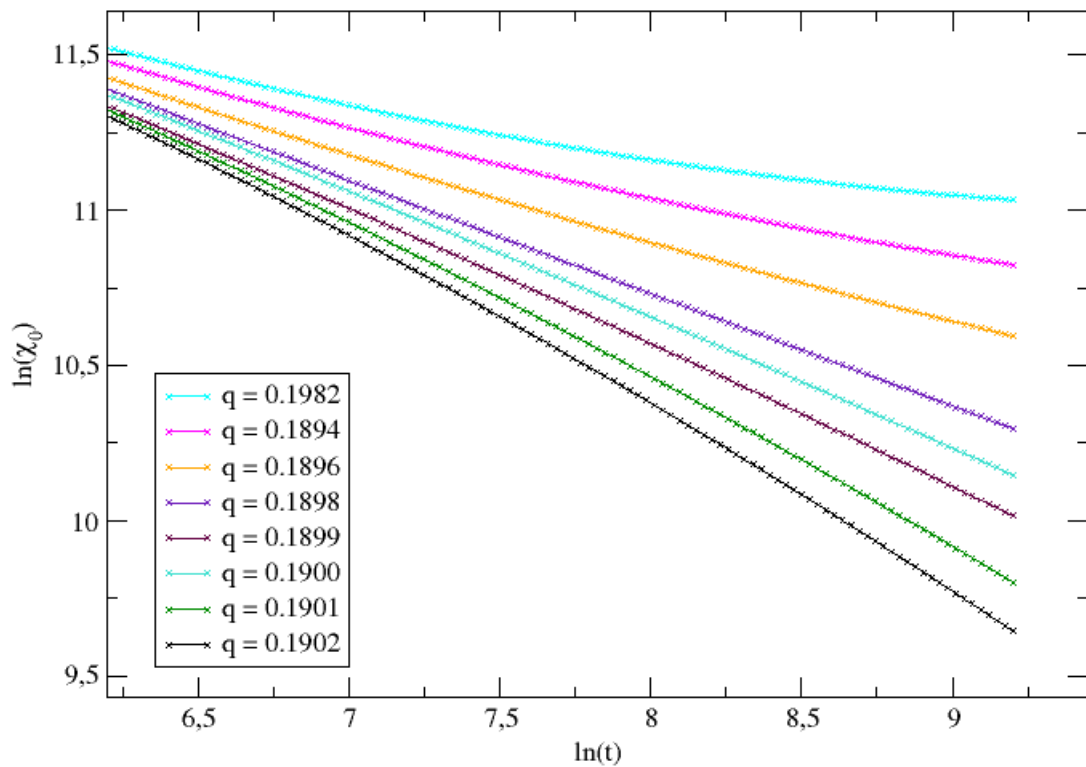


Figura 28: Gráfico do χ_0 em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, na rede cúbica de tamanho ($L=128$).

5.1.3 Comportamento do comprimento de correlação

Utilizando a equação (3.15), obtivemos o comportamento do comprimento de correlação do sistema, representado na Figura 29. Os valores dos ruídos foram $q = 0,1896$ e $q = 0,1898$, numa rede cúbica $L = 128$. Observamos que o comportamento desta medida,

no intervalo de instantes de tempos inferiores a $t \cong 800$ são quase coincidentes.

A Figura 30 mostra a aplicação do logaritmo natural em ambos os lados na equação (3.15). As curvas da Figura 30 foram obtidas em redes cúbicas de tamanho $L = 128$. Escolhemos o intervalo de $[6, 5; 9, 19]$, com 68 pontos, para obter o valor aproximado do expoente dinâmico z , visto que neste intervalo as curvas se diferenciam. Este intervalo é comum com o que foi utilizado na equação (3.9) para obter uma estimativa do parâmetro de controle crítico q_c e o $\beta/\nu z$.

A Figura 31 mostra os pontos exatamente para $q_c = 0,189708$, obtida através de interpolação linear. A reta foi obtida através de um ajuste linear simples que estima o expoente crítico dinâmico $z = 2,757(7)$. Não fizemos simulações para o valor exato do ruído crítico pois no ponto crítico o sistema é muito instável.

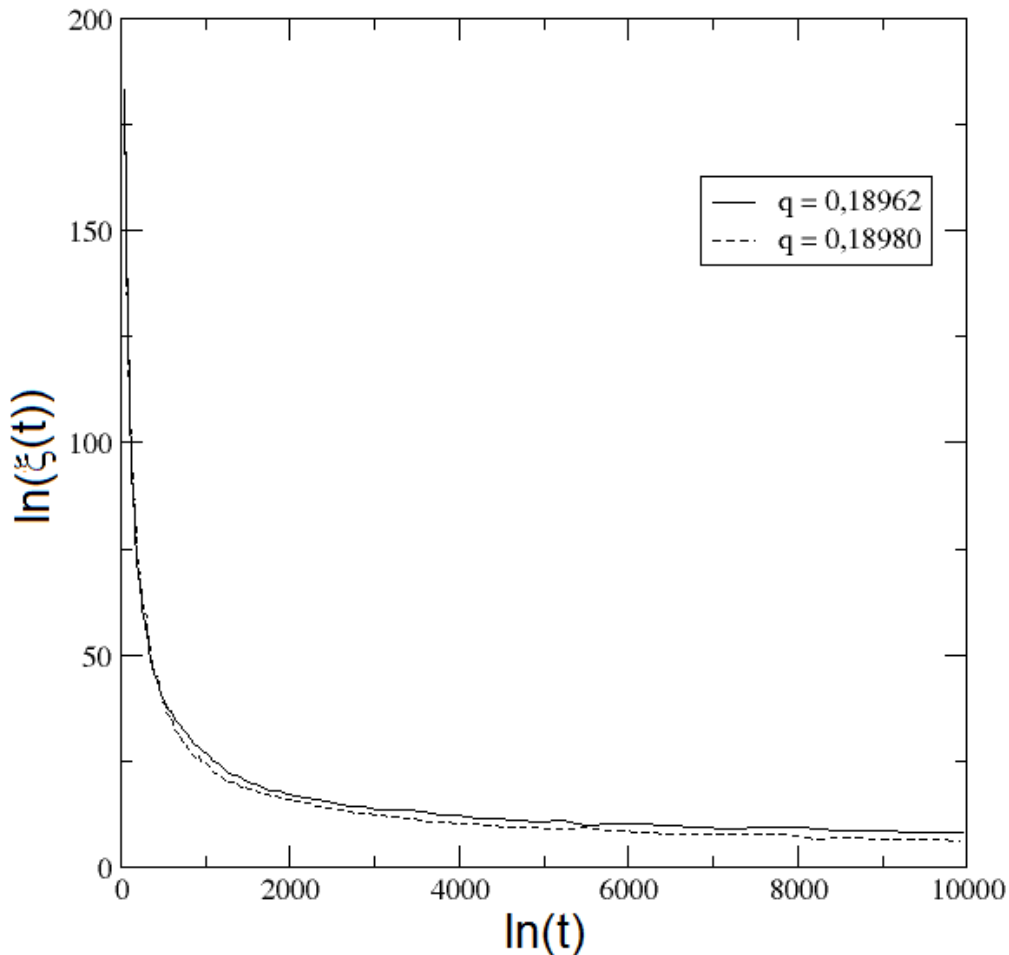


Figura 29: Comprimento de correlação em função do tempo, para $L=128$.

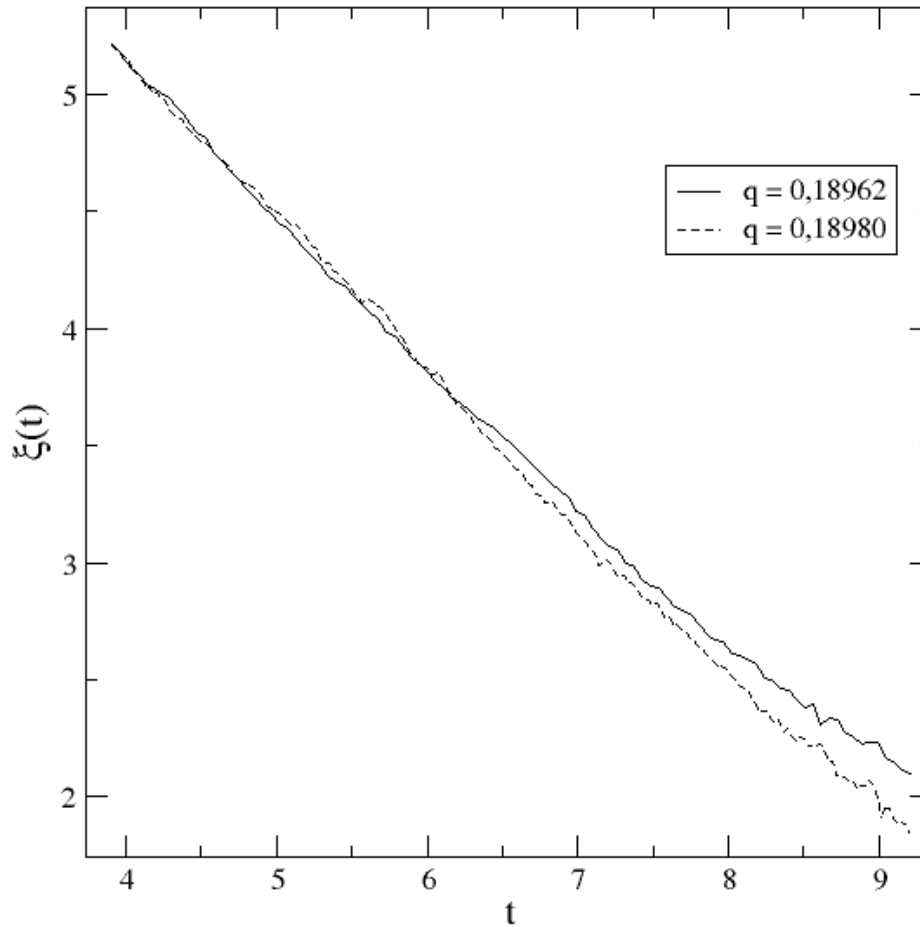


Figura 30: Escala duplo-logarítmica do comprimento de correlação em função do tempo em $q = 0,18962$ e $q = 0,18980$, na rede cúbica $L=128$.

5.1.4 Colapso dos dados

A equação (3.16) nos permite determinar os valores do expoente $1/\nu z$ e do ruído crítico q_c . De fato, para valores adequados do expoente $1/\nu z$ e do ruído crítico q_c a equação (3.16) implica que os dados para os diversos valores de t e q , quando traçados numa escala conveniente, caem todos sobre uma curva universal. Para obtermos $\Psi(\tau, \epsilon)$ (3.16) utilizamos a técnica de regularização Tikhonov (LUBANSKY et al., 2006) que ao mesmo tempo deriva numericamente e suaviza as curvas.

Como princípio de escolha para os valores do expoente $1/\nu z$ e para o ruído crítico q_c utilizamos a técnica estatística dos resíduos dos dados colapsados $\hat{\epsilon}$ dado pela equação (3.17). As estimativas dos resíduos mede a diferença entre os dados para os valores de $1/\nu z$ e q , simultaneamente, e os dados da curva principal. Os dados da curva principal

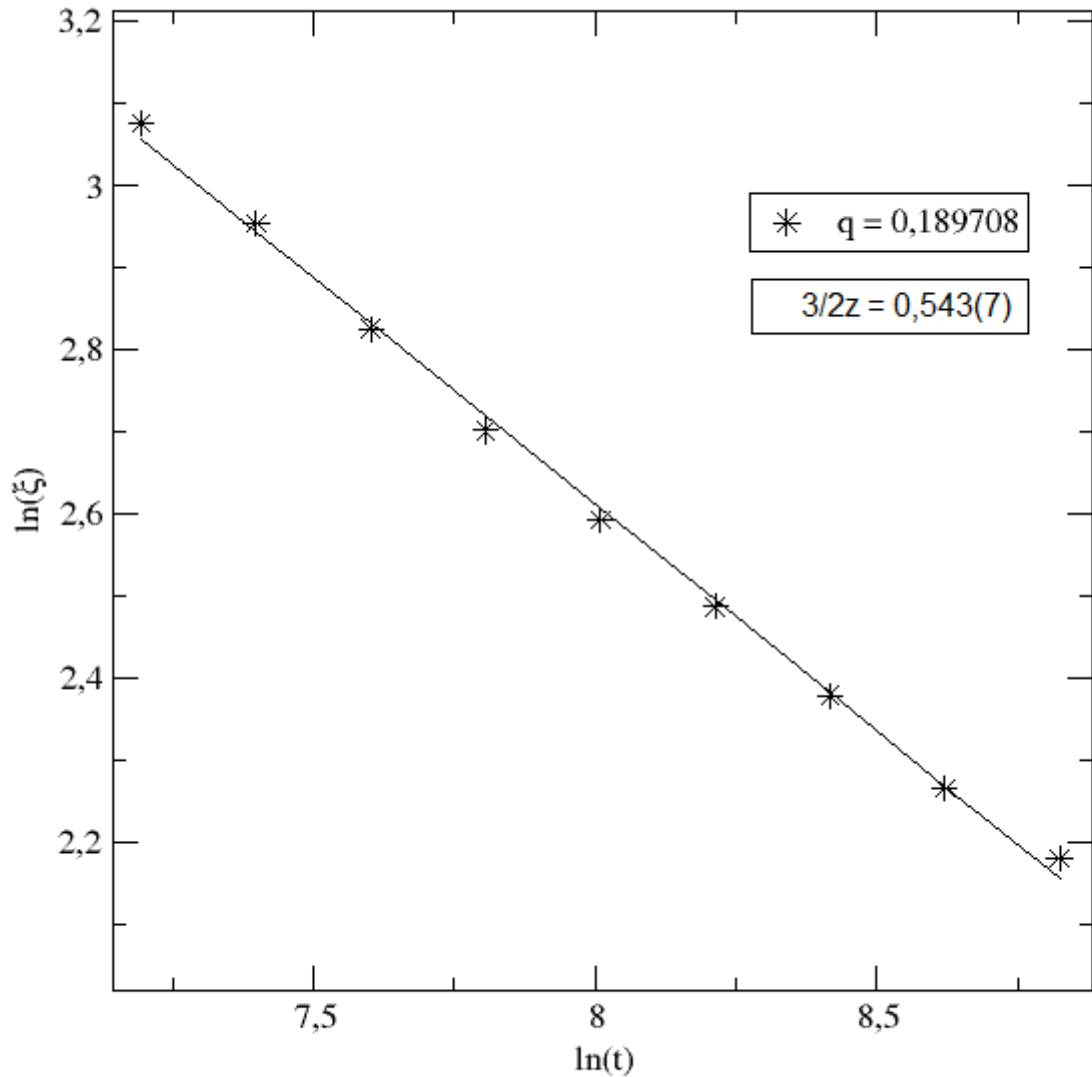


Figura 31: Evolução temporal do comprimento de correlação para o valor do ruído crítico $q_c = 0,189708$ do MVMC, na escala duplo-logarítmica, em uma rede cúbica $L=128$.

pode ser qualquer conjunto de pontos de $\Psi(\tau, \epsilon)$ em função de x . A Figura 32 mostra as estimativas dos resíduos, em função do expoente $1/\nu z$. De acordo com os valores dos resíduos estimados obtivemos $1/\nu z = 0,540(3)$. A Figura 33 mostra a variabilidade dos resíduos $\hat{\epsilon}$, em função do ruído. De acordo com a Figura o valor estimado de $q_c = 0,189708(2)$.

A Figura 34 mostra o colapso dos dados da equação (3.7), para o valor de $1/\nu z = 0,54$ e para o valor de ruído $q_c = 0,189708$. De acordo com a Figura 34, o valor estimado de $\beta/\nu z \cong -0,18858$. Não calculamos as barras de incertezas do expoente $\beta/\nu z$, na técnica

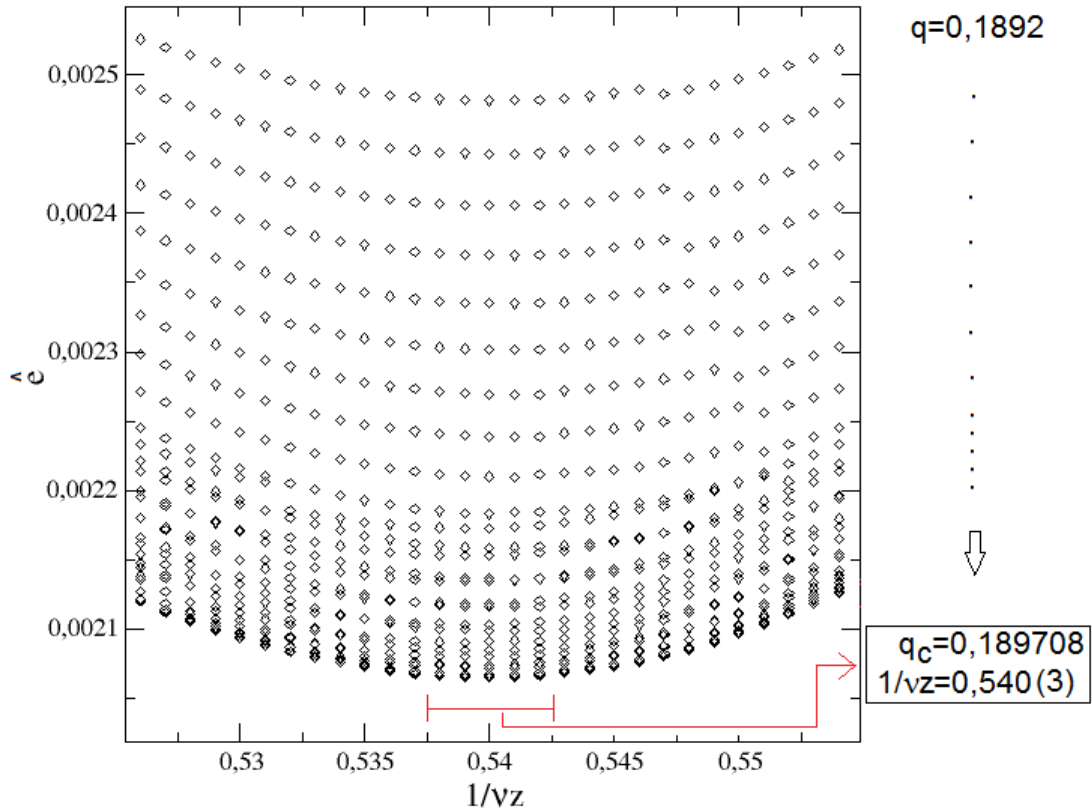


Figura 32: Gráfico das estimativas dos resíduos \hat{e} de $x\tilde{\Psi}(x)$ do (MVMC), para diferentes valores do expoente $1/\nu z$, em uma rede cúbica $L = 128$.

de colapsar os dados. Entretanto, mostramos na Figura 27 um estimativa acurada para $\beta/\nu z = 0,18847(12)$, e este valor será o utilizado nas análises. Com os valores estimados dos expoentes $1/\nu z = 0,54(1)$ e $\beta/\nu z = 0,18847(12)$ obtemos $\beta = 0,349(6)$. Este resultado de β coincide com os valores obtidos nos artigo de (CAMPOSTRINI et al., 2006) e (CAMPOSTRINI et al., 2001).

Utilizando os valores encontrados para $z = 2,762(7)$ e $1/\nu z = 0,54(1)$ encontramos uma estimativa para o expoente crítico estático $\nu = 0,670(14)$. A Tabela 4 mostra os valores dos expoentes críticos do MVMC e os valores obtidos por diferentes autores, comentados logo a seguir. O artigo (CAMPOSTRINI et al., 2006) melhorou as estimativas teóricas dos expoentes críticos para a classe de universalidade do modelo $XY3D$, investigando os resultados obtidos do artigo (CAMPOSTRINI et al., 2001). Os resultados dos dois últimos artigos foram obtidos por simulações Monte Carlo baseados em escala de tamanho finito. O trabalho de (POGORELOV; SUSLOV, 2007) utilizou o método da soma de séries divergente para aumentar significativamente a precisão dos expoentes críticos

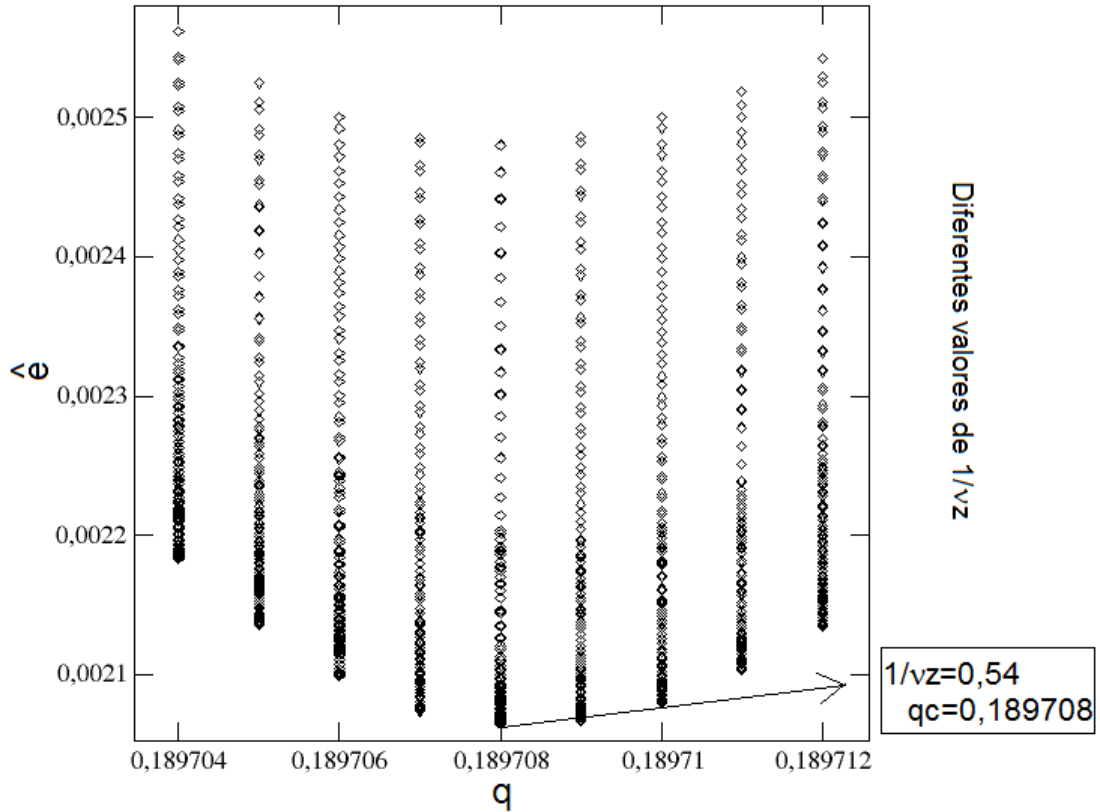


Figura 33: Gráfico das estimativas dos resíduos $\hat{\epsilon}$ de $x\tilde{\Psi}(x)$ do (MVMC), para diferentes valores do ruído q , na rede cúbica $L = 128$.

obtidos. Os resultados da referência (LIPA et al., 2000), para sistemas de altas temperaturas, foram obtidos analisando expansões até a ordem 21, para o modelo XY padrão, em três dimensões. O artigo (KRECH; LANDAU, 1999) apresentou extensos resultados de simulações Monte Carlo e dinâmica de spins do modelo XY clássico em três dimensões, com condições periódicas de contorno.

Ainda de acordo com a Tabela 4, observamos que as estimativas dos expoentes críticos estáticos do MVMC fora do equilíbrio, coincidem com os resultados dos expoentes dos modelos de trabalhos teóricos e experimentais publicados, citados na Tabela 4.

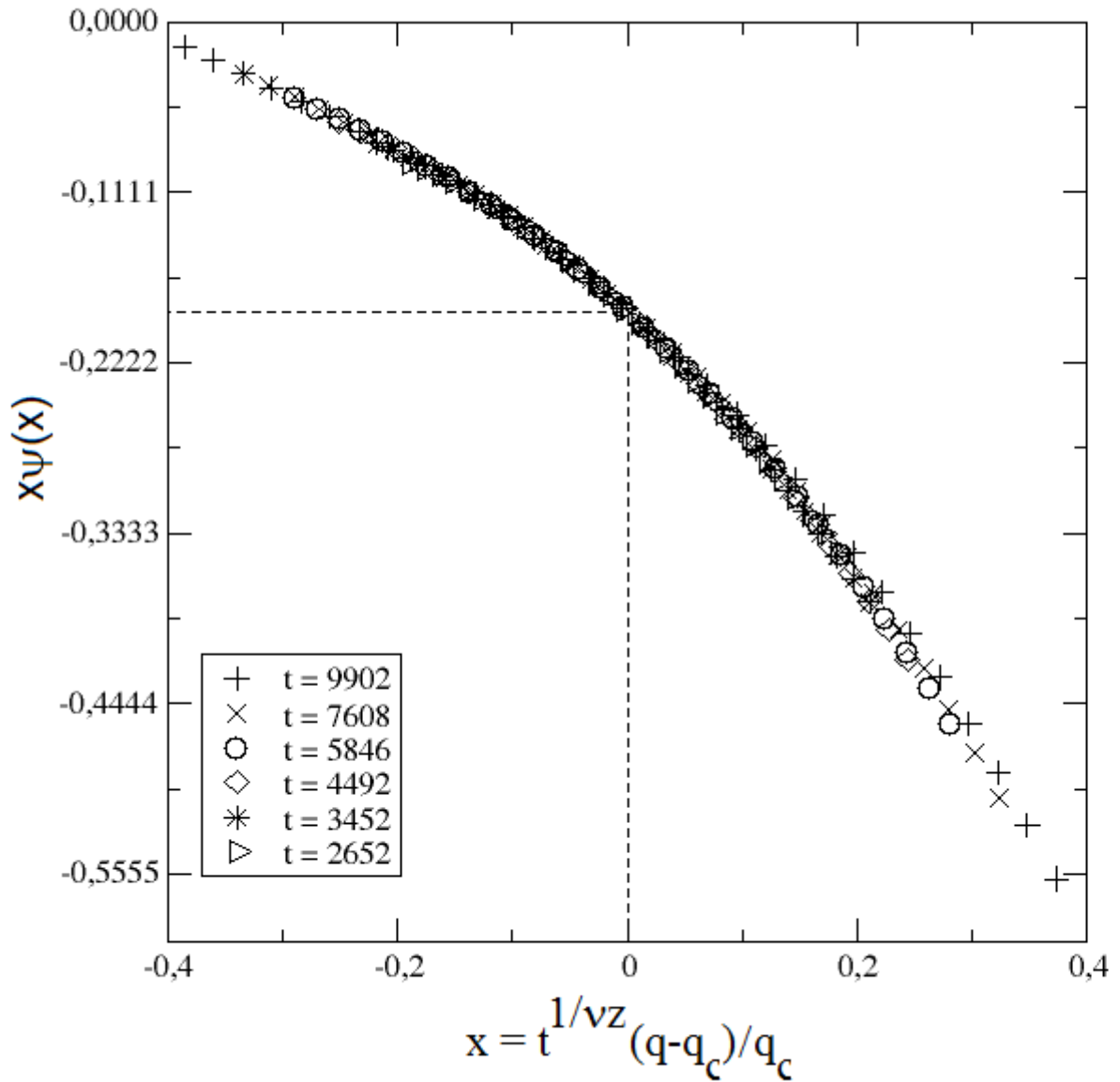


Figura 34: Gráfico do colapso dos dados da grandeza $x\tilde{\Psi}(x)$, para diferentes valores de x , do MVMC na rede cúbica $L = 128$.

Tabela 4: Comparação dos resultados dos expoentes críticos do MVMC com os valores obtidos por outros autores. As numerações entre parenteses são os erros estimados.

	MVMC	CHPV ¹	CHPRV ²	Lipa ³	KL ⁴	PSM ⁵
γ	1,316(18)	1,3178(2)	1,3177(5)	1,3190(24)	1,315(3)	1,3172((8)
ν	0,670(14)	0,6717(1)	0,67155(27)	0,6723(11)	0,6693(58)	0,6700(6)
β	0,349(6)	0,3486(1)	0,3485(2)	0,3267(2)	0,38(1)	-

Na Figura 35 ilustramos os resultados do expoente β e suas respectivas barras de incertezas. Os expoentes foram obtidos de diferentes modos e por diferentes autores. De acordo com a referida figura, observamos que o valor médio estimado de β do MVMC coincide com os valores médios dos artigos (CAMPOSTRINI et al., 2006) e (CAMPOSTRINI et al., 2001). Os resultados dos dois últimos artigos foram obtidos através da técnica Monte Carlo para altas temperaturas.

Na Figura 36 mostramos os resultados do expoente ν e suas respectivas barras de incertezas. Os expoentes foram obtidos de diferentes modos e por diferentes autores. Observamos que o valor médio estimado de ν do MVMC coincide com os valores médios dos artigos (CAMPOSTRINI et al., 2006) e (CAMPOSTRINI et al., 2001). Ainda pela figura, verificamos que os artigos (POGORELOV; SUSLOV, 2007), (LIPA et al., 2000), e (KRECH; LANDAU, 1999), estão contidos no intervalo de incerteza do MVMC. Os resultados dos três artigos acima foram obtidos utilizando a técnica Monte Carlo para altas temperaturas, experimentalmente, e utilizando o método variacional e a teoria da perturbação, respectivamente.

5.2 Resultados do modelo do votante majoritário discreto em três dimensões

O modelo do votante majoritário discreto (MVMD) foi estudado utilizando os mesmos procedimentos de análise do MVMC. Exceto a técnica estatística de regressão linear, para obter q_c , não foi abordada neste modelo. Pois nosso objetivo, no MVMD, é testar as outras técnicas que produziram boas estimativas dos dados mal comportados, do MVMC. Certos detalhes serão omitidos aqui, e daremos ênfase aos pontos mais pertinentes, como obter as estimativas dos expoentes estáticos/dinâmico e o ruído, do modelo em questão.

As simulações Monte Carlo foram realizadas em redes cúbicas de tamanho $L = 1024$ e com condições de contorno periódicas. A escolha de uma rede maior se deveu ao fato de que quanto maior fosse a rede mais observamos o comportamento acentuado das grandezas analisadas. Ainda, outro fator considerado paralelamente ao tamanho da rede foi o tempo de simulação, que nas nossas investigações escolhemos $L = 1024$, durando 8 horas para obtermos 6 blocos contendo 100 amostras, cada.

¹(CAMPOSTRINI et al., 2006)

²(CAMPOSTRINI et al., 2001)

³(LIPA et al., 2000)

⁴(KRECH; LANDAU, 1999)

⁵(POGORELOV; SUSLOV, 2007)

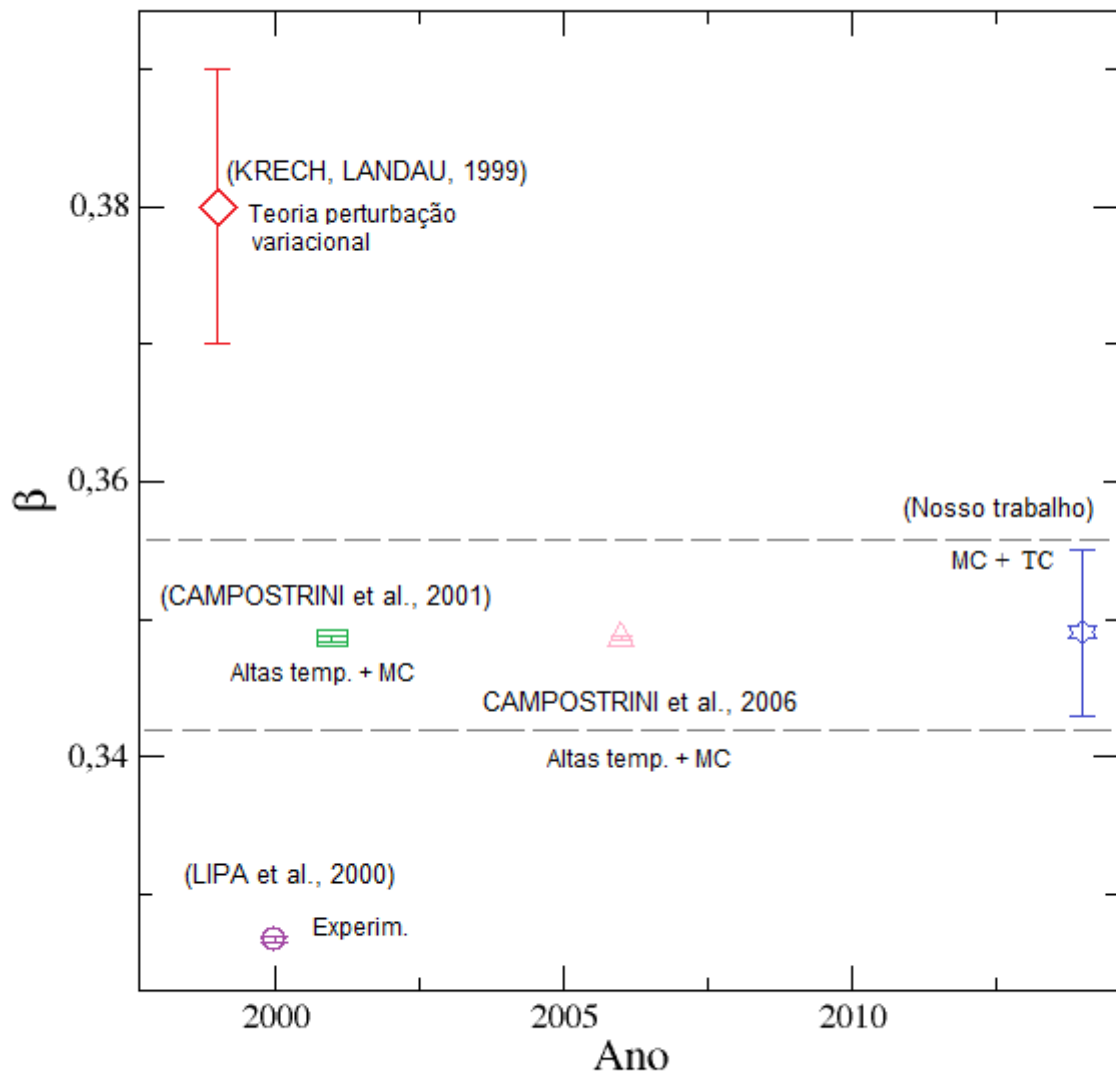


Figura 35: Resultados teóricos e experimentais do expoente β , do MVMC. Na Figura, as siglas indicam: MC= Monte Carlo, TC= tempos curtos, temp=temperatura, Experim=experimental. As linhas tracejadas são para destacar que o valor estimado do expoente crítico estático β do nosso trabalho, utilizando a técnica MC e TC, coincide com os valores obtidos por outros trabalhos.

Para se obter uma estimativa grosseira do valor do ruído crítico, simulamos uma rede cúbica de tamanho $L = 32$ para diversos valores de q entre 0 e $1/2$ e um pequeno número de amostras. Dessas simulações exploratórias, verificamos que o ruído crítico se encontra entre $q = 0,17660$ e $q = 0,17780$. Neste intervalo, simulamos 28 diferentes valores de q , e para cada valor de ruído realizamos 6 blocos contendo 100 amostras de 1150 MCS. No presente caso, aplicamos o mesmo procedimento descrito para o MVMC para estimarmos as incertezas estatísticas e cálculo da derivada numérica.

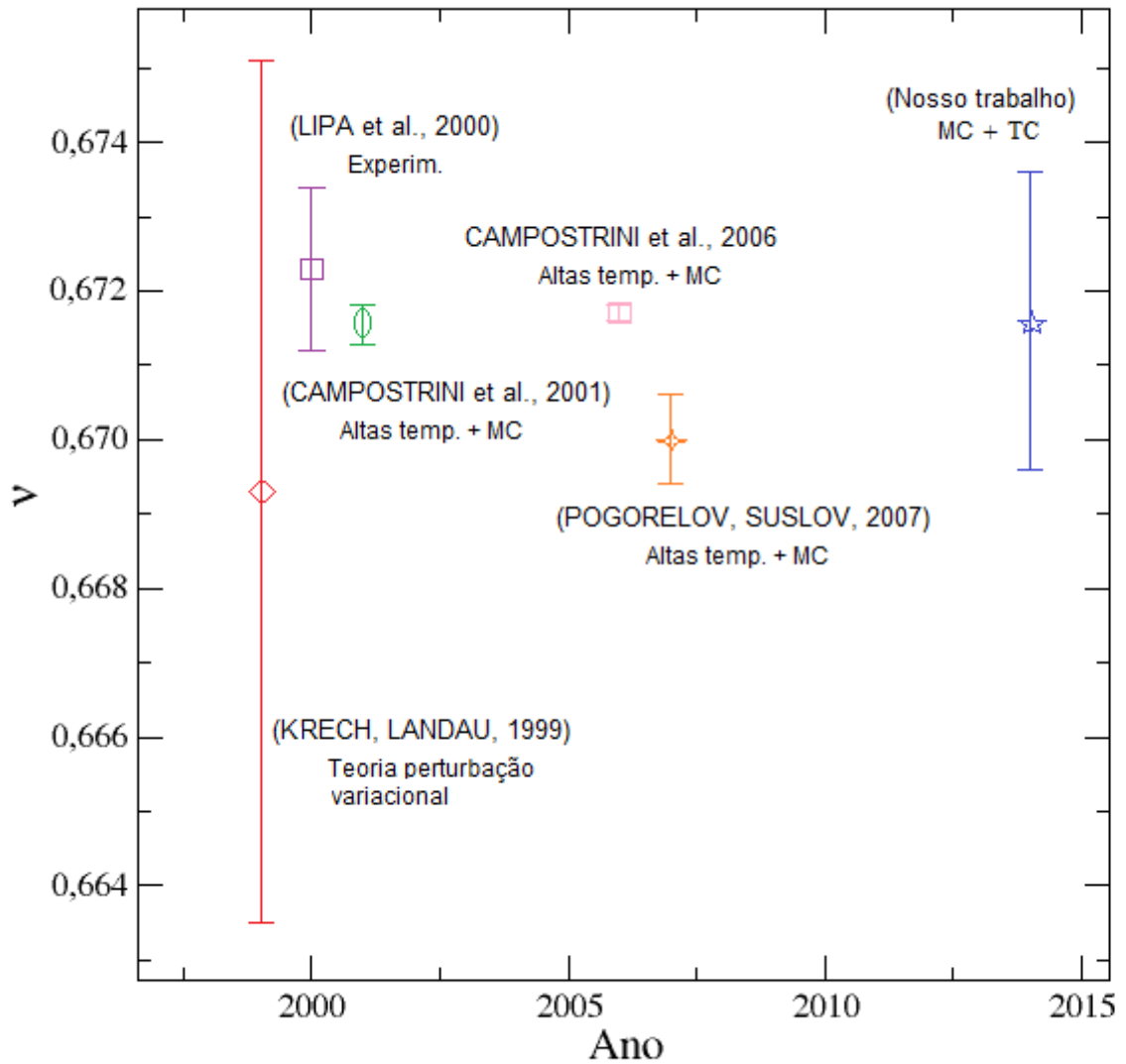


Figura 36: Resultados teóricos e experimentais do expoente ν , do MVMC. Na Figura, as siglas indicam: MC= Monte Carlo, TC= tempos curtos, temp=temperatura, experim=experimental.

Neste trabalho, utilizamos o método de regularização de Tikhonov (LUBANSKY et al., 2006) para obter as derivadas do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo, equação (3.7). O produto final desta derivada numérica é a função $\Psi(\tau, \epsilon)$ (3.9). Os dados desta equação produzem uma família de curvas que se interceptam em $(q_c, \beta/\nu z)$.

5.2.1 Comportamento da magnetização

A Figura 37 mostra o comportamento do parâmetro de ordem em função do tempo, na escala duplo-logarítmica, para diferentes q em uma rede cúbica $L = 1024$. Ao conjunto de dados foi aplicada a técnica de regularização Tikhonov, para produzir curvas suaves. Nesta figura, observamos que a partir de $\ln(t) = 5,5 = 245$ MCS as curvas para os valores de ruído abaixo de $q = 0,17720$ são suavemente côncavas para cima. Para o valor de ruído abaixo de $0,17730$ as curvas são côncavas para baixo. As linhas pretas são apenas guias para os olhos.

Na Figura 38 exibimos um subconjunto de dados que constam na Figura 37. As curvas para os valores de $q = 0,17720$ e $q = 0,17730$ apresentam aproximadamente comportamento linear. Este fato indica que estes valores de ruído estão na região crítica. Para os outros valores de ruído $q = 0,17660$ e $q = 0,17770$ as curvas claramente se desviam da linearidade.

A Figura 39 mostra o ajuste linear de 25 pontos obtidos através de interpolação linear para o valor de ruído $q = 0,177226$. O valor do ajuste linear estima o expoente $\beta/\nu z = 0,2155(19)$. Este valor estimado de $\beta/\nu z$ será utilizado nas obtenções dos expoentes estáticos β e ν .

5.2.2 Método da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo

A Figura 41 ilustra o comportamento da equação (3.7) para diversos instantes de tempo. As derivadas foram obtidas utilizando a técnica de regularização Tikhonov (LUBANSKY et al., 2006). A técnica ao mesmo tempo que deriva ela minimiza os ruídos dos dados, produzindo dados com comportamentos suaves.

Nas interseções das curvas suavizadas temos as estimativas para o ruído crítico $q_c = 0,177226(37)$ e $\beta/\nu z \cong 0,215798$. Para o expoente $\beta/\nu z$, neste método, não obtivemos as barras de incertezas, e apenas expomos o valor aproximado. Utilizaremos o valor para o expoente $\beta/\nu z = 0,2155(19)$, que consta na Figura 39. Apesar da barra de incerteza obtida no ajuste dos dados interpolados ser maior, nas duas estimativas de $\beta/\nu z$ obtivemos os mesmos valores do expoente até a terceira casa decimal.

De acordo com a Figura 40 observamos que os dados obtidos pelo método da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo se interceptam em $(q_c, -\beta/\nu z) = (0,177226(37), \cong 0,215798)$. A Figura 41 ilustra que o

Magnetização em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, para $L=1024$.

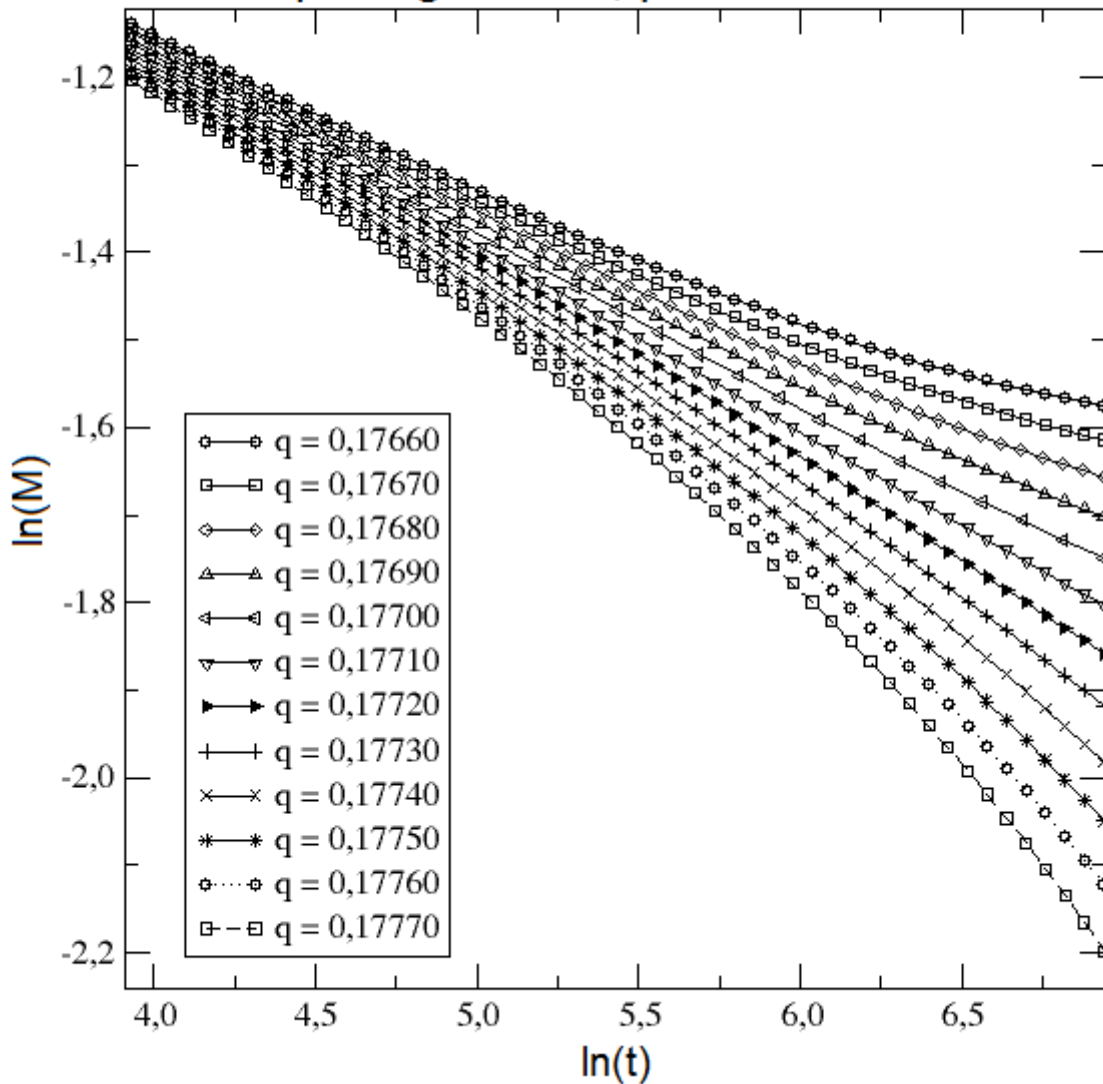


Figura 37: Magnetização em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, para diferentes valores do ruído, para $L = 1024$.

valor de $q = 0,177226$ é de fato o valor do ruído crítico. Pois, a partir equação (3.9), verificamos que para este o valor de ruído temos $\epsilon = 0$. Ainda esta investigação produziu uma estimativa para $\beta/\nu z = 0,2158$.

5.2.3 Colapso dos dados

Para encontrar os melhores valores de $1/\nu z$ e de q_c da equação 3.16, para o MVMD, estimamos os resíduos $\hat{\epsilon}$ utilizando a equação (3.17). Os valores dos resíduos foram calculados escolhendo, simultaneamente, $(q_c, 1/\nu z)$. Os valores de q foram entre $[0,17720; 0,17733]$

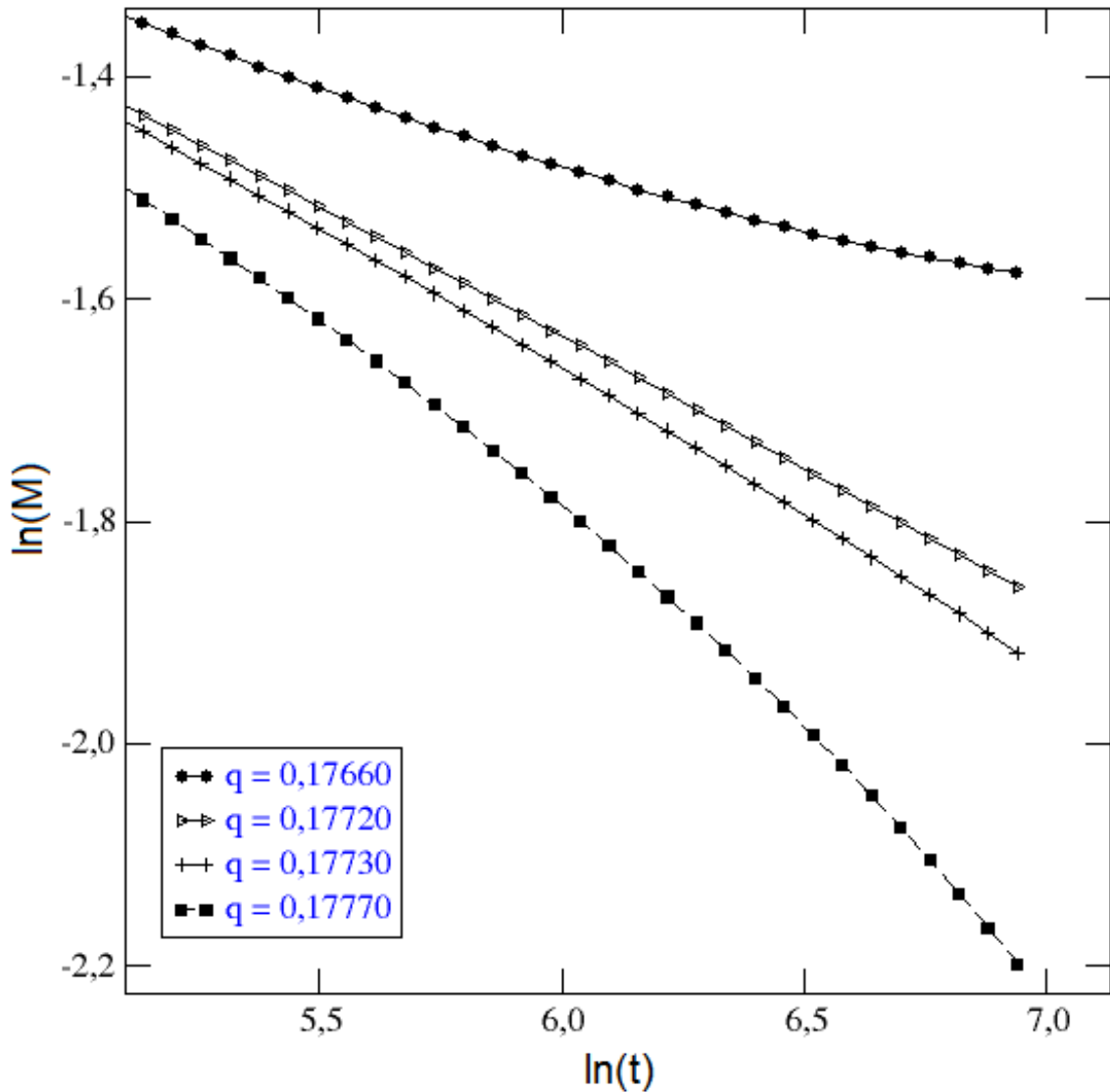


Figura 38: Magnetização em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, para valores de ruídos extremos e próximos a região crítica, para $L = 1024$.

e para o expoente $1/\nu z = [0,60; 0,66]$.

A Figura 42 ilustra que a medida que o valor do ruído se aproxima de $0,177226$, para diferentes valores do expoente $1/\nu z$, o erro estimado $\hat{\epsilon}$ diminui. De acordo com a Figura 43, para o valor do ruído crítico $q_c = 0,177226$ temos o menor erro estimado $\hat{\epsilon} = 0,00224$. Simultaneamente a este valor de q_c obtivemos o valor estimado de $1/\nu z = 0,65$.

Assim, pelo método de estimação dos resíduos encontramos $1/\nu z = 0,65$ e $q_c = 0,177238$, com o resíduo de $0,00224$. Uma forma de verificar se estas estimativas são os valores verdadeiros que satisfazem a equação (3.16) é utilizar a técnica de colapsar os dados da Seção 3.1.1.

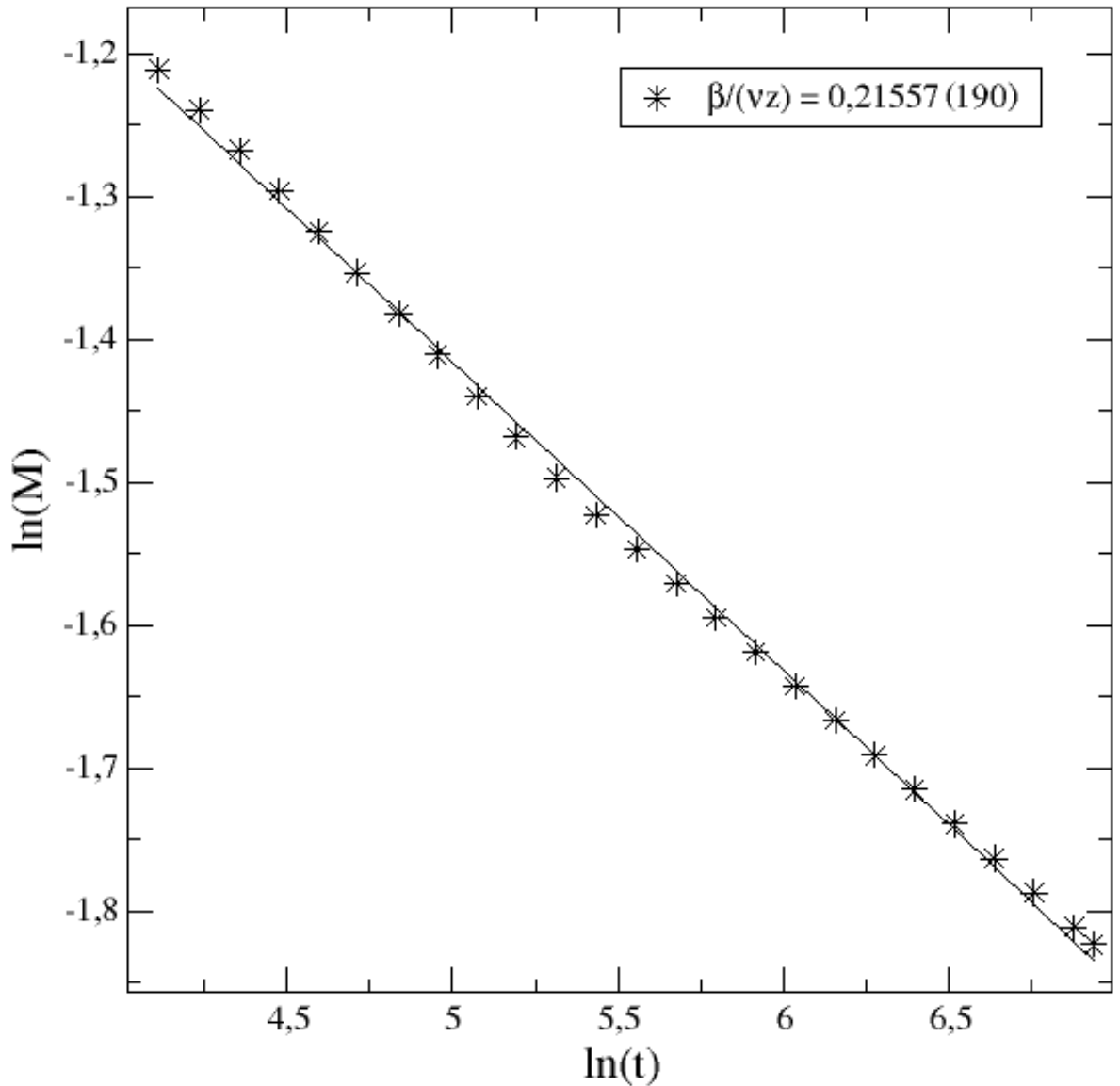


Figura 39: Gráfico dos dados obtidos por interpolação linear da magnetização em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, para $q = 0,177238$, para a rede cúbica $L = 1024$. Os dados foram suavizados utilizando Regularização Tikhonov e a reta é um ajuste linear dos dados interpolados.

A Figura 44 ilustra os dados obtidos da equação (3.9) com a mudança de escala $x = t^{1/\nu z}(q - q_c)/q_c$ para adequar-se a equação (3.16), para os valores dos parâmetros $1/\nu z = 0,65$ e $q_c = 0,177226$. Podemos observar que ajustamos corretamente o valor de q_c e do expoente $1/\nu z$, pois os dados da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada de τ colapsaram em uma única curva para $\tilde{\Psi}(x)$. Ainda, de acordo com a mesma figura, obtemos uma para $\beta/\nu z \cong 0,215252$. Neste tipo de análise, as estimativas

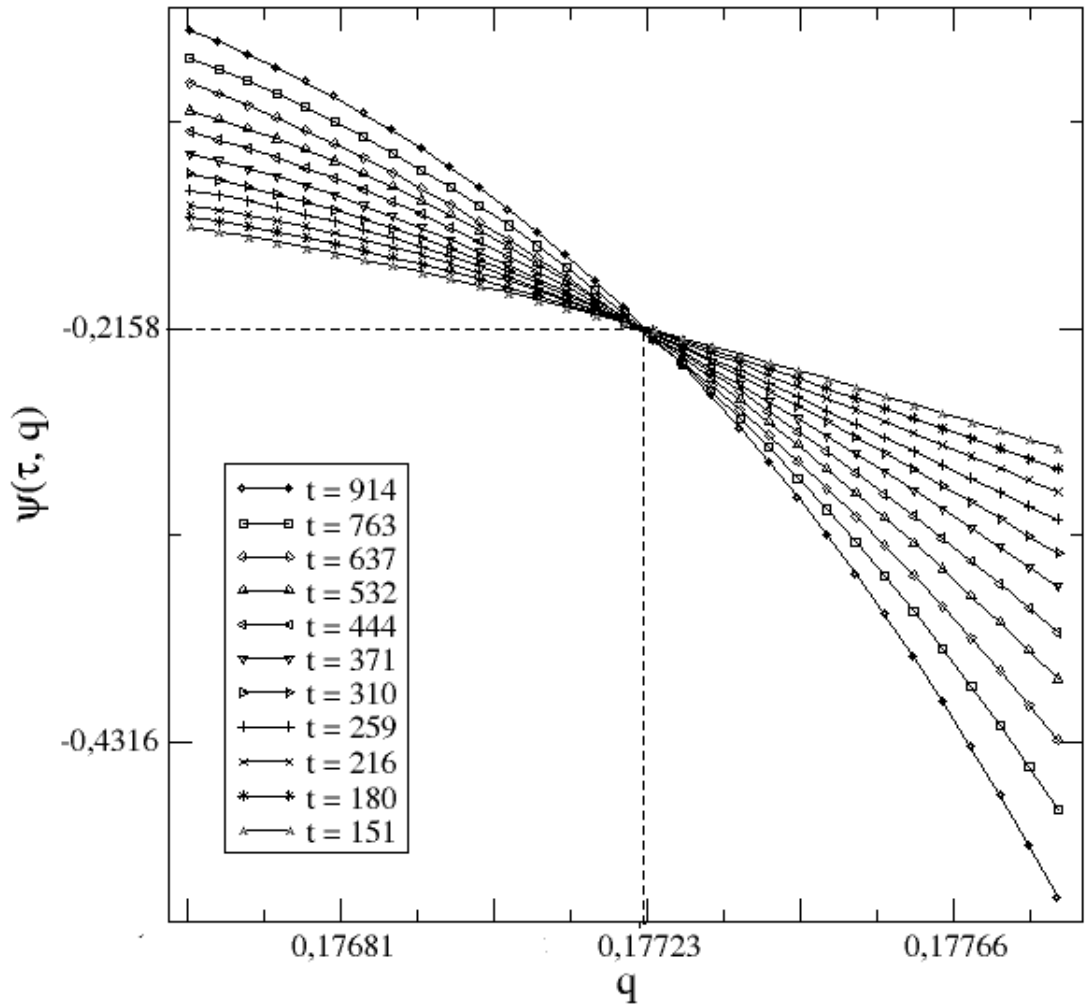


Figura 40: Gráfico da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo do MVMC, para diferentes valores do ruído, para $L = 1024$.

são mais acuradas pois os valores obtidos são igualmente bons para os diferentes instantes de tempo. Entretanto, não utilizamos este valor estimado do expoente pois não calculamos a barra de incerteza do expoente $\beta/\nu z$ nos dados colapsado. Então utilizaremos o valor estimado de $\beta/\nu z = 0,2155(19)$, que consta na Figura 39.

5.2.4 Comportamento do comprimento de correlação

A Figura 45 ilustra os dados para o valor do ruído crítico $q_c = 0,177226$. Para obtermos os dados do comprimento de correlação ξ , para o valor de $q_c = 0,177226$,

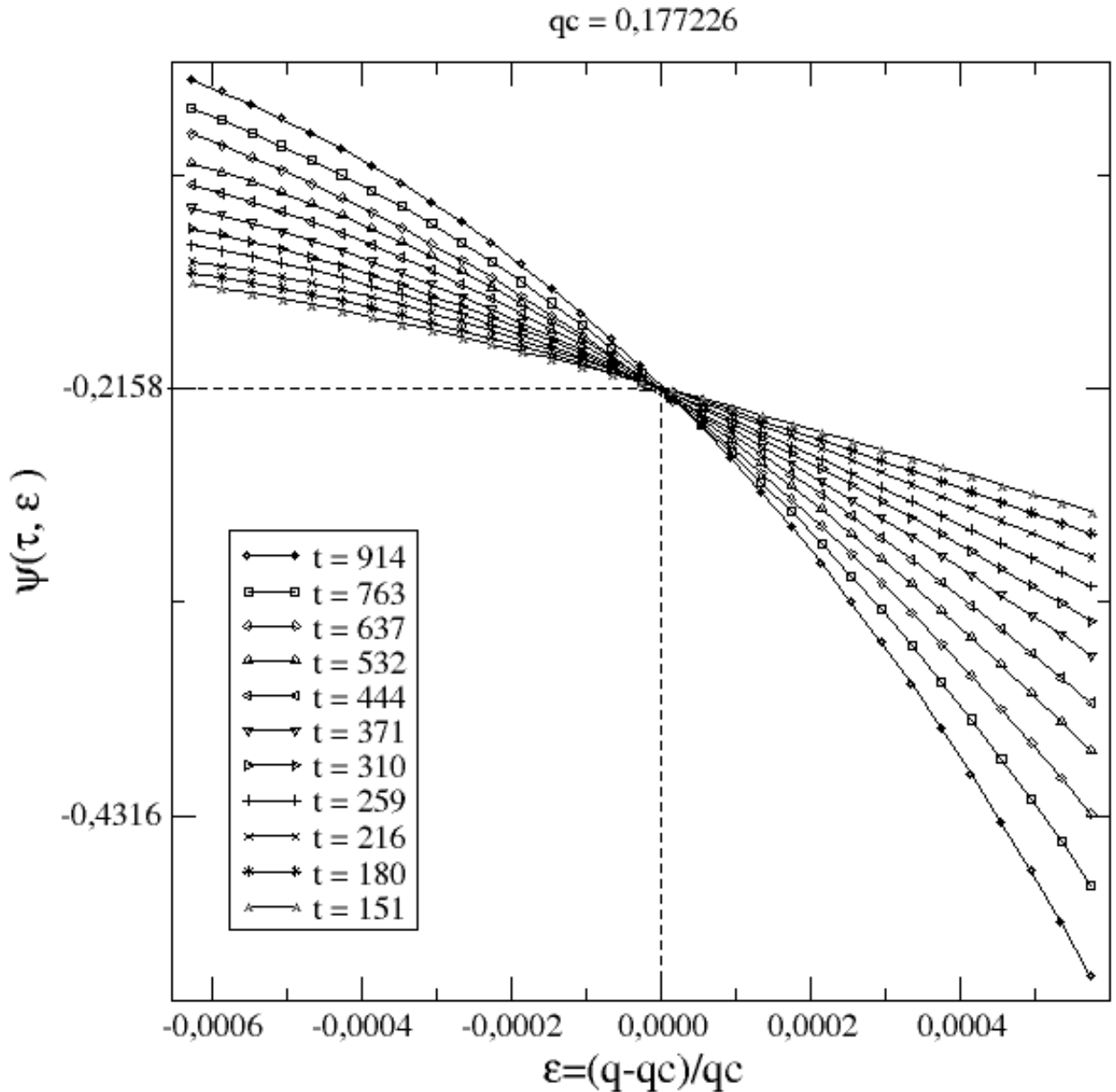


Figura 41: Gráfico da derivada do logaritmo da magnetização em função da derivada do logaritmo do tempo do MVMC, para os valores extremos do ruído e para os valores próximos a região crítica, para $L = 1024$.

inicialmente, utilizamos a técnica de reamostragem Jackknife (JONES, 1974) para diminuir as discrepâncias entre as médias dos dados da equação (3.25), em seguida suavizamos as curvas utilizando Tikhonov (LUBANSKY et al., 2006), em seguida fizemos uma interpolação linear, nos dados suavizados, a partir de $\ln(t) = 5,5 = 245$ MCS para obtermos o valor do expoente dinâmico z , e finalizamos com um ajuste linear aos dados interpolados.

De acordo com a equação (3.26), em $q = q_c$, o coeficiente angular obtido no ajuste

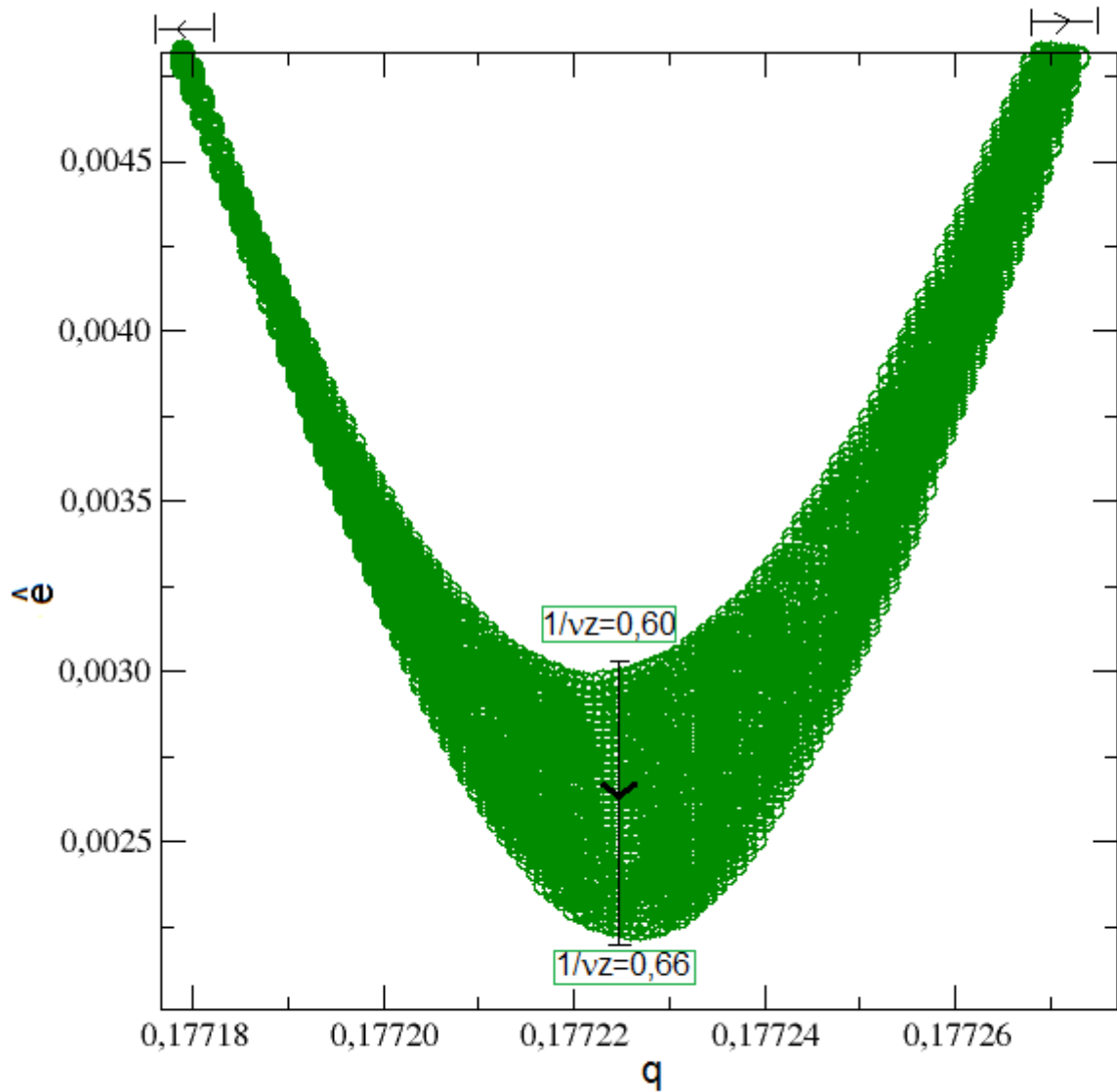


Figura 42: Gráfico das estimações dos resíduos $\hat{\epsilon}$ em função dos ruídos q , para diferentes valores $1/\nu z$, do MVMD para a rede cúbica $L = 1024$.

destes dados é igual a $-3/2z = 0,607(11)$. A Figura 45 ilustra um ajuste linear dos dados interpolados, para $q = 0,177226$. O valor estimado de $z = 2,419(11)$.

A Tabela 5 exhibe os valores estimados dos expoentes críticos estáticos do MVMD comparados com os valores de outros dois modelos com a mesma dinâmica (ACUÑA-LARA; SASTRE, 2012) e (YANG; KIM; KWAK, 2008), no equilíbrio. Comparando os expoentes críticos estáticos obtidos do MVMD com os do modelo Ising do artigo (CAMPBELL; LUNDOW, 2011) observamos que o nosso modelo pertence a mesma classe de universalidade do Ising, embora os dois modelos sejam diferentes. Nesta Tabela 5, observamos que

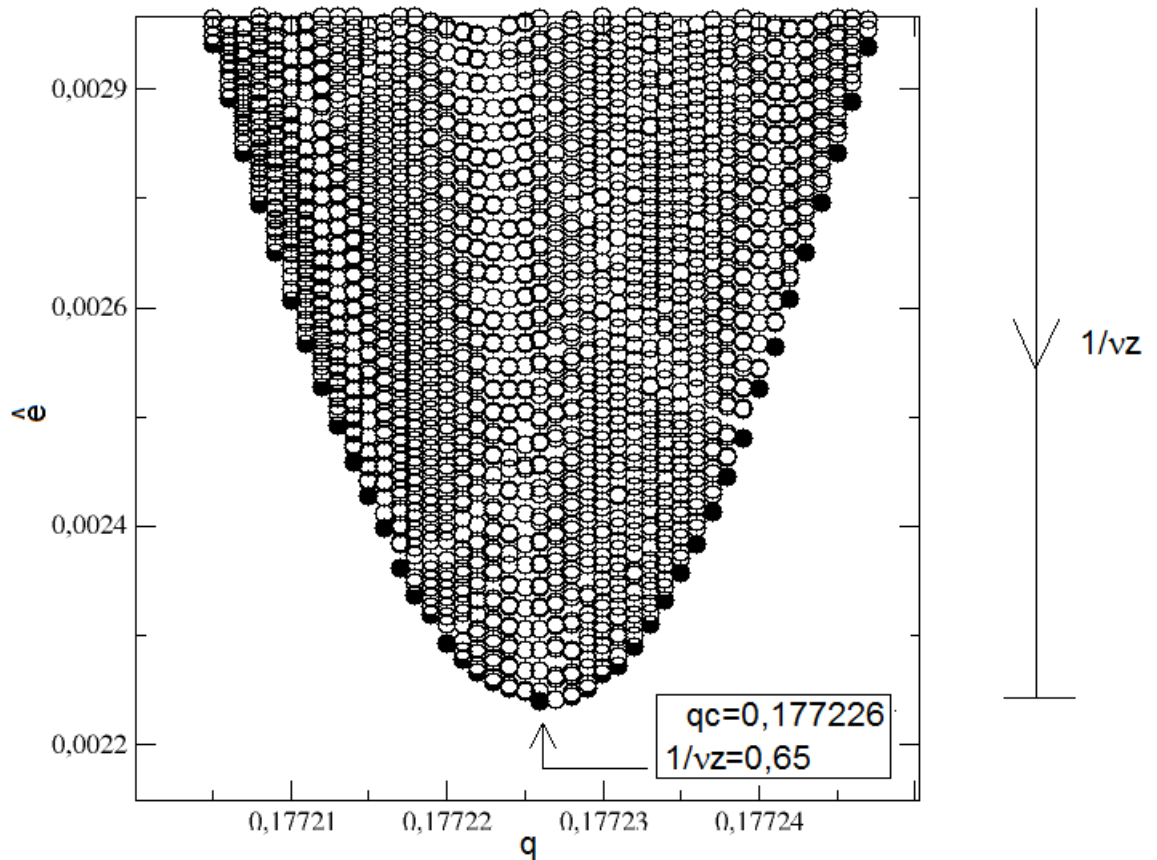


Figura 43: Gráfico das estimações dos resíduos \hat{e} em função dos ruídos q , para diferentes valores $1/\nu_z$, do MVMD para a rede cúbica $L = 1024$.

com as técnicas utilizadas, neste trabalho, as estimativas obtidas dos expoentes críticos do MVMD estão em concordância com os valores dos expoentes dos outros artigos, que constam na Tabela 5.

Comparando os valores dos expoentes críticos estáticos obtidos, do modelo proposto, com os valores que constam na Tabela 5 inferimos que a classe de universalidade a qual o MVMD em três dimensões, fora do equilíbrio, pertence é a mesma do modelo de Ising em três dimensões, no equilíbrio. Esta análise foi uma questão levantada no artigo de (YANG; KIM; KWAK, 2008), que realizou simulações Monte Carlo para o modelo do votante majoritário, em redes regulares de três até sete dimensões. No referido trabalho, descobriram que os expoentes críticos diferem do Ising a partir da sexta dimensão ($d=6$). Com base nesse resultado, eles sugerem que a dimensão crítica do modelo do votante majoritário seja 6, em vez de 4. Este resultado do trabalho (YANG; KIM; KWAK, 2008) é importante e precisa ser verificado, pois isso implica na existência de uma nova classe de universalidade

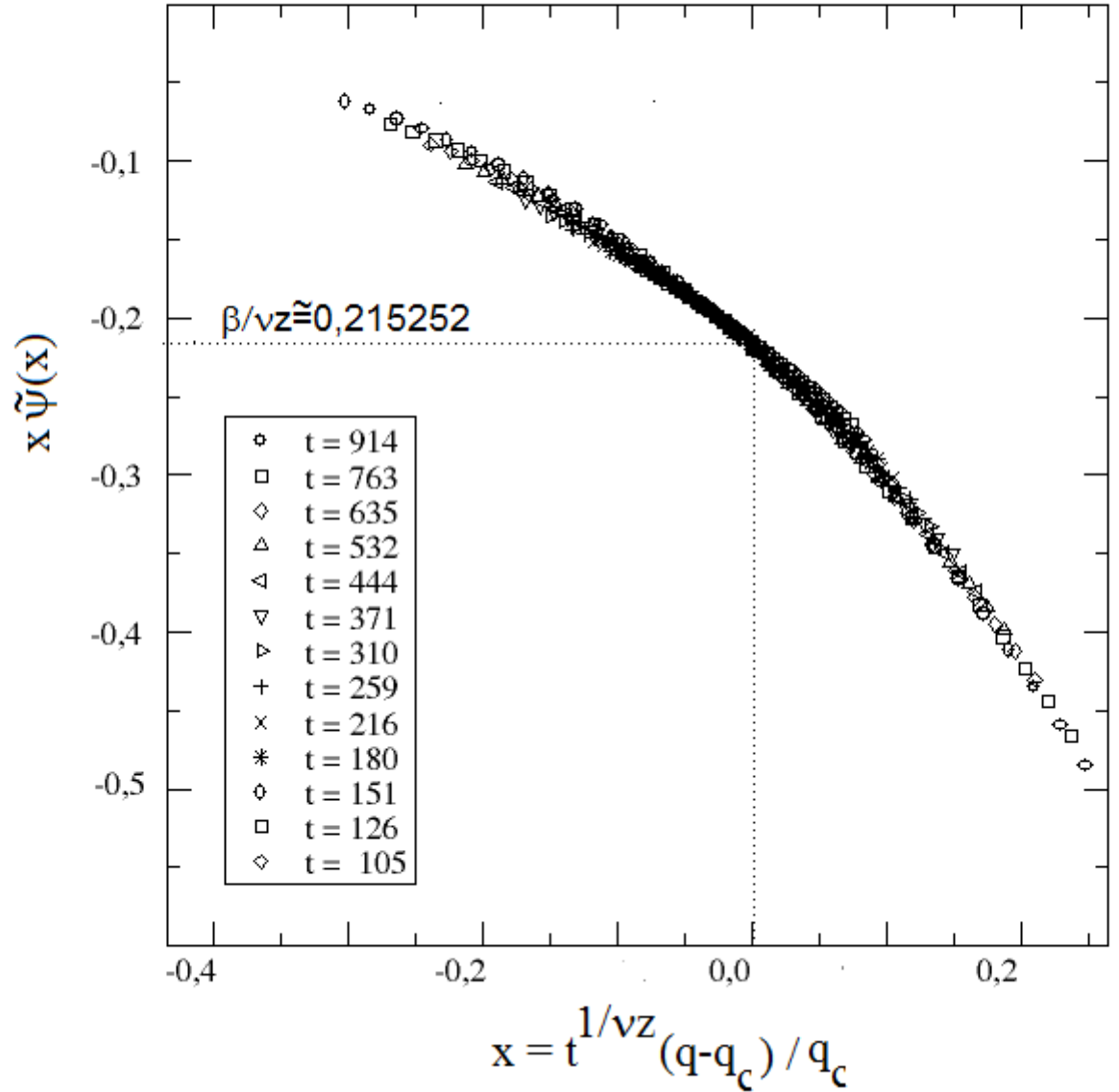


Figura 44: Gráfico do colapso de $\tilde{\Psi}(x)$ em função de x , para diferentes instantes de tempos do MVMD, para a rede cúbica $L = 1024$.

para sistemas de spins Ising, em redes regulares. Ainda nesse artigo, a relação de hiperscala não está satisfeita, de acordo com os expoentes críticos descritos para o caso da rede cúbica. Então, o mesmo modelo foi investigado por (ACUÑA-LARA; SASTRE, 2012), para redes regulares tridimensionais, no equilíbrio e com fator de correção de escala; e agora investigado neste trabalho, fora do equilíbrio e sem fator de correção de escala.

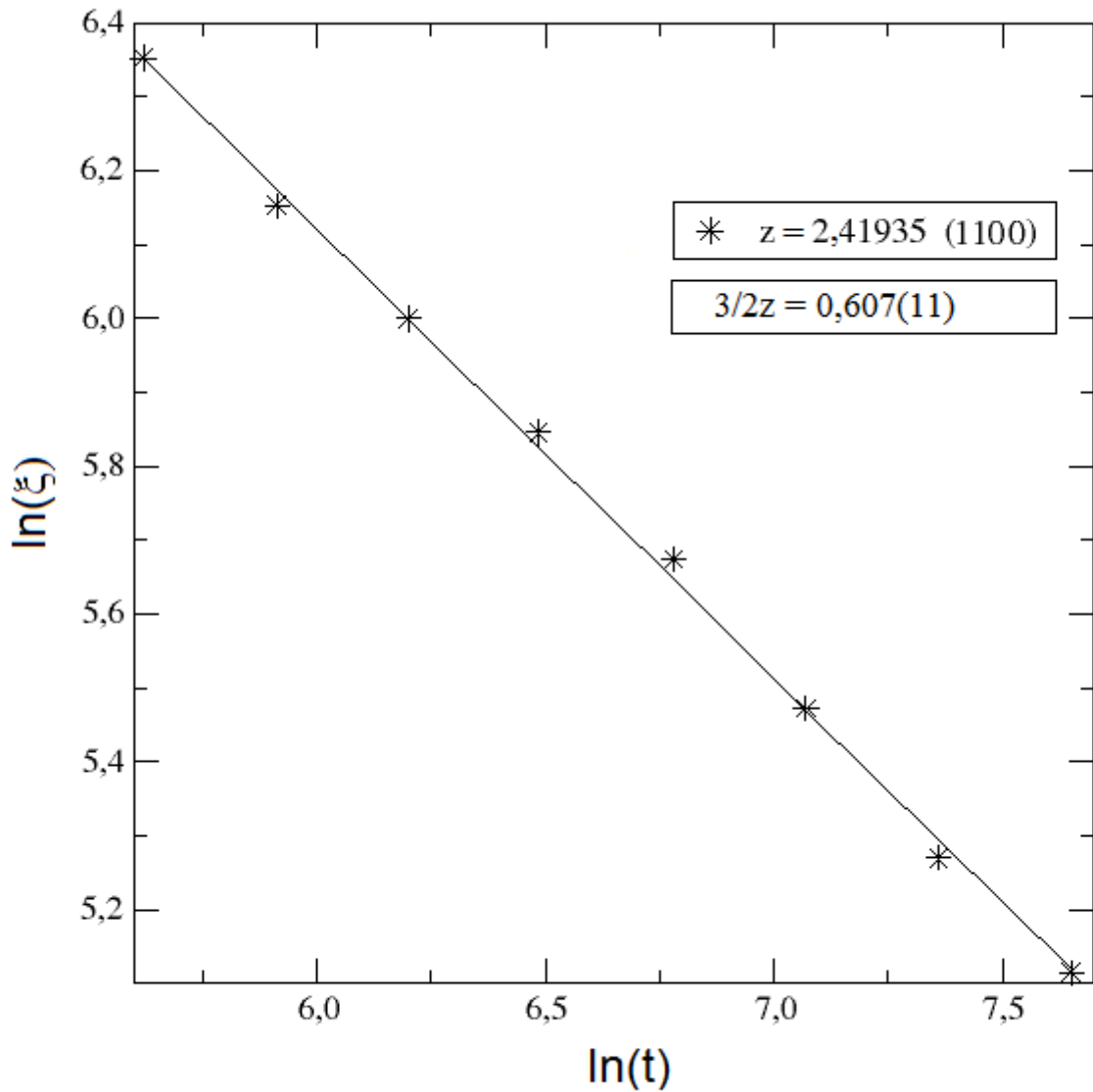


Figura 45: Gráfico do comprimento de correlação em função do tempo do MVMD, na escala duplo-logarítmica, obtido por interpolação linear para o valor de $q = 0,177238$, para a rede cúbica $L = 1024$.

Tabela 5: Valores dos expoentes do modelo do votante majoritário discreto em três dimensões, para $L = 1024$.

	(MVMD)	AS ⁶	Yang ⁷	Ising ⁸
β	0,332(3)	0,331(34)	0,38(1)	0,3267(2)
γ	1,2867(14)	1,22(23)	1,32(3)	1,2374(4)
ν	0,635(5)	0,626(11)	0,63(1)	0,6302(11)

A Figura 46 ilustra as estimativas para o expoente β obtidas deste presente trabalho, e por outros trabalhos, que constam na figura. Ainda na figura, podemos observar que o valor encontrado nesse trabalho coincide com o valor médio obtido pelo trabalho (ACUÑA-LARA; SASTRE, 2012) e com a estimativa do artigo de (CAMPBELL; LUNDOW, 2011). A barra de incerteza do presente trabalho é muito pequena, pois indica a precisão do valor estimado, bem como a qualidade dos dados do MVMD.

A Figura 47 ilustra as estimativas para o expoente ν obtidas do MVMD e de outros modelos, indicados pelos autores na ilustração. Ainda na figura, podemos observar que a estimativa dos expoentes críticos deste trabalho coincide com todas as referências citadas aqui. A barra de incerteza do presente trabalho expressa a confiabilidade dos ajustes, bem como a qualidade dos dados do MVMD.

⁶(ACUÑA-LARA; SASTRE, 2012)

⁷(YANG; KIM; KWAK, 2008)

⁸(CAMPBELL; LUNDOW, 2011)

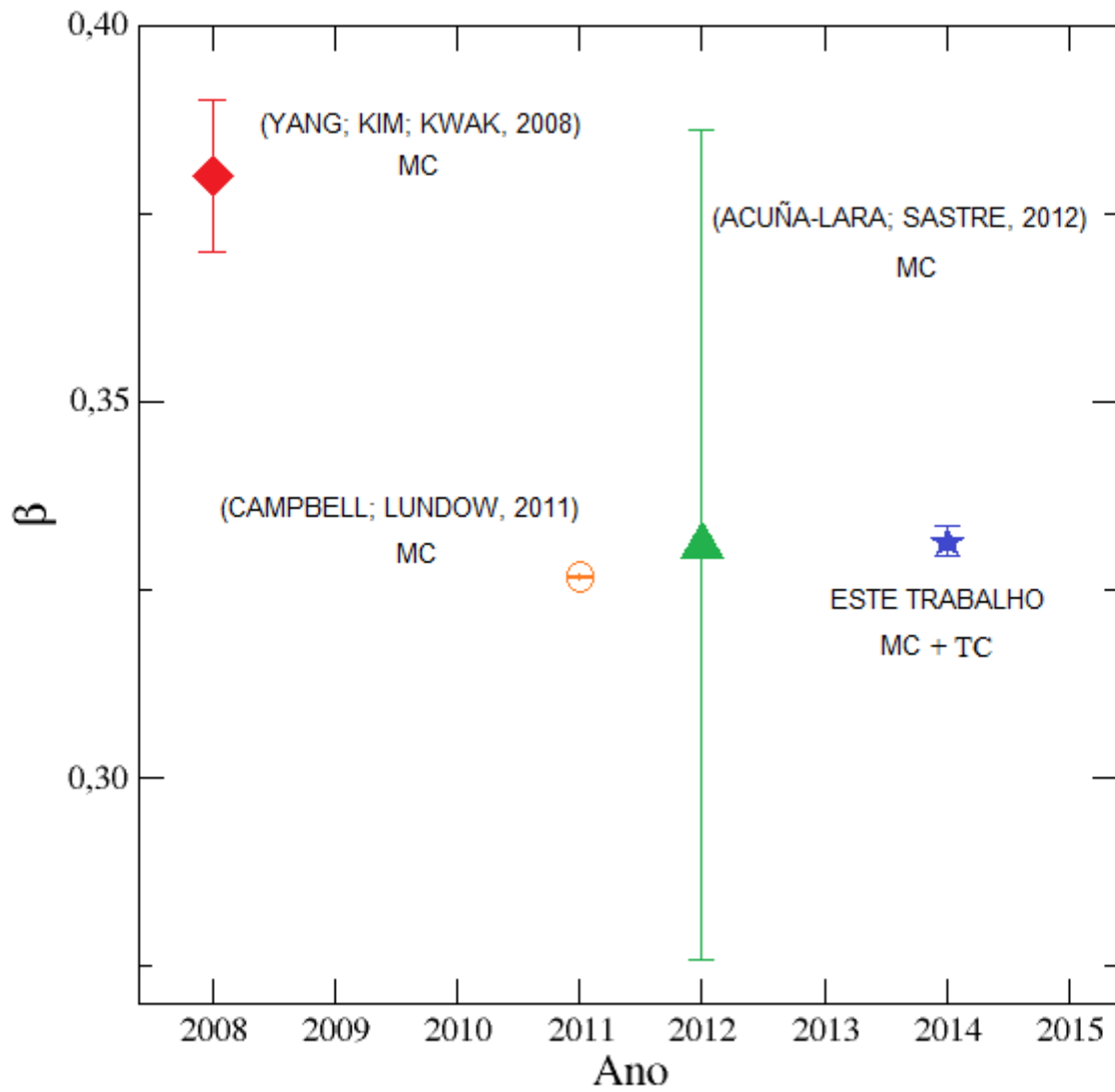


Figura 46: Gráfico dos valores estimados do expoente β e a barra de incerteza, obtidos por diferentes autores. A ilustração em vermelho indica o valor estimado do expoente crítico estático β , do modelo Ising em três dimensões, no equilíbrio, com sua barra de incerteza. As outras figuras (laranja, verde e azul) indicam os valores estimados do expoente β para o modelo do votante majoritário discreto, em três dimensões.

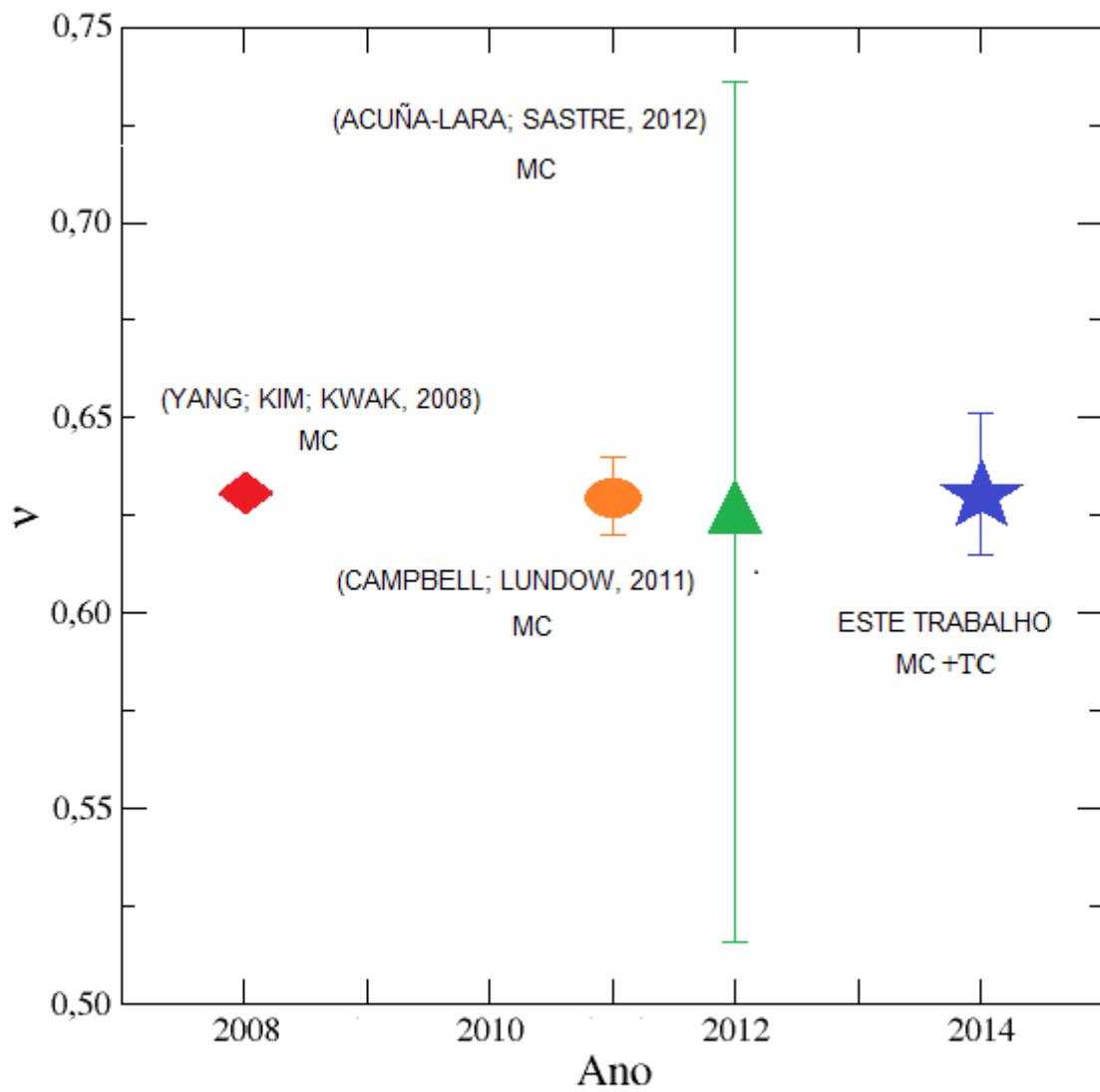


Figura 47: Gráfico dos valores estimados do expoente ν e a barra de incerteza, obtidos por diferentes autores.

6 Conclusão

Estudamos o comportamento do modelo do voto da maioria contínuo na rede cúbica, com ruído. As variáveis dinâmicas do modelo são representadas por rotores clássicos bidimensionais similares àquelas de um modelo xy clássico para um sistema magnético. A regra de evolução dinâmica corresponde a uma generalização da regra da maioria para sistemas discretos com um parâmetro de ruído que determina a probabilidade de um dado agente preferir se alinhar com seus vizinhos mais próximos. Em outras palavras, o ruído indica o quão um indivíduo é suscetível a mudanças de opiniões, atitudes, etc., do ponto de vista de dinâmica social.

Realizamos simulações Monte Carlo de tempos curtos do sistema para diferentes valores de ruído. Observamos que para valores de ruído, q abaixo de um certo valor crítico q_c , o sistema possui uma fase ordenada. Na qual a magnetização é finita. Indicando uma ordem preferencial entre os agentes sociais. Neste modelo de sociedade (em três dimensões), sempre que os valores dos ruídos forem menores que o valor do ruído capaz de destruir a ordem $q_c = 0.189708$ (3), haverá sempre uma parcela de indivíduos inclinados numa direção comum ao grupo. Em contrapartida, um valor de ruído acima de q_c é capaz de destruir o qualquer possibilidade de consenso. Em outras palavras, se os indivíduos dessa sociedade possuírem um grau de resistência à tendência da maioria da ordem de 19% a desordem é estabelecida, nesse tipo de modelo de dinâmica social.

Em princípio, poderíamos pensar que o aumento do número de opções dadas aos agentes de uma sociedade favoreceria a falta de consenso. Pois, numa ditadura os indivíduos não teriam escolhas e a ordem seria estabelecida através de mecanismos coercitivos. Numa modelagem física, tais mecanismos estariam associados a campos externos. A ordem resultaria em um efeito coletivo, porém não cooperativo. Ou melhor, cada indivíduo se acopla e responde ao campo e não aos seus pares. Quanto mais opções tenham os membros de uma sociedade mais livre esta parece. No limite em que o número de opções é infinito, teríamos uma sociedade completamente livre ou anárquica. Neste sentido, o modelo aqui estudado contrasta com o votante majoritário discreto. A interação/cooperação entre os

indivíduos, mesmo com uma infinidade de possibilidade de escolha, pode levar o sistema a um estado de consenso.

De acordo com resultados dos expoentes críticos estáticos deste trabalho e de outros trabalhos, que foram mostrados na Tabela 4, o MVMC pertence a mesma classe de universalidade do modelo xy usual, no equilíbrio, em três dimensões.

Nós também simulamos a versão discreta de dois estados (Ising) do modelo do votante majoritário em três dimensões. Os resultados dos expoentes críticos estáticos, mostrados na Tabela 5, indicam que a classe de universalidade deste último modelo é a mesma que a do modelo de Ising em três dimensões, no equilíbrio. Isto está de acordo com os resultados recentes obtidos por simulações Monte Carlo no equilíbrio de (ACUÑA-LARA; SASTRE, 2012), (YANG; KIM; KWAK, 2008) e (CAMPBELL; LUNDOW, 2011).

Por fim, ressaltamos que o método de analisar dados de simulações Monte Carlo de tempos curtos, aqui apresentado, permite obter os parâmetros críticos de sistemas de partículas interagentes com precisão comparável a outros métodos convencionais (LANDAU; BINDER, 2009).

Trabalho futuro: verificar se os expoentes críticos do MVMD em quatro dimensões é campo médio, (YANG; KIM; KWAK, 2008).

Referências

- ACUÑA-LARA, A. L.; SASTRE, F. Critical phenomena of the majority voter model in a three-dimensional cubic lattice. **Physical Review E**, APS, v. 86, n. 4, p. 041123, 2012.
- ACUÑA-LARA, A. L.; SASTRE, F.; VARGAS-ARRIOLA, J. R. Critical phenomena in the majority voter model on two-dimensional regular lattices. **Physical Review E**, APS, v. 89, n. 5, p. 052109, 2014.
- ADAMIC, L.; ADAR, E. How to search a social network. **Social Networks**, Elsevier, v. 27, n. 3, p. 187–203, 2005.
- AMBLARD, F.; DEFFUANT, G. The role of network topology on extremism propagation with the relative agreement opinion dynamics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 343, p. 725–738, 2004.
- AXELROD, R. The dissemination of culture a model with local convergence and global polarization. **Journal of conflict resolution**, Sage Publications, v. 41, n. 2, p. 203–226, 1997.
- AXELROD, R.; BENNETT, D. S. A landscape theory of aggregation. **British journal of political science**, Cambridge Univ Press, v. 23, n. 02, p. 211–233, 1993.
- BALL, P. **Critical Mass: How One Thing Leads to Another**. [S.l.: s.n.], 2004. 179–181 p.
- BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999.
- BHATTACHARJEE, S. M.; SENO, F. A measure of data collapse for scaling. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 34, n. 33, p. 6375, 2001.
- BUCHANAN, M. **The social atom**. Bloomsbury, New York, NY, USA, 2007.
- CAMPBELL, I.; LUNDOW, P. H. Extended scaling analysis of the $s=1/2$ Ising ferromagnet on the simple cubic lattice. **Physical Review B**, APS, v. 83, n. 1, p. 014411, 2011.
- CAMPOSTRINI, M. et al. Critical behavior of the three-dimensional xy universality class. **Physical Review B**, APS, v. 63, n. 21, p. 214503, 2001.
- CAMPOSTRINI, M. et al. Theoretical estimates of the critical exponents of the superfluid transition in ^4He by lattice methods. **Physical Review B**, APS, v. 74, n. 14, p. 144506, 2006.

- CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. **Reviews of modern physics**, APS, v. 81, n. 2, p. 591, 2009.
- CHAKRABARTI, B. K.; CHAKRABORTI, A.; CHATTERJEE, A. **Econophysics and sociophysics: trends and perspectives**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- CHAVES, M.; SANTOS, M. Scaling properties of the cluster distribution of a critical nonequilibrium model. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 262, n. 3, p. 420–427, 1999.
- CHENG, J.; YAMAMOTO, M. One new strategy for a priori choice of regularizing parameters in tikhonov's regularization. **Inverse Problems**, IOP Publishing, v. 16, n. 4, p. L31–L38, 2000.
- CLIFFORD, P.; SUDBURY, A. A model for spatial conflict. **Biometrika**, Biometrika Trust, v. 60, n. 3, p. 581–588, 1973.
- COOK, R. D. Detection of influential observation in linear regression. **Technometrics**, JSTOR, p. 15–18, 1977.
- COSTA, L.; SOUZA, A. J. de. Continuous majority-vote model. **Physical Review E**, APS, v. 71, n. 5, p. 056124, 2005.
- COX, J. T.; GRIFFEATH, D. Diffusive clustering in the two dimensional voter model. **The Annals of Probability**, JSTOR, p. 347–370, 1986.
- CROCHIK, L.; TOMÉ, T. Entropy production in the majority-vote model. **Physical Review E**, APS, v. 72, n. 5, p. 057103, 2005.
- CROKIDAKIS, N.; OLIVEIRA, P. M. C. de. Impact of site dilution and agent diffusion on the critical behavior of the majority-vote model. **Physical Review E**, APS, v. 85, n. 4, p. 041147, 2012.
- DEFFUANT, G. Comparing extremism propagation patterns in continuous opinion models. **Journal of Artificial Societies and Social Simulation**, v. 9, n. 3, 2006.
- DEFFUANT, G. et al. Mixing beliefs among interacting agents. **Advances in Complex Systems**, World Scientific, v. 3, n. 01n04, p. 87–98, 2000.
- DROUFFE, J.; GODRECHE, C. Phase ordering and persistence in a class of stochastic processes interpolating between the ising and voter models. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 32, n. 2, p. 249, 1999.
- ENGL, H. Discrepancy principles for tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. **Journal of optimization theory and applications**, Springer, v. 52, n. 2, p. 209–215, 1987.
- FRACHEBOURG, L.; KRAPIVSKY, P. Exact results for kinetics of catalytic reactions. **Physical Review E**, APS, v. 53, n. 4, p. R3009, 1996.
- FREITAS, A. R. d. Procedures evaluation in the estimates of genetic parameters of cattle. **Revista Brasileira de Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 29, n. 1, p. 94–102, 2000.

- FRIEDLI, S. Dinâmica estocástica: três exemplos. **Universidade Federal de Minas Gerais**, 2011.
- GALAM, S. Minority opinion spreading in random geometry. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 25, n. 4, p. 403–406, 2002.
- GALAM, S. Modelling rumors: the no plane pentagon french hoax case. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications**, Elsevier, v. 320, p. 571–580, 2003.
- GALAM, S. Sociophysics: A review of galam models. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 19, n. 03, p. 409–440, 2008.
- GALAM, S.; GEFEN, Y.; SHAPIR, Y. Sociophysics: A new approach of sociological collective behaviour. i. mean-behaviour description of a strike. **Journal of Mathematical Sociology**, Taylor & Francis, v. 9, n. 1, p. 1–13, 1982.
- GALAM, S.; MOSCOVICI, S. **Towards a Theory of Collective Phenomena: Consensus and Attitude Changes in Groups**. [S.l.: s.n.], 1991a. 49–74 p.
- GALAM, S.; MOSCOVICI, S. A theory of collective decision making in hierarchical and non-hierarchical groups. **Journal of Physics**, v. 13, p. 93–103, 1993.
- GALAM, S.; MOSCOVICI, S. Towards a theory of collective phenomena. ii: Conformity and power. **European journal of social psychology**, Wiley Online Library, v. 24, n. 4, p. 481–495, 1994.
- GALAM, S.; MOSCOVICI, S. Towards a theory of collective phenomena. iii: Conflicts and forms of power. **European journal of social psychology**, Wiley Online Library, v. 25, n. 4, p. 217–229, 1995.
- GOLUB, G. H.; HANSEN, P. C.; O'LEARY, D. P. Tikhonov regularization and total least squares. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, SIAM, v. 21, n. 1, p. 185–194, 1999.
- GOMIERO, L. M.; CARMASSI, A. L.; BRAGA, F. M. d. S. Crescimento e mortalidade de brycon opalinus (characiformes, characidae) no parque estadual da serra do mar, mata atlântica, estado de são paulo. **Biota Neotropica**, SciELO Brasil, v. 7, n. 1, p. 22–26, 2007.
- HOLLEY, R. A.; LIGGETT, T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. **The annals of probability**, JSTOR, p. 643–663, 1975.
- HUSE, D. A. Remanent magnetization decay at the spin-glass critical point: A new dynamic critical exponent for nonequilibrium autocorrelations. **Physical Review B**, APS, v. 40, n. 1, p. 304, 1989.
- JANSSEN, H.; SCHAUB, B.; SCHMITTMANN, B. New universal short-time scaling behaviour of critical relaxation processes. **Zeitschrift für Physik B Condensed Matter**, Springer, v. 73, n. 4, p. 539–549, 1989.
- JONES, H. L. Jackknife estimation of functions of stratum means. **Biometrika**, Biometrika Trust, v. 61, n. 2, p. 343–348, 1974.

- JONES, J. H.; HANDCOCK, M. S. Social networks (communication arising): Sexual contacts and epidemic thresholds. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 423, n. 6940, p. 605–606, 2003.
- KELSO, J. S. et al. Phase transitions and critical behavior in human bimanual coordination. **Am J Physiol**, v. 246, n. 6 Pt 2, p. R1000–R1004, 1984.
- KRAPIVSKY, P. Kinetics of monomer-monomer surface catalytic reactions. **Physical Review A**, APS, v. 45, n. 2, p. 1067, 1992.
- KRECH, M.; LANDAU, D. Spin-dynamics simulations of the three-dimensional xy model: Structure factor and transport properties. **Physical Review B**, APS, v. 60, n. 5, p. 3375, 1999.
- LANDAU, D. P.; BINDER, K. **A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics**. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- LENZ, W. E. ising. **Z. Phys.**, Z. Phys, v. 31, n. 234, 1925.
- LI, Z.-B.; RITSCHER, U.; ZHENG, B. Monte carlo simulation of universal short-time behaviour in critical relaxation. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 27, n. 21, p. L837, 1994.
- LIGGETT, T. M. **Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes**. [S.l.]: Springer, 1999.
- LIMA, F. Three-state majority-vote model on square lattice. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 391, n. 4, p. 1753–1758, 2012.
- LIMA, F. W. S. Majority-vote model on (3, 122), (4, 6, 12) and (4, 82) archimedean lattices. **Modern Physics**, 2013.
- LIPA, J. et al. Specific heat of helium confined to a 57- μ m planar geometry near the lambda point. **Physical review letters**, APS, v. 84, n. 21, p. 4894, 2000.
- LÔBO, R. N. B. Metodologias aplicadas na estimativa de parâmetros genéticos e avaliações genéticas de caprinos e ovinos. In: IN: SEMANA DA CAPRINOCULTURA E OVINOCULTURA BRASILEIRAS, 4., 2004, SOBRAL. A PESQUISA E OS AVANÇOS TECNOLÓGICOS CONTRIBUINDO PARA O FUTURO DA CAPRINO-OVINOCULTURA BRASILEIRA:[ANAIS]. SOBRAL: EMBRAPA CAPRINOS, 2004. 13 F. 1 CD-ROM. **Embrapa Caprinos e Ovinos-Artigo em anais de congresso (ALICE)**. [S.l.], 2008.
- LUBANSKY, A. et al. A general method of computing the derivative of experimental data. **AIChE journal**, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 323–332, 2006.
- LUO, H.; SCHÜLKE, L.; ZHENG, B. Dynamic approach to the fully frustrated xy model. **arXiv preprint cond-mat/9801253**, 1998.
- MAJORANA, E. **J. Quantit.**, v. 58, 1942.
- MAJORANA, E. **J. Quantit.**, v. 5, n. 2, p. 133, 2005.

- MELO, D. F. F.; PEREIRA, L. F. C.; MOREIRA, F. G. B. The phase diagram and critical behavior of the three-state majority-vote model. **Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, 2010.
- MENDES, J. F.; SANTOS, M. A. Short time dynamics of a two dimensional majority vote model. **arXiv preprint cond-mat/9707244**, 1997.
- OKANO, K. et al. Universality and scaling in short-time critical dynamics. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 485, n. 3, p. 727–746, 1997.
- OLIVEIRA, M. Isotropic majority-vote model on a square lattice. **Journal of Statistical Physics**, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 66, n. 1-2, p. 273–281, 1992. ISSN 0022-4715.
- OLIVEIRA, M. D.; MENDES, J.; SANTOS, M. Nonequilibrium spin models with ising universal behaviour. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 26, n. 10, p. 2317, 1993.
- ORLÉAN, A. Bayesian interactions and collective dynamics of opinion: Herd behavior and mimetic contagion. **Journal of Economic Behavior & Organization**, Elsevier, v. 28, n. 2, p. 257–274, 1995.
- PEREIRA, L. F.; MOREIRA, F. B. Majority-vote model on random graphs. **Physical Review E**, APS, v. 71, n. 1, p. 016123, 2005.
- POGORELOV, A.; SUSLOV, I. On the critical exponents for the λ transition in liquid helium. **JETP Letters**, Springer, v. 86, n. 1, p. 39–45, 2007.
- PRIVMAN, V. Finite-size scaling theory. **Finite Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems**, Singapore: World Scientific, v. 1, 1990.
- QUEIROZII, P. T. S. A. de. Modelos matemáticos utilizados para descrever curvas de crescimento em aves aplicados ao melhoramento genético animal. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 39, n. 7, p. 2261–2269, 2009.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2013. ISBN 3-900051-07-0. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>.
- RITSCHHEL, U.; CZERNER, P. Microscopic nonuniversality versus macroscopic universality in algorithms for critical dynamics. **Physical Review E**, APS, v. 55, n. 4, p. 3958, 1997.
- SANTOS, M. A.; TEIXEIRA, S. Anisotropic voter model. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 78, n. 3-4, p. 963–970, 1995.
- SCHELLING, T. C. **J. Math. Sociol.**, Univ. of South Carolina Press, Columbia, v. 1, n. 2, p. 143, 1971.
- SCHEUCHER, M.; SPOHN, H. A soluble kinetic model for spinodal decomposition. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 53, n. 1-2, p. 279–294, 1988.
- SCHÜLKE, L.; ZHENG, B. The short-time dynamics of the critical potts model. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 204, n. 3, p. 295–298, 1995.

- STANLEY, H. E. Introduction to phase transitions and critical phenomena. **Oxford University Press**. ISBN-10: 0195053168. ISBN-13: 9780195053166, v. 1, p. 336, 1987.
- STAUFFER, D. Kinetics of clusters in ising models. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 186, n. 1, p. 197–209, 1992.
- STAUFFER, D. The sznajd model of consensus building with limited persuasion. **Cornell University Library**, T. B. Bagenal ed., Unwin Brothers Ltd. London, v. 1, n. 0111419, 2001.
- STAUFFER, D. Better being third than second in a search for a majority opinion. **Advances in Complex Systems**, World Scientific, v. 5, n. 01, p. 97–100, 2002.
- STAUFFER, D. Frustration from simultaneous updating in sznajd consensus model. **arXiv preprint cond-mat/0207598**, 2002.
- STAUFFER, D. Int. j. mod. Phys. C, n. 13(7), p. 975, 2002a.
- STAUFFER, D. Int. j. mod. Phys. C, n. 13(3), p. 315, 2002b.
- STAUFFER, D.; MEYER-ORTMANN, H. Simulation of consensus model of deffuant et al. on a barabási–albert network. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 15, n. 02, p. 241–246, 2004.
- STRAUSS, R. H.; LIGGETT, M. T.; LANESE, R. R. Anabolic steroid use and perceived effects in ten weight-trained women athletes. **JAMA: the journal of the American Medical Association**, Am Med Assoc, v. 253, n. 19, p. 2871–2873, 1985.
- SZNAJD-WERON, K.; SZNAJD, J. Opinion evolution in closed community. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 11, n. 06, p. 1157–1165, 2000.
- TASSIER, T. A model of fads, fashions, and group formation. **Complexity**, Wiley Online Library, v. 9, n. 5, p. 51–61, 2004.
- TOME, T. **Irreversibilidade: modelos de rede com dinâmicas estocásticas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1996.
- TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. Short-time dynamics of critical nonequilibrium spin models. **Physical Review E**, APS, v. 58, n. 4, p. 4242, 1998.
- TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. **Dinâmica estocástica e irreversibilidade**. [S.l.]: Edusp, 2001.
- TURNER, P. Xmgrace, version 5.1. 19. **Center for Coastal and Land-Margin Research, Oregon Graduate Institute of Science and Technology, Beaverton, OR**, 2005.
- VILELA, A. L.; MOREIRA, F. B. "majority-vote model with different agents". **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 388, n. 19, p. 4171 – 4178, 2009. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843710900498>>.

WATTS, D. J.; DODDS, P. S.; NEWMAN, M. E. Identity and search in social networks. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 296, n. 5571, p. 1302–1305, 2002.

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of small-world networks. **nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998.

WEIDLICH, W. The statistical description of polarization phenomena in society. **British Journal of Mathematical and Statistical Psychology**, Wiley Online Library, v. 24, n. 2, p. 251–266, 1971.

XIA, Y. et al. One-dimensional nanostructures: synthesis, characterization, and applications. **Advanced materials**, Wiley Online Library, v. 15, n. 5, p. 353–389, 2003.

YANG, J.-S.; KIM, I.-m.; KWAK, W. Existence of an upper critical dimension in the majority voter model. **Physical Review E**, APS, v. 77, n. 5, p. 051122, 2008.

YEOMANS, J. M. **Statistical mechanics of phase transitions**. [S.l.]: Oxford University Press, 1992.

ZHAO, L. et al. Sierpinski rumor spreading model in social networks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 391, n. 7, p. 2444–2453, 2013.

ZHENG, B. Monte carlo simulations of short-time critical dynamics. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 12, n. 14, p. 1419–1484, 1998.