

Rodrigo Cruz Orellana León

**Modelos preditivos da variância de mercados financeiros
e análise de agrupamento das volatilidades**

Recife-PE

Fevereiro/2019



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Modelos preditivos da variância de mercados financeiros e análise de agrupamento das volatilidades

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 26/02/2019 pela comissão examinadora

Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira

Recife-PE

Fevereiro/2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

O66m Orellana León, Rodrigo Cruz.

Modelos preditivos da variância de mercados financeiros e análise de agrupamento das volatilidades/ Rodrigo Cruz Orellana León. – Recife, 2019.

176 f.: il.

Orientador(a): Tiago Alessandro Espínola Ferreira.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Recife, BR-PE, 2019.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Retorno 2. Análise de variância 3. Volatilidade 4. ARCH 5. GARCH I. Ferreira, Tiago Alessandro Espínola, orient. II. Título

CDD 310

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA
Modelos preditivos da variância de mercados financeiros e análise de agrupamento
das volatilidades

Rodrigo Cruz Orellana León

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 26/02/2019 pela comissão examinadora

Orientador:

Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antonio Samuel Alves da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco
(DEINFO-UFRPE)

Prof. Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco
(DEINFO-UFRPE)

Prof. Dr. Paulo Salgado Gomes de Mattos Neto
Universidade Federal de Pernambuco
(CIn/UFPE)

Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima
Universidade Politécnica de Pernambuco
(Poli/UPE)

Dedicado à República Federativa do Brasil

Agradecimentos

Ao meu orientador professor doutor Tiago Alessandro Espínola Ferreira, pela paciência e dedicação na orientação deste trabalho, pelo apoio e principalmente pela confiança que depositou em mim.

Ao coordenador do curso de Biometria e Estatística Aplicada professor doutor Moacyr Cunha Filho, pela orientação, pela dedicação e esforço pelo curso. Meu respeito e gratidão.

Aos professores do Programa de Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada da UFRPE, pelos conhecimentos transmitidos. Aos meus colegas de turma e do curso, pelas experiências trocadas e pelas lições aprendidas com cada um durante os quatro anos.

Ao professor Antonio Samuel Alves da Silva, pelo apoio, respeito e amizade.

Ao secretário Marco Santos, pela informação oferecida oportunamente, pelo respeito e compreensão.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões em prol do melhoramento deste trabalho.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, pela oportunidade de realização do meu doutorado.

A todos que de alguma forma contribuíram para o meu crescimento acadêmico e para realização deste trabalho.

Não há questões esgotadas, mas sim homens exaustos das questões.

Santiago Ramón e Cajal

Resumo

Os modelos de volatilidade ou modelos econométricos autorregressivos de heterocedasticidade condicional (ARCH), forneceram uma nova forma de compreender o tão estudado comportamento dos mercados financeiros através da premissa de que o retorno de um ativo não é correlacionado serialmente e que a variância condicional é uma função dos retornos passados ao quadrado. Neste trabalho, propõe-se a construção de modelos preditivos para a volatilidade dos retornos de 16 índices financeiros. Trata-se tanto de modelos puros da família ARCH, quanto de modelos compostos de média e variâncias condicional ARMA+ARCH. A metodologia geral utilizada é a de Box-Jenkins e de maneira específica, às propostas nos artigos seminais na construção de modelos ARCH e GARCH, artigos nos quais fundamenta-se o embasamento teórico deste trabalho. Mediante os modelos de volatilidade ajustados e a análise de agrupamento, consegue-se caracterizar o comportamento dos retornos logarítmicos dos preços diários de fechamento dos índices financeiros, cada um com 3861 observações no período de 11 de março de 1997 a 31 de outubro de 2016. Os índices financeiros modelados mediante modelos puros de variância condicional são: Brasil (BVSP), EUA (IXIC), EUA (DJI), Canadá (GSPTSE), China (HSI), China (SSE), França (FCHI), Suíça (SSMI), Alemanha (GDAX) e Áustria (ATX), sendo modelados pelo GARCH(1,1), exceto China (HSI) que é pelo GARCH(1,2). Os índices financeiros modelados mediante modelos compostos de média e variância condicional são: México (MXX), EUA (GSPC), Austrália (AORD), Malásia (KLSE), Japão (N225) e Bélgica (BFX), sendo ajustados pelos modelos ARMA(1,1)+EGARCH(2,3), ARMA(1,1)+EGARCH(2,2), ARMA(4,3)+EGARCH(2,2), ARMA(2,1)+EGARCH(4,4), ARMA(4,4)+EGARCH(2,2) e AR(1)+EGARCH(1,1), respectivamente. Todos os modelos ajustados, estão sob a suposição de que as inovações (resíduos) são provenientes de uma distribuição t de Student, pois resultaram ser de melhor ajuste que os modelos sob a suposição de que as inovações são provenientes de uma distribuição Gaussiana. Na análise de agrupamento, combinaram-se as medidas de distância “Euclidiana”, “Canberra” e “Manhattan” com o método de agrupamento “k-means”. A primeira combinação, aplicada aos retornos observados, agrupou os índices em relação à localização geográfica. A segunda, aplicada as previsões de retornos e variâncias, agrupou os índices em relação ao modelo ajustado e à proximidade da variância que apresentam, respectivamente. A última combinação aplicada às previsões da volatilidade, agrupou os índices em relação à proximidade do risco que apresentam. Como medida para o melhoramento desta modelagem, sugere-se o teste de outros modelos econométricos, assim como também outras funções de distribuição para as inovações.

Palavras-chaves: Retorno, Variância, Volatilidade, Risco, ARCH, GARCH, EGARCH, GJR+GARCH, ARMA+ARCH.

Abstract

The volatility models or autoregressive econometric models of conditional heteroscedasticity (ARCH) that popped up from 1982, onwards have given a new way of understanding the much studied behavior of financial markets through the premise of that the return of an asset is not serially correlated and that variance conditional is a function of the returns passed squared. This paper proposes the construction of predictive models for the volatility of the returns of 16 representative financial indices. These are pure models of the ARCH family, as well as of composite models of mean and variances conditional ARMA + ARCH. The general methodology used is that of Box-Jenkins and, specifically, the proposals in the seminal articles in the construction of ARCH and GARCH models, articles on which the theoretical basis of this work is based. By means of the adjusted volatility models and the grouping analysis, we can characterize the behavior of the logarithmic returns of daily prices of financial indexes, each with 3861 observations in the period from March 11, 1997 to 31, 2016. The indices financial models modeled using pure models of conditional variance are: Brazil (BVSP), U.S (IXIC), U.S (DJI), Canada (GSPTSE), China (HSI), China (SSE), France (FCHI), Switzerland (SSMI), Germany (GDAX) e Austria (ATX), being modeled by GARCH (1,1), except China (HSI), which is GARCH (1,2). The financial indices modeled using conditional variance and averaged models are: Mexico (MXB), U.S (GSPC), Australia (AORD), Malaysia (KLSE), Japan (N225) and Belgium (BFX), being modeled by the ARMA(1,1)+EGARCH(2,3), ARMA(1,1)+EGARCH(2,2), ARMA(4,3)+EGARCH(2,2), ARMA(2,1)+EGARCH(4,4), ARMA(4,4)+EGARCH(2,2) and AR(1)+EGARCH(1,1), respectively. All of these adjusted models are assumed to be derived from a Student distribution, as they proved to be of better fit than models under the assumption that innovations are from a Gaussian distribution. In the clustering analysis, the "Euclidian", "Canberra" and "Manhattan" distance measures were combined with the "k-mean" grouping method. The first combination, applied to the observed returns, grouped the indices in relation to the geographical location. The second, applied the predictions of returns and variances, grouped the indices in relation to the model of adjusted variance and the proximity of the variance that they present, respectively. The last combination, applied to volatility forecasts, grouped the indices in relation to the proximity of the risk they present. As a measure for the improvement of this model, it is suggested the test of other econometric models, as well as other distribution functions for the innovations.

Key-words: Return, Variance, Volatility, Risk, ARCH, GARCH, EGARCH, GJR+GARCH, ARMA+ARCH.

Lista de Figuras

Figura 1 – Distribuição espacial dos mercados financeiros selecionados contendo as bases de dados para serem utilizadas neste trabalho.	29
Figura 2 – Preços diários de fechamento (gráficos na cor vermelha) e retornos logarítmicos de fechamento (gráficos na cor azul) dos índices de bolsa de valores no período do 11 de março de 1997 até 31 de outubro de 2016.	30
Figura 3 – Esquema dos passos para a identificação de modelos de média condicional, sejam estes, modelos autorregressivos (AR), modelos de média móvel (MA), ou modelos autorregressivos de média móvel (ARMA).	35
Figura 4 – Esquema dos passos para a identificação de modelos de variância condicional, sejam estes, modelos ARCH, GARCH, EGARCH ou GJR.	39
Figura 5 – Esquema dos passos na identificação de modelos compostos, sejam estes, AR+ARCH, MA+ARCH, ARMA+ARCH, AR+GARCH, MA+GARCH, ARMA+GARCH, AR+EGARCH, MA+EGARCH, ARMA+EGARCH, AR+GJR, MA+GJR e ARMA+GJR.	41
Figura 6 – Esquema para identificar os casos em que não é possível modelar, em que os modelos são de média (ARMA), de variância (GARCH) e compostos de média e variância (ARMA+GARCH).	43
Figura 7 – Esquema da abordagem iterativa para construção de modelos, sejam estes, ARMA, GARCH puros ou compostos ARMA+GARCH, mediante a metodologia de Box-Jenkies.	43
Figura 8 – Esquema geral dos passos para selecionar a medida de distância e o processo de agrupamento na análise de agrupamento, avaliada mediante a correlação cofenética.	47
Figura 9 – Quantis empíricos das séries de retornos dos índices versus os quantis da distribuição normal padrão para analisar a normalidade.	51
Figura 10 – Funções de autocorrelação simples (ACF) e funções de autocorrelação parcial (PACF) versus atrasos das séries de retornos para a identificação de modelos ARMA.	55
Figura 11 – Funções de autocorrelação simples (ACF) e funções de autocorrelação parcial (PACF) versus atrasos das séries de resíduos ao quadrado dos retornos logarítmicos diários para a identificação de modelos da família GARCH.	59

Figura 12 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Brasil (BVSP).	82
Figura 13 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(1,1)+EGARCH(2,3). Série: México (MXX).	82
Figura 14 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: EUA (IXIC).	82
Figura 15 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(1,1)+EGARCH(2,2). Série: EUA (GSPC).	83
Figura 16 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: EUA (DJI).	83
Figura 17 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Canadá (GSPTSE).	83
Figura 18 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(4,3)+EGARCH(2,2). Série: Austrália (AORD).	84
Figura 19 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(2,1)+EGARCH(4,4). Série: Malásia (KLSE).	84
Figura 20 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,2). Série: China (HSI).	84
Figura 21 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: China (SSE).	85
Figura 22 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(4,4)+EGARCH(2,2). Série: Japão (N225).	85
Figura 23 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: França (FCHI).	85
Figura 24 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Suíça (SSMI).	86
Figura 25 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Alemanha (GDAX).	86
Figura 26 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Áustria (ATX).	86
Figura 27 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância AR(1)+EGARCH(1,1). Série: Bélgica (BFX).	87
Figura 28 – Previsões das primeiras 25 variâncias e volatilidades condicionais mediante os respectivos modelos ajustados para cada índice financeiro	88
Figura 29 – Agrupamento dos índices, mediante: retornos observados (a), retornos previstos (b), variâncias previstas (c) e volatilidades previstas (d). . . .	89

Figura 30 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Brasil (BVSP).	125
Figura 31 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para México (MXX).	126
Figura 32 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para EUA (IXIC).	126
Figura 33 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para EUA (GSPC).	127
Figura 34 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para EUA (DJI).	127
Figura 35 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Canadá (GSPTSE).	128
Figura 36 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Austrália (AORD).	128
Figura 37 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Malásia (KLSE).	129
Figura 38 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para China (HSI).	129
Figura 39 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para China (SSE).	130
Figura 40 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Japão (N225).	130
Figura 41 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para França (FCHI).	131

Figura 42 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Suíça (SSMI).	131
Figura 43 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Alemanha (GDAX).	132
Figura 44 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Áustria (ATX).	132
Figura 45 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Bélgica (BFX).	133
Figura 46 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Brasil (BVSP).	138
Figura 47 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,3), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: México (MXX).	139
Figura 48 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (IXIC).	140
Figura 49 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,2), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (GSPC).	141
Figura 50 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (DJI).	142
Figura 51 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Canadá (GSPTSE).	143
Figura 52 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(4,3)+EGARCH(2,2), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Austrália (AORD).	144

Figura 53 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Malásia (KLSE).	145
Figura 54 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $GARCH(1,1)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (HSI).	146
Figura 55 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $GARCH(1,1)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (SSE).	147
Figura 56 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $ARMA(4,4)+GARCH(2,2)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Japão (N225).	148
Figura 57 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $GARCH(1,1)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: França (FCHI).	149
Figura 58 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $GARCH(1,1)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Suíça (SSMI).	150
Figura 59 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $GARCH(1,1)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Alemanha (GDAX).	151
Figura 60 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $GARCH(1,1)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Áustria (ATX).	152
Figura 61 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo $MA(1)+EGARCH(1,1)$, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Bélgica (BFX).	153

Lista de tabelas

Tabela 1	– Modelos de média e variância condicional combinados para obtenção dos modelos compostos, e quantidade de modelos testados.	42
Tabela 2	– Estatística descritiva para analisar normalidade nas séries de retornos logarítmicos de fechamento diários dos índices financeiro.	50
Tabela 3	– Estatística de contraste para o teste de normalidade das séries de retornos logarítmicos de fechamento diários dos índices financeiro, mediante o expoente de <i>Hurst</i> e seu método do <i>Rescaled range</i>	50
Tabela 4	– Estatística de contraste para o teste de estacionariedade das séries de retornos mediante o Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (<i>KPSS</i>), com o 5% de significância.	53
Tabela 5	– Estatística de contraste para o teste de autocorrelação nos primeiros nove atrasos ($m = 9$) das séries de retornos, mediante o Q-Test Ljung-Box (Q_{BP}) para a identificação de modelos ARMA, com o 5% de significância.	58
Tabela 6	– Estatística de contraste para o teste de heterocedasticidade das séries de resíduos ao quadrado dos retornos, mediante o <i>LM – Test</i> para a identificação de modelos da família GARCH, com o 5% de significância.	62
Tabela 7	– Modelos de média condicional AR (P), MA(Q) e ARMA(P, Q) para prever a média das séries de retornos dos índices, especificados segundo o menor valor de <i>BIC</i>	63
Tabela 8	– Modelos de variância condicional ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q) para prever a variância dos retornos diários de fechamento, especificados segundo o menor valor de <i>BIC</i>	65
Tabela 9	– Modelos compostos de média e variância condicional para prever a média e variância dos retornos diários de fechamento, especificados segundo o menor valor de <i>BIC</i>	67
Tabela 10	– Modelos puros ((a) e (b)) e compostos ((c), (d) e (e)) selecionados para a concorrência do melhor nas previsões da variância dos retornos de cada índice financeiro.	69
Tabela 11	– Modelos de cada índice em que as hipóteses de não autocorrelação e não heterocedasticidade não são rejeitadas, e portanto, são apropriados para realizar previsões.	71

Tabela 12 – Modelo de menor Erro Quadrático Médio (<i>EQM</i>) selecionado dentre os 5 concorrentes para cada índice, sob o suposto que as inovações seguem uma distribuição Gaussiana.	72
Tabela 13 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob o suposto que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Brasil (BVSP).	73
Tabela 14 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,3) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: México (MXX).	73
Tabela 15 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (IXIC).	74
Tabela 16 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (GSPC).	74
Tabela 17 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (DJI).	74
Tabela 18 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Canadá (GSPTSE).	74
Tabela 19 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(4,3)+EGARCH(2,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Austrália (AORD).	75
Tabela 20 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(2,1)+EGARCH(4,4) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Malásia (KLSE).	75
Tabela 21 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (HSI).	76
Tabela 22 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (SSE).	76
Tabela 23 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(4,4)+EGARCH(2,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Japão (N225).	76

Tabela 24 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: França (FCHI).	77
Tabela 25 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Suíça (SSMI).	77
Tabela 26 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Alemanha (GDAX).	77
Tabela 27 – Estimativa dos parâmetros do modelo MA(1)+EGARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Áustria (ATX).	77
Tabela 28 – Estimativa dos parâmetros do modelo MA(1)+EGARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Bélgica (BFX).	78
Tabela 29 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos 16 modelos de variância condicional com função de inovação t de Student.	78
Tabela 30 – Valor de BIC e EQM dos 16 modelos de variância selecionados para prever, sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student.	79
Tabela 31 – Medida de distância e método de agrupamento selecionados para o agrupamento mediante o maior valor do coeficiente de correlação cofenética.	89
Tabela 32 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Brasil (BVSP).	100
Tabela 33 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série México (MXX).	101
Tabela 34 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (IXIC).	102
Tabela 35 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (GSPC).	103

Tabela 36 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (DJI).	104
Tabela 37 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Canadá (GSPTSE).	105
Tabela 38 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Austrália (AORD).	106
Tabela 39 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Malásia (KLSE).	107
Tabela 40 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (HSI).	109
Tabela 41 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (SSE).	111
Tabela 42 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Japão (N225).	112
Tabela 43 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série França (FCHI).	113
Tabela 44 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Suíça (SSMI).	114
Tabela 45 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Alemanha (GDAX).	115
Tabela 46 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Áustria (ATX).	117
Tabela 47 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Bélgica (BFX).	118

Tabela 48 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Brasil (BVSP).	120
Tabela 49 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série México (MXX).	120
Tabela 50 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (IXIC).	120
Tabela 51 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (GSPC).	121
Tabela 52 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (DJI).	121
Tabela 53 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Canadá (GSPTSE).	121
Tabela 54 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Austrália (AORD).	121
Tabela 55 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Malásia (KLSE).	122
Tabela 56 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (HSI).	122

Tabela 57 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (SSE).	122
Tabela 58 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Japão (N225).	122
Tabela 59 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série França (FCHI).	123
Tabela 60 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Suíça (SSMI).	123
Tabela 61 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Alemanha (GDAX).	123
Tabela 62 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Áustria (ATX).	123
Tabela 63 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Bélgica (BFX).	124
Tabela 64 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Brasil (BVSP).	134
Tabela 65 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série México (MXX).	134
Tabela 66 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série EUA (IXIC).	134
Tabela 67 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série EUA (GSPC).	134

Tabela 68 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série EUA (DJI).	135
Tabela 69 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Canadá (GSPTSE).	135
Tabela 70 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Austrália (AORD).	135
Tabela 71 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Malásia (KLSE).	135
Tabela 72 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série China (HSI).	136
Tabela 73 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série China (SSE).	136
Tabela 74 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Japão (N225).	136
Tabela 75 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série França (FCHI).	136
Tabela 76 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Suíça (SSMI).	136
Tabela 77 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Alemanha (GDAX).	137
Tabela 78 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Áustria (ATX).	137
Tabela 79 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Bélgica (BFX).	137

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelos de volatilidade condicional	5
2.1	Modelos de média condicional (ARIMA)	8
2.1.1	Modelo autorregressivo (AR)	8
2.1.2	Modelo de média móvel (MA)	9
2.1.3	Modelo autorregressivo de média móvel (ARMA)	10
2.2	Modelos de variância condicional	10
2.2.1	Modelo ARCH	11
2.2.2	Modelo GARCH	12
2.2.3	Modelo EGARCH	13
2.2.4	Modelo GJR	14
2.3	Modelos compostos de média e variância condicional	15
2.3.1	Modelo AR (P) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q)	16
2.3.2	Modelo MA (Q) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q)	18
2.3.3	Modelo ARMA (P, Q) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q)	19
3	Análise de agrupamento	21
3.1	Medidas de distância	22
3.2	Método de agrupamento hierárquico e não hierárquico	23
3.2.1	Ligações	24
3.2.2	Avaliação da formação dos agrupamento	27
4	Metodologia	28
4.1	CrITÉrios de inclusão e exclusão das bolsas de valores	28
4.2	Dados	29
4.2.1	Distribuição espacial dos mercados financeiros	29
4.2.2	Descrição das bases de dados	29
4.2.2.1	Teste de normalidade	32
4.2.2.2	Teste de estacionariedade	33
4.3	Identificação de modelos de média condicional (ARMA), de variância condicional (GARCH) e compostos (ARMA+GARCH)	34

4.3.1	Caso 1: Independência nos retornos e nos resíduos ao quadrado	34
4.3.2	Caso 2: Identificação de modelos de média condicional	34
4.3.2.1	Funções de autocorrelação simples (ACF) e parcial (PACF) dos retornos	35
4.3.2.1.1	Funções de autocorrelação simples (ACF)	35
4.3.2.1.2	Funções de autocorrelação parcial (PACF)	36
4.3.2.2	Teste de autocorrelação Ljung-Box	37
4.3.2.3	Função log-verossimilhança	38
4.3.2.4	Critério de Informação Bayesiano (BIC)	39
4.3.3	Caso 3: Identificação de modelos de variância	39
4.3.3.1	Funções de autocorrelação simples (ACF) e parcial (PACF) dos resíduos ao quadrado	39
4.3.3.2	Teste ARCH de Engle	40
4.3.3.3	Função log-verossimilhança	40
4.3.4	Caso 4: Identificação de modelos compostos de média e variância	41
4.4	Modelos de volatilidade para a série de retornos	43
4.4.1	Identificação dos modelos	44
4.4.2	Estimação de parâmetros dos modelos	44
4.4.3	Verificação	45
4.4.4	Previsões	45
4.5	Agrupamento de índices financeiros mediante: retornos observados, previsões de retornos, variâncias e volatilidades	46
5	Resultados e discussão	49
5.1	Análise exploratória dos índices financeiros	49
5.1.1	Normalidade nas séries de retorno	49
5.1.2	Estacionariedade nas séries de retorno	53
5.1.3	Autocorrelação nas séries de retorno	54
5.1.4	Heterocedasticidade nas séries de retorno	59
5.2	Especificação de modelos para os mercados financeiros	62
5.3	Modelos de previsão de volatilidade dos mercados financeiros	70
5.3.1	Estimação de parâmetros dos modelos selecionados	70
5.3.2	Simulação de retornos, variâncias e preços condicionais	79
5.3.3	Previsão de retornos e variâncias condicionais	81
5.4	Análise de agrupamento	89
6	Conclusões	92
6.1	Trabalhos futuros	94

Referências Bibliográficas	95
Apêndices	99
APÊNDICE A Estimativa dos parâmetros dos 5 modelos de variância para cada índice	100
APÊNDICE B Testes Q_{PB} , LM e JB aplicados aos resíduos padronizados dos modelos ajustados com função de inovação gaussiana. . .	120
APÊNDICE C Quantis empíricos dos resíduos padronizados (pontos na cor azul) versus os quantis da distribuição normal padrão (linha na cor vermelha).	125
APÊNDICE D Desempenho preditivo dos modelos estimados utilizando os retornos observados e os simulados	134
APÊNDICE E Simulação de retornos, variâncias e preços diários de fechamento.	138

1 Introdução

A discussão em torno da volatilidade¹ de retornos de ativos financeiros remonta-se aos primeiros anos do século passado. Os estudos empíricos sobre o assunto surgiram com os trabalhos de Cowles (1933), Working (1934), e Cowles e Jones (1937). A principal conclusão desses estudos é que os retornos se comportam de maneira completamente aleatória e que é impossível para os analistas financeiros fazer previsões dos retornos a curto prazo (ANDREOU; PITTIS; SPANOS, 2001). Os trabalhos anteriores reforçaram a hipótese de que os preços financeiros seguem um passeio aleatório (*random walk*) e, portanto, que suas taxas de crescimento (retornos) são eventos independentes².

Essas ideias estimularam novas linhas de pesquisa que levou Fama (1965) a desenvolver a hipótese de mercados financeiros eficientes (*Efficient Market Hypothesis*). A sua tese, justifica a impossibilidade de prever os retornos dos ativos financeiros e defende que o processo estocástico subjacente aos retornos é uma martingale³.

Estudos posteriores mostraram que os preços especulativos não podem ser adequadamente modelados usando os modelos de passeio aleatório e martingale. Kendall e Hill (1953) demonstraram que as distribuições de probabilidade dos retornos de algumas séries são simétricas, mas são de caudas mais pesadas e são mais leptocúrticas que a normal. Encontraram também que a suposição de distribuição idêntica não é válida para tais séries pela inconstância das variâncias no passo do tempo, e finalmente, que existe correlação serial entre as observações de algumas séries de retornos.

Mandelbrot (1963) confirmou a inadequação do pressuposto de normalidade para a distribuição dos retornos de vários ativos e propôs como alternativa as distribuições da família Pareto-Levy. Essa família de distribuições é mais flexível para capturar regularidades empíricas, como a leptocurtose e caudas pesadas, que caracterizam uma ampla variedade de séries financeiras. No entanto, foi provado que as distribuições da família Pareto-Levy não são tão adequadas para modelar a dinâmica dos preços financeiros. A razão é que essa família não capta adequadamente o fato de que grandes mudanças (grandes variações) na série de retornos são geralmente seguidas por outras grandes mudanças (de

¹ É uma medida de risco que indica quando os preços de uma determinada ação são ou não muito variantes em períodos curtos de tempo, cuja finalidade é orientar na tomada de decisões na hora da compra ou venda de ações.

² Acredita-se que o primeiro a postular o modelo de passeio aleatório para os preços dos ativos financeiros foi Bachelier em sua tese de doutorado em 1900, Bachelier (1900).

³ A definição de martingale implica que num mercado eficiente, o valor esperado dos retornos no período t deve ser zero. Isto é, $E(r_t | \sigma(r_{t-1}, \dots, r_1)) = 0$, em que t é o tempo, r_t são os retornos do ativo. Em relação ao preço, a definição estatística de martingale implica que a melhor previsão do preço de um ativo hoje é o preço do ativo no dia de ontem: $E(P_t | \sigma(P_{t-1}, \dots, P_1)) = P_{t-1}$, em que t é o tempo.

qualquer sinal), enquanto pequenas mudanças tendem a ser seguidas por pequenas mudanças na série. Essa regularidade empírica é conhecida como agrupamento de volatilidades (*Volatility Clustering*). A primeira tentativa de capturar o fenômeno do agrupamento da volatilidade foi realizada por Engle (1982), mediante a criação de um modelo de variância condicional, ao qual chamou de ARCH (*Heteroskedasticity Conditional Autoregressive*).

O grande sucesso do modelo ARCH foi traduzido no desenvolvimento de uma ampla literatura que propõe formas funcionais alternativas da variância condicional da série. Entre 1982 e 1998, aproximadamente 21 modelos foram desenvolvidos, tendo como fundamento o modelo ARCH, ver Borda (2004). Entre eles, estão, por exemplo, o modelo generalizado autorregressivo condicional heterocedástico (GARCH) (BOLLERSLEV, 1986), o modelo de heteroscedasticidade condicional autorregressivo generalizado exponencial (EGARCH) (NELSON, 1991), o modelo de heteroscedasticidade condicional autorregressivo generalizado de GJosten–Jagannathan–Runkle (GJR-GARCH) (GLOSTEN; JAGANNATHAN; RUNKLE, 1993), o APARCH (DING; GRANGER; ENGLE, 1993), o modelo de heteroscedasticidade condicional autorregressivo generalizado limiar (TGARCH) (ZAKOIAN, 1994) e o modelo de heteroscedasticidade condicional autorregressivo generalizado quadrático (QGARCH) (SENTANA, 1995).

As teorias desenvolvidas nesses modelos têm sido o fundamento teórico para a grande quantidade de teorias e aplicações realizados nas últimas três décadas, entre elas: livros, artigos, dissertações e teses. Todas com o objetivo de compreender melhor o comportamento complexo dos mercados financeiros. O interesse nesse conhecimento tem sido demonstrado pelos profissionais das áreas de finanças, de econometria, de estatística e ainda mais, os investidores em mercados financeiros, já que o conhecimento da volatilidade faz o investidor ser mais cauteloso na hora de comprar ou vender ações das quais é sócio. O investimento nos mercados financeiros é atualmente uma opção de vida para muitas pessoas, tanto que no índice Brasil (BVSP), por exemplo, do ano 2002 ao ano 2018, o número de investidores pessoa física foi incrementado de 85.279 a 740.555.

Assim, os objetivos do trabalho são:

Objetivo geral

Representar, matematicamente, a variância dos retornos de mercados financeiros mediante processos estocásticos de heterocedasticidade condicional, para analisar o comportamento dos mercados em relação à volatilidade no curto prazo, e identificar por meio da análise de agrupamento, as semelhanças e diferenças nos mercados utilizando o risco de investimento.

Objetivos específicos

- Avaliar a relevância de utilizar modelos de média condicional, para serem incluídos nos modelos de previsão de variância condicional especificados aos retornos dos mercados financeiros;
- Identificar por meio da medida do Critério de Informação Bayesiano (*BIC*), qual modelo puro de variância condicional representa melhor a variância no processo de volatilidade para os retornos dos mercados financeiros;
- Identificar por meio da medida do Critério de Informação Bayesiano (*BIC*), qual modelo puro de variância condicional representa melhor a variância no processo de volatilidade para os retornos dos mercados financeiros;
- Concluir qual dos modelos concorrentes para representar a volatilidade condicional é o de “melhor” desempenho preditivo, mediante o Erro Quadrático Médio (EQM), para ser utilizado na simulação e previsão de retornos, variâncias e volatilidades condicionais;
- Verificar se os modelos de variância condicional, como funções de transferência, modificam as características do agrupamento dos retornos observados em relação as previsões de retornos, variâncias e volatilidades;
- Identificar, mediante a análise de agrupamento, os índices financeiros que apresentam risco de investimento semelhantes.

Os aportes particulares deste trabalho à comunidade científica são:

1. Modelo esquemático da teoria da modelagem de média, de variâncias puros e compostos de média e variância que pode ser utilizado tanto para explicar ambas teorias (modelagem ARIMA e ARCH) quanto para explicar a metodologia na identificação de modelos;
2. Proposta metodológica na forma de combinar modelos de variância puros e compostos para o ajuste mais adequado aos retornos diários de fechamento;
3. Proposta de uma nova maneira de pensar a construção de carteiras de investimento mediante análise de agrupamento das previsões das volatilidades obtidas dos modelos de variância condicional ajustados aos retornos.

O trabalho é composto por 6 capítulos. A introdução fornecendo a ideia geral do trabalho. O segundo e terceiro capítulos com a revisão de literatura: o planejamento do problema, o marco histórico temporal no qual se encaixa as teorias utilizadas, o marco teórico conceitual, as definições, os modelos matemáticos teóricos utilizados e os aportes das pesquisas relacionadas ao tema. No quarto capítulo, o da metodologia, explica-se a forma de seleção dos mercados financeiros, o tipo de dados, descreve-se as bases de dados e explica-se os métodos para atingir cada objetivo específico. No capítulo 5, são apresentados os resultados: primeiro, faz-se uma análise exploratória e especificam-se os modelos de todas as séries. As etapas de estimação de parâmetros, de simulação e previsões foram feitas de maneira individual para cada série, terminando com a análise de agrupamento das previsões das volatilidades. Finalmente, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões.

2 Modelos de volatilidade condicional

A volatilidade, na área financeira, segundo [Sarkar Robert Almgren \(2011\)](#), é uma medida de dispersão (σ_r^2) dos retornos de um índice de mercado. Quanto mais o preço de uma ação varia num período curto de tempo, maior o risco¹ de se ganhar ou perder dinheiro negociando esta ação e, por isso, a volatilidade é uma medida de risco.

Ainda que os modelos ARCH tenham aparecido na década de 1980 a fim de coletar os episódios de agrupamento temporal de volatilidade, que é observada nas séries de rentabilidade de quase todo mercado financeiro, existem precursores mais antigos que nos seus trabalhos começaram a caracterização das propriedades estatísticas dos preços de ativos financeiros ([BACHELIER, 1900](#); [MANDELBROT, 1963](#)). Algumas das características mais relevantes são:

- Distribuições leptocúrticas ou excesso de curtose;
- Distribuições simétricas, embora também sejam encontrados alguns coeficientes de assimetria significativamente diferentes de zero;
- Agrupamento da volatilidade ao longo dos intervalos de tempo;
- Persistência na volatilidade: os efeitos de um choque na volatilidade demoram um certo intervalo de tempo para desaparecer;
- Efeito de alavancagem: observa-se uma resposta assimétrica da volatilidade ao nível dos retornos.

Muitas dessas características são coletadas com os modelos de variância condicional que surgiram a partir do artigo seminal de [Engle \(1982\)](#)². Esses modelos incluem em suas formulações a ideia de que existem agrupamentos de volatilidade, isto é, que fortes flutuações inesperadas nos mercados tendem a ser seguidas por períodos com as mesmas características, enquanto períodos de estabilidade tendem a ser seguidos por períodos que também são estáveis.

¹ Quando falamos de risco, estamos falando de eventos que poderiam acontecer com alguma probabilidade no futuro ([SARKAR ROBERT ALMGREN, 2011](#)). O risco pode ser entendido como a incerteza a respeito dos resultados esperados. Tanto o risco como a incerteza estão associados à existência de um conhecimento incompleto ([SKOGLUND, 2015](#)).

² Economista, estatístico e professor universitário, de nacionalidade americana, recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 2003, partilhado com Clive Granger por seus métodos de análise de séries temporais econômicas: "o modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional *ARCH*".

A modelagem da volatilidade de séries de retornos é uma ferramenta quantitativa muito importante para entender o funcionamento dos mercados financeiros. A modelagem da volatilidade de séries do mercado de ações tem-se tornado indispensável para analisar decisões de investimento, avaliação de ativos e gerenciamento de riscos. Essa modelagem focalizou o comportamento das médias e as variâncias das séries de retornos. Isso tem coerência com os trabalhos de [Markowitz \(1952\)](#) e [Tobin \(1958\)](#) sobre a análise de média e variância de portfólios financeiros.

O grande sucesso do modelo ARCH foi traduzido no desenvolvimento de uma ampla literatura que propõe formas funcionais alternativas da variância condicional da série. Entre eles estão, por exemplo, o modelo GARCH de [Bollerslev \(1986\)](#), o modelo EGARCH de [Nelson \(1991\)](#), o GJR de [Glosten, Jagannathan e Runkle \(1993\)](#), o APARCH de [Ding, Granger e Engle \(1993\)](#), o TGARCH de [Zakoian \(1994\)](#), o QGARCH de [Sentana \(1995\)](#) e outros. Para uma visão mais geral sobre os modelos GARCH, recomenda-se ver [Francq e Zakoian \(2010\)](#). Essas especificações de variâncias são conhecidas como a família ARCH de modelos de volatilidade.

Segundo [Borda \(2004\)](#) e [Lorenzo e Ruiz \(2012\)](#), os modelos da família ARCH são os mais utilizados para modelar a volatilidade de séries econômicas e financeiras. Na realidade, muitas são as aplicações realizadas mediante a aplicação destes modelos, por exemplo [Reyes, Venegas e Cruz \(2018\)](#) explicam a dinâmica estocástica do Índice de Preços e Cotações (IPC) da Bolsa Mexicana de Valores (BMV), mediante os modelos ARCH, MGARCH, EGARCH e PJ-RS-SV³. Estes autores concluíram que o modelo PJ-RS-SV para o caso aplicado ao mercado de ações mexicano tem levemente um melhor desempenho preditivo que os da família ARCH.

Outra aplicação é a de [Sosa, Ortiz e Cabello \(2017\)](#), na qual, modelaram a volatilidade de alguns mercados importantes do continente americano e europeu mediante modelos GARCH e TGARCH de [Zakoian \(1994\)](#) para analisar o impacto da crise financeira global. Os autores concluíram que a crise financeira global impactou no comportamento das bolsas de valores, aumentando a sua volatilidade.

[Cruz e Françoso \(2017\)](#) caracterizaram a volatilidade das séries de retornos semanais dos produtos da indústria canavieira: açúcar cristal, etanol anidro e etanol hidratado. Estes autores utilizaram os modelos ARCH, GARCH e IGARCH e evidenciaram que distúrbios irregulares nos preços dessas *commodities* podem provocar períodos de instabilidade no setor sucroalcooleiro. Observaram também que níveis mais elevados de volatilidade foram encontrados na série de retorno do açúcar cristal e observaram maior

³ Modelo chamado assim pelas suas siglas em inglês de Poisson Jumps - Regime Switching - Stochastic Volatility.

persistência temporal dos choques nas séries de retornos do etanol anidro e hidratado.

Para analisar a volatilidade do índice de preços do mercado equatoriano, [Corvi \(2017\)](#), implementam um modelo IGARCH (1,1)⁴, devido ao fato de que a soma dos parâmetros estimados previamente de um modelo GARCH(1,1) é exatamente 1. Com base nos resultados, os autores concluem que o índice de preços do mercado equatoriano não têm elevada volatilidade condicional e pode ser considerado de baixo risco para investir.

Com o objetivo de examinar o desempenho empírico dos modelos GARCH e GJR, [Guo \(2017a\)](#) utilizou três tipos de inovações de cauda pesada: a distribuição t de Student, a distribuição Gaussiana inversa (NRIG) e a distribuição Gaussiana inversa recíproca (NIG) usando um grande conjunto de dados financeiros. O conjunto de dados atinge quase todos os principais setores do mercado financeiro e dos índices de mercado dos Estados Unidos. Concluíram que, embora a distribuição NRIG tenha mostrado um desempenho levemente melhor do que os outros dois tipos de distribuição, não é preponderantemente dominante no ajuste dos dados sob a estrutura GARCH. Também concluíram que os resultados mostram que o modelo GJR com distribuição NRIG possui vantagens práticas no gerenciamento quantitativo de riscos.

Para estudar as volatilidades condicionais dos retornos do mercado de ações de Hong Kong, [Guo \(2017b\)](#) considerou vários modelos da família GARCH mediante três tipos de distribuições para as inovações: a NRIG, a distribuição t de Student e a NIG. O autor concluiu que o modelo com distribuição NRIG apresentou desempenho levemente melhor do que os outros dois modelos. Além disso, conclui que os resultados indicam que é importante introduzir os termos de um modelo GJR e a distribuição NRIG para melhorar o desempenho dos modelos.

[Arango \(2017\)](#), estudou os preços de fechamento de barris de petróleo bruto dos tipos *West Texas International (WTI)* e *Brent*, mediante o modelo GARCH(1,1), o modelo TGARCH(1,1) e as redes neurais diferenciais. Uma das conclusões é que os modelos de redes neurais diferenciais e o modelo TGARCH(1,1) têm mesma precisão, tendo melhor desempenho preditivo que o modelo GARCH(1,1).

Um estudo comparativo das taxas de câmbio latino-americanas mediante os modelos TGARCH e EGARCH é apresentado por [Ali \(2013\)](#), concluindo que as volatilidades dos retornos da Argentina, Brasil, Chile e Colômbia não apresentam efeitos assimétricos⁵, enquanto, no México e no Peru, más notícias reduzem a volatilidade dos retornos. Além disso, concluem que os retornos da Argentina, Brasil, Chile e Peru são descritos pelo modelo AR(1)-TGARCH(1,1); enquanto os retornos da Colômbia e México o fazem através

⁴ Para esta variante do modelo ARCH; ver [Bollerslev e Engle \(1993\)](#).

⁵ Significa que más notícias não reduzem a volatilidade dos retornos.

de AR(1)-EGARCH(1,1).

Para estudar a volatilidade mediante os modelos da família GARCH, torna-se importante, em primeiro lugar, o conhecimento teórico dos modelos de variância, assim como os modelos de média condicional. Nas seguintes seções deste capítulo, apresentam-se de forma resumidas, as definições teóricas necessárias para compreender as aplicações feitas aos retornos de algumas bolsas de valores muito importantes aos países ao qual pertencem.

2.1 Modelos de média condicional (ARIMA)

Os modelos de média condicional ou modelos ARIMA são descritos em termos dos parâmetros estruturais P , D e Q . Por esta razão, é frequentemente usada a notação ARIMA (P , D , Q). Isso significa que os modelos ARIMA combinam no máximo três tipos de processos: a Autorregressão (AR), a diferenciação para modelar a Integração da série (I) e Média Móvel (MA). Por sua vez, os parâmetros P , D e Q representam respectivamente a ordem do componente autorregressivo, o grau de diferenciação para estacionariedade e a ordem do componente médio móvel (GRAS, 2001).

A análise de uma série consiste, portanto, em identificar os valores inteiros correspondentes a cada um desses três parâmetros.

2.1.1 Modelo autorregressivo (AR)

Muitas séries temporais apresentam autocorrelação; isto é, associação linear entre observações passadas. Isso quer dizer que observações passadas podem prever observações presentes. O processo autorregressivo (AR) modela a média condicional de r_t como uma função de observações passadas, r_{t-1} , r_{t-2}, \dots, r_{t-P} . Um processo AR que depende de P observações passadas é chamado de modelo AR de grau P , denotado por AR (P).

Diz-se que r_t , $t \in \mathbb{Z}$, é um processo autorregressivo de ordem P e escreve-se $r_t \sim \text{AR} (P)$ se o processo assume a seguinte forma

$$r_t = k + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_P r_{t-P} + e_t, \quad (2.1)$$

em que k, ϕ_1, \dots, ϕ_P são parâmetros reais e e_t é um processo de inovação não correlacionado com média zero e variância σ_t^2 . O modelo AR (P) pode ser escrito como na [Equação 2.2](#)

$$\begin{aligned} r_t - \phi_1 L r_t - \dots - \phi_P L^P r_t &= k + e_t, \\ (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_P L^P) r_t &= k + e_t, \end{aligned}$$

$$\Phi(L)r_t = k + e_t. \quad (2.2)$$

Da [Equação 2.2](#), pode-se ver que $r_t = \frac{k + e_t}{\Phi(L)} = \mu + \Phi^{-1}(L)e_t = \mu + \Psi(L)e_t$, em que $\mu = \frac{k}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_P}$ é a média incondicional do processo, e $\Psi(L)$ é um polinômio de operador de atraso de grau infinito, $(1 + \psi_1L + \psi_2L^2 + \dots)$.

Segundo [Wold \(1938\)](#), o processo AR (P) é estocástico estacionário, se os coeficientes ψ_i são absolutamente somáveis. Este é o caso quando o polinômio de AR, $\Phi(L)$, é estável, ou seja, todas as raízes estão fora do círculo unitário.

2.1.2 Modelo de média móvel (MA)

O modelo de média móvel (MA) captura a autocorrelação serial numa série temporal, expressando a média condicional de r_t como uma função de inovações passadas, $e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-Q}$. Um processo MA que depende de Q inovações passadas é chamado de modelo MA de grau Q , denotado por MA (Q). A forma de um modelo MA (Q) é

$$r_t = k + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_Q e_{t-Q} + e_t, \quad (2.3)$$

em que $k, \theta_1, \dots, \theta_P$ são parâmetros reais e e_t é um processo de inovação não correlacionado com média zero e variância σ_t^2 . Para um processo de MA, a média incondicional de r_t é $\mu = k$. Então, o modelo MA (Q) pode-se escrever como na [Equação 2.4](#)

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_Q e_{t-Q}, \\ r_t &= \mu + e_t + \theta_1 L e_t + \dots + \theta_Q L^Q e_t, \\ r_t &= \mu + (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_Q L^Q) e_t, \\ r_t &= \mu + \Theta(L) e_t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Segundo [Wold \(1938\)](#), o processo MA (Q) é sempre estacionário porque $\Theta(L)$ é um polinômio de grau finito.

Para um processo MA dado, não existe um único polinômio de MA, há sempre uma solução invertível e outra não invertível. Para exclusividade, é convencional impor restrições de invertibilidade no polinômio MA ([HAMILTON, 1994](#)). O polinômio $\Theta(L)$ de MA é invertível se todas as suas raízes estiverem fora do círculo unitário.

2.1.3 Modelo autorregressivo de média móvel (ARMA)

Para algumas séries temporais, um modelo AR ou MA de ordem muito alta (modelo com muitos parâmetros), é necessário para modelar o processo. Nesse caso, um modelo combinado de média móvel autorregressiva (ARMA) pode às vezes ser uma opção mais parcimoniosa, ver [Box Gwilym M. Jenkins \(1994\)](#).

Basicamente, um modelo ARMA combina as ideias dos modelos AR e MA em uma forma compacta, de modo que o número de parâmetros utilizados é mantido pequeno, obtendo parcimônia na parametrização ([TSAY, 2010](#)).

Um modelo ARMA expressa a média condicional de r_t como uma função do passado das observações r_{t-1}, \dots, r_{t-P} e das inovações passadas e_{t-1}, \dots, e_{t-Q} . Então, o modelo ARMA (P, Q) pode ser escrito como

$$r_t = k + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_P r_{t-P} + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_Q e_{t-Q} + e_t, \quad (2.5)$$

em que k é uma constante, ϕ_1, \dots, ϕ_P e $\theta_1, \dots, \theta_Q$ são parâmetros reais do modelo e ε_t é um processo de inovação não correlacionado com média zero e variância σ_t^2 . O modelo ARMA (P, Q) pode ser escrito como na [Equação 2.6](#)

$$\begin{aligned} r_t - \phi_1 r_{t-1} - \dots - \phi_P r_{t-P} &= k + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_Q e_{t-Q} \\ r_t - \phi_1 L r_t - \dots - \phi_P L^P r_t &= k + e_t + \theta_1 L e_t + \dots + \theta_Q L^Q e_t \\ (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_P L^P) r_t &= k + (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_Q L^Q) e_t \\ \Phi(L) r_t &= k + \Theta(L) e_t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Da [Equação 2.6](#), pode-se ver que $r_t = \frac{k + \Theta(L)e_t}{\Phi(L)} = \mu + \Psi(L)e_t$, em que a média incondicional do processo é $\mu = \frac{k}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_P}$ e $\Psi(L)$ é um polinômio de grau infinito, $(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots)$.

Segundo [Wold \(1938\)](#), o processo ARMA (P, Q) é estocástico estacionário, se os coeficientes ψ_i são somáveis. Este é o caso quando o polinômio AR, $\Phi(L)$ é estável, significando que todas as raízes estão fora do círculo unitário.

2.2 Modelos de variância condicional

Os modelos autorregressivos condicionalmente heteroscedásticos (ARCH) foram introduzidos por [Engle \(1982\)](#) e sua extensão GARCH (ARCH generalizado) deve-se a [Bollerslev \(1986\)](#). Nesses modelos, o conceito chave é a variância condicional, ou seja, a

variância condicionada ao passado. Nos modelos GARCH clássicos, a variância condicional é expressa como uma função linear dos valores passados ao quadrado da série (FRANCO, 2010). A seguir, são apresentadas as definições teóricas básicas dos modelos de variância condicional utilizadas no presente trabalho.

2.2.1 Modelo ARCH

O modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional denotado pela sua sigla em inglês ARCH (*Autorregressive conditional heteroscedasticity*) foi desenvolvido por Engle (1982) com a finalidade de analisar a variância da inflação no Reino Unido. O modelo fundamenta-se na premissa de que o retorno de um ativo não é correlacionado serialmente e que a variância condicional é uma função dos retornos passados ao quadrado.

O modelo ARCH conseguiu capturar esses “fatos estilizados de dados financeiros” de uma maneira simples. O modelo apresenta a vantagem de facilidade na obtenção das propriedades teóricas de interesse, como condições e momentos de estacionariedade, e simplicidade de estimativa numérica (SHIMIZU, 2010). Um modelo ARCH (q), sendo q a quantidade de valores dos quadrados das inovações defasadas, tem a forma

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t, \end{cases} \quad (2.7)$$

em que z_t é uma sucessão de variáveis independentes e identicamente distribuídas com média 0 e variância 1, $\gamma \sigma_e^2 > 0$ é a constante do modelo, γ é o peso da variância incondicional, σ_e^2 é a variância incondicional, β_j é o peso das inovações quadradas defasadas e e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$, em que j denota a defasagem.

Para se garantir a positividade da variância condicional σ_t^2 , deve-se exigir que $\gamma \sigma_e^2 > 0$ e $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$. Pode-se demonstrar também que o processo é estritamente estacionário com $E(e_t^2) < \infty$ se e somente se $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Neste caso, $E(e_t) = 0$ e a variância incondicional de e_t , dada por σ_e^2 é

$$\sigma_e^2 = \frac{w}{1 - \sum_{j=1}^q \beta_j}, \quad (2.8)$$

em que $w = \gamma \sigma_e^2$.

2.2.2 Modelo GARCH

Quando são considerados modelos ARCH para caracterizar o comportamento dinâmico da volatilidade com frequência acontece que a ordem do modelo tenha muitos parâmetros. Isto leva a restrições nos parâmetros, para garantir que a não negatividade da variância e a não estacionariedade do processo, sejam muito fortes. Bollerslev (1986), propôs como uma solução alternativa, os *modelos generalizados autorregressivos de heteroscedasticidade condicional*, denotado por sua sigla em inglês *GARCH* (*Generalized ARCH*).

Nestes modelos, a variância condicional num instante depende, não apenas do quadrado das inovações defasadas, como em Engle (1982); pois, segundo Bollerslev (1986), também depende dos seus próprios valores defasados de variância condicional. Um modelo GARCH (p, q) , sendo p a quantidade de valores das variâncias defasadas e q a quantidade de valores dos quadrados das inovações defasadas, tem a forma

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t, \end{cases} \quad (2.9)$$

em que z_t é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média 0 e variância 1, σ_t^2 é a variância condicionada para o tempo t , $\gamma \sigma_e^2$ é a constante do modelo: γ é o peso da taxa de variância incondicional e σ_e^2 é a taxa de variância incondicional, α_i é o peso das variâncias defasadas i , σ_{t-i}^2 é a variância condicionada defasada em $t - i$, β_j é o peso das inovações quadradas defasadas j , e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$ e v_t é um ruído branco.

Para se garantir a positividade da variância condicional σ_t^2 , deve-se exigir que $\gamma \sigma_e^2 > 0$; $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$; $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$. Pode-se demonstrar também que o processo é estritamente estacionário com $E(e_t^2) < \infty$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Neste caso, $E(e_t) = 0$ e a variância incondicional de e_t , dada por σ_e^2 é como na [Equação 2.10](#)

$$\sigma_e^2 = \frac{w}{1 - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \right)}, \quad (2.10)$$

em que $w = \gamma \sigma_e^2$.

Após essa importante proposta, uma variedade de modelos condicionalmente heteroscedásticos alternativos foi proposta, no entanto, o modelo GARCH ainda é o modelo

de referência da análise de séries temporais financeiras devido à sua simplicidade, e mais especificamente o modelo GARCH(1,1), em que o “(1,1)” indica que σ_t^2 baseia-se na estimativa mais recente da taxa de variância e na observação mais recente de e_t^2 . O modelo expressa-se assim

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_1 e_{t-1}^2 + v_t. \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2.3 Modelo EGARCH

O modelo autorregressivo condicional heterocedástico generalizado exponenciado (EGARCH), foi desenvolvido por Nelson (1991), o qual, não se comporta simetricamente para as inovações positivas e negativas, como acontece com os modelos GARCH; expressando desta maneira um comportamento assimétrico diante dos aumentos e reduções nos preços financeiros.

O modelo EGARCH (p, q) é uma variante GARCH (p, q) que modela o logaritmo do processo de variância condicional. Além de modelar o logaritmo, o modelo possui termos adicionais de alavancagem para capturar a assimetria no agrupamento de volatilidade.

O modelo EGARCH (p, q) possui p coeficientes GARCH associados a termos de variância do log defasado, q coeficientes ARCH associados à magnitude de inovações padronizadas defasadas e coeficientes de alavancagem q associados a inovações padronizadas defasadas. A forma do modelo EGARCH (p, q) é

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \log \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \left[\frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E \left\{ \frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} \right] + \\ + \sum_{j=1}^q \xi_j \left(\frac{e_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right) + v_t, \end{cases} \quad (2.12)$$

em que σ_t^2 é a variância condicionada para o tempo t , $\gamma \sigma_e^2$ é a constante do modelo: γ é o peso da taxa de variância de longo prazo e σ_e^2 é a taxa de variância de longo prazo, α_i é o peso da variância condicionada defasada i para $i = 1, \dots, p$, σ_{t-i}^2 é a variância condicionada defasada em $t - i$, β_j é o peso da inovação padronizada defasada j para $j = 1, \dots, q$, e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$, σ_{t-j} é o desvio padrão observado em $t - j$, ξ_j é o peso da alavancagem defasada j para $j = 1, \dots, q$ e v_t é um ruído branco. Neste caso, $E(e_t) = 0$ e

a variância incondicional de e_t , dada por σ_e^2 é como na [Equação 2.13](#)

$$\sigma_e^2 = \exp \left\{ \frac{w}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \right\}, \quad (2.13)$$

em que $w = \gamma\sigma_e^2$.

A forma dos termos do valor esperado associados aos coeficientes ARCH na [Equação 2.12](#) dependem da distribuição de z_t :

- Se a distribuição das inovações é gaussiana, então

$$E \left\{ \frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} = E \{|z_{t-j}|\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

- Se a distribuição das inovações é t de Student com $v > 2$ graus de liberdade, então

$$E \left\{ \frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} = E \{|z_{t-j}|\} = \sqrt{\frac{(v-2)\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}}.$$

2.2.4 Modelo GJR

O modelo GJR é uma variante GARCH que inclui termos de alavancagem para modelar a aglomeração de volatilidade assimétrica. Na formulação GJR, grandes mudanças negativas são mais prováveis de serem agrupadas do que mudanças positivas. O modelo GJR é nomeado por [Glosten, Jagannathan e Runkle \(1993\)](#). Existe uma estreita semelhança entre o modelo GJR e o modelo TGARCH. Um modelo GJR é uma equação recursiva para o processo de variância e um TGARCH é a mesma recursividade aplicada ao processo de desvio padrão.

O modelo GJR (p, q) possui p coeficientes GARCH associados as variâncias retardadas, q coeficientes ARCH associados as inovações quadradas retardadas e q coeficientes de alavancagem associados ao quadrado de inovações retardadas negativas. A forma do modelo GJR (p, q) é

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma\sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \xi_j I[e_{t-j} < 0] e_{t-j}^2 + v_t, \end{cases} \quad (2.14)$$

em que σ_t^2 é a variância condicionada para o tempo t , γ é o peso da taxa de variância de longo prazo, σ_e^2 é a taxa de variância de longo prazo, α_i é o peso da variância condicionada defasada i para $i = 1, \dots, p$, σ_{t-i}^2 é a variância condicionada defasada em $t - i$, β_j é o peso

da inovação padronizada defasada j para $j = 1, \dots, q$, e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$ em que j denota a defasagem, σ_{t-j} é o desvio padrão observado em $t - j$, ξ_j é o peso da alavancagem defasada para a inovação negativa j para $j = 1, \dots, q$ e v_t é um ruído branco.

Assim, os coeficientes de alavancagem são aplicados a inovações negativas, dando um peso adicional às mudanças negativas. E a função indicadora $I[e_{t-j} < 0]$ representa uma variável *dummy*, definida como

$$I[e_{t-j} < 0] = \begin{cases} 1, & \text{se } e_{t-j} < 0 \\ 0, & \text{se } e_{t-j} \geq 0. \end{cases}$$

Para se garantir a positividade da variância condicional σ_t^2 , deve-se exigir que $\gamma\sigma_e^2 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ com $i = 1, \dots, p$, $\beta_j \geq 0$ com $j = 1, \dots, q$ e $\beta_j + \xi_j \geq 0$. O processo é estacionário se $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \xi_j < 1$. Neste caso, $E(e_t) = 0$ e a variância incondicional de e_t , dada por σ_e^2 é como na [Equação 2.15](#)

$$\sigma_e^2 = \frac{w}{1 - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \xi_j \right)}, \quad (2.15)$$

em que $w = \gamma\sigma_e^2$.

Pode-se ver facilmente que se todos os coeficientes de alavancagem forem zero, o modelo GJR é reduzido para o modelo GARCH.

2.3 Modelos compostos de média e variância condicional

Os modelos compostos de média e variância condicional são os que combinam os modelos ARMA com os modelos da família ARCH, tendo então, uma parte para prever a média condicional e outra para prever a variância condicional.

Esta seção está composta por três subseções. Na [subseção 2.3.1](#), são definidos os modelos compostos AR (P)+ARCH (q), AR (P)+GARCH (p, q), AR (P)+EGARCH (p, q) e AR (P)+GJR (p, q); na [subseção 2.3.2](#), são definidos os modelos MA (Q)+ARCH (q), MA (Q)+GARCH (p, q), MA (Q)+EGARCH (p, q) e MA (Q)+GJR (p, q) e na [subseção 2.3.3](#), são definidos os modelos ARMA (P, Q)+ARCH (p, q), ARMA (P, Q)+GARCH (p, q), ARMA (P, Q)+EGARCH (p, q) e ARMA (P, Q)+GJR (p, q). Por sua vez, os parâmetros P , Q , p e q representam a ordem do componente autorregressivo, a ordem do componente médio móvel, os coeficientes GARCH associados as variâncias retardadas e os coeficientes ARCH associados à inovações quadradas retardadas respectivamente.

Estes modelos são chamados “modelos compostos” porque os modelos de variância condicional são estimados utilizando a série residual dos modelos de média condicional previamente definidos. Os modelos definidos a seguir, são adaptados a partir de [Shimizu \(2010\)](#), que define os modelo AR (P)+ARCH (q) e ARMA (P, Q)+GARCH (p, q).

2.3.1 Modelo AR (P) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q)

Nos modelos [2.16](#), [2.17](#), [2.18](#) e [2.19](#), $r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + e_t$ representa a média condicional $AR(P)$ dos retornos, P a ordem do componente autorregressivo, k, ϕ_1, \dots, ϕ_P os parâmetros da equação e r_{t-i} as observações passadas dos retornos.

Se r_t é a série de retornos gerada pelo modelo autorregressivo AR (P) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q), os modelos são definidos da seguinte maneira:

- Modelo AR (P)+ARCH (q)

$$\begin{cases} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t, \end{cases} \quad (2.16)$$

em que z_t é uma sucessão de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuída com média 0 e variância 1, σ_t^2 é a variância condicionada de r_t , $\gamma \sigma_e^2 > 0$ é a constante do modelo de variância, γ é o peso da variância incondicional, σ_e^2 é a taxa de variância incondicional de r_t , q é a quantidade de observações associado à inovações quadradas retardadas, β_j é o peso das inovações quadradas defasadas e e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$ com $j = 1, \dots, q$ e v_t é um ruído branco.

- Modelo AR (P)+GARCH (p, q)

$$\begin{cases} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t, \end{cases} \quad (2.17)$$

em que z_t é uma sucessão de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuída com média 0 e variância 1, σ_t^2 é a variância condicionada de r_t , $\gamma\sigma_e^2 > 0$ é a constante do modelo de variância, γ é o peso da taxa de variância incondicional, σ_e^2 é a taxa de variância incondicional de r_t , p é a quantidade de observações associado as variâncias retardadas, q é a quantidade de observações associado à inovações quadradas retardadas, α_i é o peso das variâncias defasadas i , σ_{t-i}^2 é a variância condicionada defasada em $t - i$ com $i = 1, \dots, p$, β_j é o peso das inovações quadradas defasadas j , e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$ com $j = 1, \dots, q$ e v_t é um ruído branco.

- Modelo AR (P)+EGARCH (p, q)

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \log \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \left[\frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E \left\{ \frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} \right] + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \sum_{j=1}^q \xi_j \left(\frac{e_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right) + v_t, \end{array} \right. \quad (2.18)$$

em que z_t é uma sucessão de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuída com média 0 e variância 1, σ_t^2 é a variância condicionada de r_t , $\gamma\sigma_e^2 > 0$ é a constante do modelo de variância, γ é o peso da taxa de variância incondicional, σ_e^2 é a taxa de variância incondicional de r_t , p é a quantidade de observações associado as variâncias retardadas, q é a quantidade de observações associado à inovações quadradas retardadas, α_i é o peso da variância condicionada defasada i para $i = 1, \dots, p$, σ_{t-i}^2 é a variância condicionada defasada em $t - i$, β_j é o peso da inovação padronizada defasada j para $j = 1, \dots, q$, e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$ em que j denota a defasagem, σ_{t-j} é o desvio padrão observado em $t - j$, ξ_j é o peso da alavancagem defasada j para $j = 1, \dots, q$ e v_t é um ruído branco.

- Modelo AR (P)+GJR (p, q)

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \xi_j I[e_{t-j} < 0] e_{t-j}^2 + v_t. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

em que z_t é uma sucessão de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuída com média 0 e variância 1, σ_t^2 é a variância condicionada de r_t , $\gamma\sigma_e^2 > 0$ é a constante do modelo de variância, γ é o peso da taxa de variância incondicional, σ_e^2 é a taxa de variância incondicional de r_t , p é a quantidade de observações associado as variâncias retardadas, q é a quantidade de observações associado à inovações quadradas retardadas, α_i é o peso da variância condicionada defasada i para $i = 1, \dots, p$, σ_{t-i}^2 é a variância condicionada defasada em $t - i$, β_j é o peso da inovação padronizada defasada j para $j = 1, \dots, q$, e_{t-j} é a inovação defasada em $t - j$ em que j denota a defasagem, σ_{t-j} é o desvio padrão observado em $t - j$, ξ_j é o peso da alavancagem defasada para a inovação negativa j para $j = 1, \dots, q$ e v_t é um ruído branco.

2.3.2 Modelo MA (Q) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q)

Nos modelos 2.20, 2.21, 2.22 e 2.23, $r_t = k + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t$ representa a média condicional $MA(Q)$ dos retornos, Q a ordem da componente média móvel, $k, \theta_1, \dots, \theta_Q$ os parâmetros da equação, e_{t-j} as inovações passadas e σ_t^2 é como na subseção 2.3.1.

Se r_t é a série gerada pelo modelo autorregressivo MA (Q) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q), os modelos são definidos da seguinte maneira:

- Modelo MA (Q)+ARCH (q)

$$\begin{cases} r_t = k + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma\sigma_e^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t. \end{cases} \quad (2.20)$$

- Modelo MA (Q)+GARCH (p, q)

$$\begin{cases} r_t = k + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma\sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t. \end{cases} \quad (2.21)$$

- Modelo MA (Q)+EGARCH (p, q)

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = k + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \log \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \left[\frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E \left\{ \frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} \right] + \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_{j=1}^q \xi_j \left(\frac{e_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right) + v_t. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

- Modelo MA (Q)+GJR (p, q)

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = k + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \xi_j I[e_{t-j} < 0] e_{t-j}^2 + v_t. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

2.3.3 Modelo ARMA (P, Q) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q)

Nos modelos 2.24, 2.25, 2.26 e 2.27, $r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t$ representa a média condicional $ARMA(P, Q)$ dos retornos, P a ordem do componente autorregressivo, Q a ordem da componente média móvel, $k, \phi_1, \dots, \phi_P, \theta_1, \dots, \theta_Q$ os parâmetros da equação, r_{t-i} as observações passadas dos retornos e e_{t-j} as inovações passadas e σ_t^2 é como na subseção 2.3.1.

Se r_t é a série gerada pelo modelo autorregressivo ARMA (P, Q) com erros ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q), os modelos são definidos da seguinte maneira:

- Modelo ARMA (P, Q)+ARCH (q)

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

- Modelo ARMA (P, Q) +GARCH (p, q)

$$\begin{cases} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + v_t. \end{cases} \quad (2.25)$$

- Modelo ARMA (P, Q) +EGARCH (p, q)

$$\begin{cases} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \log \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \left[\frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E \left\{ \frac{|e_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} \right] + \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_{j=1}^q \xi_j \left(\frac{e_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right) + v_t. \end{cases} \quad (2.26)$$

- Modelo ARMA (P, Q) +GJR (p, q)

$$\begin{cases} r_t = k + \sum_{i=1}^P \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^Q \theta_j e_{t-j} + e_t, \\ e_t = \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 = \gamma \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \xi_j I[e_{t-j} < 0] e_{t-j}^2 + v_t. \end{cases} \quad (2.27)$$

3 Análise de agrupamento

A análise de agrupamento (AA), em sua aplicação, engloba uma variedade de técnicas e algoritmos, sendo que o objetivo é encontrar e separar objetos em grupos similares. Em alguns estudos, torna-se necessário conhecer algumas características de determinado grupo de um conjunto de elementos amostrais, principalmente quando é resultante de uma ou mais variáveis. Quando se obtém mensuração de diferente natureza, pode-se observar se há similaridades no conjunto de dados.

A AA estuda todo um conjunto de relações interdependentes. Ela não faz distinção entre variáveis dependentes e independentes, isto é, variáveis do tipo causa e efeito, como na regressão.

Conforme [Bussab, Miazaki e Andrade \(1990\)](#), a AA pretende resolver o seguinte problema: “dada uma amostra de n objetos (ou indivíduos), cada um deles medido segundo p variáveis, procurar um esquema de classificação que agrupe os objetos em g grupos. Deve ser determinado, também, o número de variáveis desses grupos”. Portanto, a finalidade dessa técnica é reunir os objetos (indivíduos, elementos) verificados nos grupos em que exista homogeneidade dentro do grupo e heterogeneidade entre os grupos, objetivando propor posteriormente classificações. Os objetos em um grupo são relativamente semelhantes, em termos dessas variáveis, e diferentes de objetos de outros grupos.

A AA constitui uma metodologia numérica multivariada, com o objetivo de propor uma estrutura classificatória, ou de reconhecimento da existência de grupos, objetivando, mais especificamente, dividir o conjunto de observações em um número de grupos homogêneos, segundo algum critério de homogeneidade. Muitas vezes, nessa técnica, são feitas afirmativas empíricas, que nem sempre têm respaldo teórico. Muitas técnicas são propostas, mas não há, ainda, uma teoria generalizada e amplamente aceita. Devido a isso, deve-se utilizar vários métodos e comparar os resultados, para que a análise dos dados seja realizada pela técnica mais adequada. Em geral, as etapas de uma análise de agrupamentos são as seguintes:

- Seleção de um indivíduo ou de uma amostra de indivíduos a serem agrupados;
- Definição de um conjunto de variáveis a partir das quais será obtida a informação necessária ao agrupamento de indivíduos;
- Coleta dos dados que serão reunidas numa tabela com m colunas (descritores) e n linhas (objetos);

- Escolha de um critério de similaridade ou dissimilaridade;
- Adoção e execução de um algoritmo de agrupamento;
- Elaboração e interpretação do agrupamento;
- Validação dos resultados encontrados.

Um conceito fundamental é a escolha de um critério que meça a distância entre dois objetos, ou que quantifique o quanto eles são parecidos, esta medida é chamada coeficiente de parença, sendo dividida em duas categorias: medidas de similaridade (quanto maior o valor, maior a semelhança entre os objetos) e de dissimilaridade (quanto maior o valor, maior a diferença entre os objetos) (BUSSAB; MIAZAKI; ANDRADE, 1990).

3.1 Medidas de distância

Quando objetos (indivíduos) são agrupados, a proximidade é usualmente indicada por uma espécie de distância. Por outro lado, as variáveis são usualmente agrupadas com base nos coeficientes de correlação ou outras medidas de associação.

A utilização de diferentes medidas de distância pode levar a resultados diferentes de aglomeração. Assim, é conveniente utilizar medidas diferentes e comparar os resultado (MALHOTRA et al., 2001). As medidas de distância consideram que, se dois indivíduos são similares, eles estão próximos um do outro, ou seja, eles são comuns ao conjunto de variáveis e vice-versa.

Sejam as observações $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_p]$, as definições de algumas distâncias são:

- **Distância Euclidiana.**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i - y_i)^2}; \quad (3.1)$$

- **Distância Manhattan.**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|; \quad (3.2)$$

- **Distância Minkowski.**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^p w_i |x_i - y_i|^n}, \quad (3.3)$$

em que w_i é o peso de ponderação das variáveis;

- **Distância Canberra.**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p \frac{|x_i - y_i|}{|x_i + y_i|}, \quad (3.4)$$

3.2 Método de agrupamento hierárquico e não hierárquico

Neste método, no início existe tantos grupos quanto objetos (indivíduos). Diversos objetos semelhantes são agrupados primeiro, estes grupos iniciais são fundidos de acordo com as suas similaridades, eventualmente, relaxando no critério de similaridade os sub-grupos vão se unindo a outros sub-grupos até formar um grupo único. O procedimento é o seguinte:

1. **Hierárquico.** Neste método, no início existe tantos grupos quanto objetos (indivíduos). Diversos objetos semelhantes são agrupados primeiro, estes grupos iniciais são fundidos de acordo com as suas similaridades, eventualmente, relaxando no critério de similaridade os sub-grupos vão se unindo a outros sub-grupos até formar um grupo único. O procedimento é o seguinte:

- a) No início tem-se n grupos, sendo que cada um é formado por um único objeto; calcula-se a matriz simétrica de distâncias $n \times n$, $D = (d_{ij})$, em que d_{ij} é a distância ou similaridade entre o objeto i e o objeto j .

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

em que $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{nn} = 0$.

- b) Na matriz D , acha-se o par de grupos mais próximo (menor distância) e junta-se estes grupos.
- c) O novo grupo formado é denominado, por exemplo, (A, B) , se os grupos primitivos do par são A e B . Nova matriz de distâncias é construída, simplesmente apagando-se as linhas e colunas correspondentes aos grupos A e B e adicionando-se a linha e a coluna dadas pelas distâncias entre (AB) e os grupos remanescentes.
- d) Repete-se os passos b) e c) $(n - 1)$ vezes observando-se as identidades dos grupos que são agrupados.

2. **Não hierárquico.** O agrupamento não-hierárquico é uma técnica usada quando se deseja formar k grupos de itens ou objetos. O Método Aglomerativo Não-Hierárquico mais usado é o algoritmo das k -means. O método das k -means é composto por 3 etapas:

- a) Partição arbitrária dos itens em k grupos iniciais;
- b) Re-alocar cada item no grupo cuja média (centróide) esteja mais próximo. Em geral é usada a distância Euclidiana. O centróide é recalculado para o grupo que recebeu novo item e para o grupo que perdeu algum item;
- c) Repete-se b) até que não restem mais re-aloções a serem feitas.

3.2.1 Ligações

No método aglomerativo hierárquico é feito referência ao modo de se agrupar os objetos semelhantes, sendo este agrupamento feito por meio de ligações. Entre os diferentes métodos de ligação estão: k -means, Centróide, Completo, McQuitty, Mediana, Simples e Ward.

- **k -means.** Neste método, a distância entre dois agrupamentos é a distância média entre uma observação em um agrupamento e uma observação no outro agrupamento. A distância média é calculada com a seguinte matriz de distância:

$$d_{mj} = \frac{N_k d_{kj} + N_l d_{lj}}{N_m},$$

em que:

- d_{jm} é a distância entre os agrupamentos m e j ;
 - m é o agrupamento mesclado que consiste nos agrupamentos k e l , com $m = (k, l)$;
 - d_{kj} distância entre os agrupamentos k e j ;
 - d_{lj} distância entre os agrupamentos l e j ;
 - N_k número de observações no agrupamento k ;
 - N_l número de observações no agrupamento l ;
 - N_m número de observações no agrupamento m .
- **Centróide.** Neste método, a distância entre dois agrupamentos é a distância entre os centróides ou médias dos agrupamentos. A distância é calculada com a seguinte matriz de distância:

$$d_{mj} = \frac{N_k d_{kj} + N_l d_{lj}}{N_m} - \frac{N_k N_l d_{kl}}{N_m^2},$$

em que:

- d_{mj} distância entre os agrupamentos m e j ;
- m agrupamento mesclado que consiste nos agrupamentos k e l , com $m = (k, i)$;
- d_{kj} distância entre os agrupamentos k e j ;
- d_{lj} distância entre os agrupamentos l e j ;
- N_k número de observações no agrupamento k ;
- N_l número de observações no agrupamento l ;
- N_m número de observações no agrupamento m .

- **Completa.** Neste método (também chamado método do vizinho mais distante), a distância entre dois agrupamentos é a distância máxima entre uma observação em um agrupamento e uma observação no outro agrupamento. A distância completa é calculada com a seguinte matriz de distância:

$$d_{mj} = \max(d_{kj}, d_{lj}),$$

em que:

- d_{mj} distância entre os agrupamentos m e j ;
- m agrupamento mesclado que consiste nos agrupamentos k e l , com $m = (k, i)$;
- d_{kj} distância entre os agrupamentos k e j ;
- d_{lj} distância entre os agrupamentos l e j .

- **McQuitty.** Com este método, a distância é calculada com a seguinte matriz de distância:

$$d_{mj} = \frac{d_{kj} + d_{lj}}{2},$$

em que:

- d_{mj} distância entre os agrupamentos m e j ;
- m agrupamento mesclado que consiste nos agrupamentos k e l , com $m = (k, i)$;
- d_{kj} distância entre os agrupamentos k e j ;
- d_{lj} distância entre os agrupamentos l e j .

- **Mediana.** Neste método, a distância entre dois agrupamentos é a distância mediana entre uma observação em um agrupamento e uma observação no outro agrupamento. A distância mediana é calculada com a seguinte matriz de distância:

$$d_{mj} = \frac{d_{kj} + d_{lj}}{2} - \frac{d_{kl}}{4},$$

em que:

- d_{mj} distância entre os agrupamentos m e j ;
- m agrupamento mesclado que consiste nos agrupamentos k e l , com $m = (k, i)$;
- d_{kj} distância entre os agrupamentos k e j ;
- d_{lj} distância entre os agrupamentos l e j ;
- d_{kl} distância entre os agrupamentos k e l .

- **Simples.** Neste método (também chamado método do vizinho mais próximo), a distância entre dois agrupamentos é a distância mínima entre uma observação em um agrupamento e uma observação no outro agrupamento. Quando as observações estão próximas, a ligação única tende a identificar agrupamentos longos em forma de cadeia, com distâncias relativamente grandes separando as observações nos dois extremos da cadeia. A distância é calculada com a seguinte matriz de distância:

$$d_{mj} = \min(d_{kj}, d_{lj}),$$

em que:

- d_{mj} distância entre os agrupamentos m e j ;
- m agrupamento mesclado que consiste nos agrupamentos k e l , com $m = (k, i)$;
- d_{kj} distância entre os agrupamentos k e j ;
- d_{lj} distância entre os agrupamentos l e j .

- **De variância (Ward).** Neste método, a distância entre dois agrupamentos é a soma dos desvios quadrados dos pontos aos centroides. O objetivo da ligação de Ward é minimizar a soma dos quadrados dentro do agrupamento. A distância é calculada com a seguinte matriz de distância:

$$d_{mj} = \frac{(N_j + N_k)d_{kj} + (N_j + N_l)d_{lj} - N_j d_{kl}}{N_j + N_m},$$

em que:

- d_{mj} distância entre os agrupamentos m e j ;
- m agrupamento mesclado que consiste nos agrupamentos k e l , com $m = (k, i)$;
- d_{kj} distância entre os agrupamentos k e j ;
- d_{lj} distância entre os agrupamentos l e j ;
- d_{kl} distância entre os agrupamentos k e l ;
- N_j número de observações no agrupamento j ;
- N_k número de observações no agrupamento k ;
- N_l número de observações no agrupamento l ;
- N_m número de observações no agrupamento m .

3.2.2 Avaliação da formação dos agrupamento

Uma forma de avaliar a validade da informação gerada pela função ligação é compará-la com os dados originais da distância. Se o agrupamento é válido, a ligação dos objetos no agrupamento tem uma forte correlação com as distâncias entre objetos no vetor de distâncias. A função cofenética compara esses dois conjuntos de valores e calcula sua correlação. A melhor solução para um agrupamento tem correlação cofenética mais próxima de 1.

Esse coeficiente de correlação cofenético é o coeficiente r de Pearson, sendo calculado entre índices de similaridade da matriz original e os índices reconstituídos com base no dendograma. Logo, quanto maior for o r , menor será a distorção

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=1}^p (x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i - \bar{\mathbf{x}})^2 \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{\mathbf{y}})^2}}, \quad (3.5)$$

em que x_i e y_i são, respectivamente, os valores dos i -ésimos atributos dos vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} , e $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ são, respectivamente, os valores de média dos vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} .

4 Metodologia

Este capítulo é formado por 5 seções. Na Seção ??, são apresentados os critérios de inclusão e exclusão analisados para selecionar os mercados financeiros. Na Seção 4.2, são apresentadas e descritas as bases de dados, a distribuição espacial dessas bases e os testes de normalidade e estacionariedade. Na Seção 4.3, apresenta-se a metodologia utilizada para a identificação dos modelos de média condicional (ARMA), de variância condicional (ARCH) e os compostos de média e variância condicional (ARMA+ARCH). Na Seção 4.4, apresenta-se a metodologia utilizada para selecionar o modelo de volatilidade específico utilizado para as previsões e finalmente, na Seção 4.5 a metodologia para a análise de agrupamento.

4.1 Critérios de inclusão e exclusão das bolsas de valores

Existem muitas bolsas de valores espalhadas pelo mundo, e algumas delas são o objetivo de análise neste trabalho. Existem alguns critérios funcionais que levam a catalogar uma bolsa de valores como menos ou mais importante que outra. Sem procurar na literatura qual bolsa de valores é menos ou mais importante, decidiu-se pela utilização daquelas que atendem aos seguintes critérios:

- Publicado no site <https://br.financas.yahoo.com/>;
- Dados disponíveis na data da coleta¹;
- Mostra-se a quantidade de componentes que a compõem²;
- Um índice de bolsa de valores composta com pelo menos trinta componentes³;
- Dados publicados à partir de 1995.

Esses critérios utilizados para a seleção das bolsas de valores a serem incluídas neste estudo são um conjunto de características correspondentes às bolsas mais representativas a nível mundial. Isto quer dizer que nesta fase relacionada à seleção das bolsas de valores, é feita uma amostragem não probabilística.

¹ Há dias em que os dados não estão disponíveis.

² O número de empresas ou companhias que pertencem à bolsa de valores.

³ Um índice de bolsa de valores com trinta ou mais componentes é caracterizado como representativo a nível mundial.

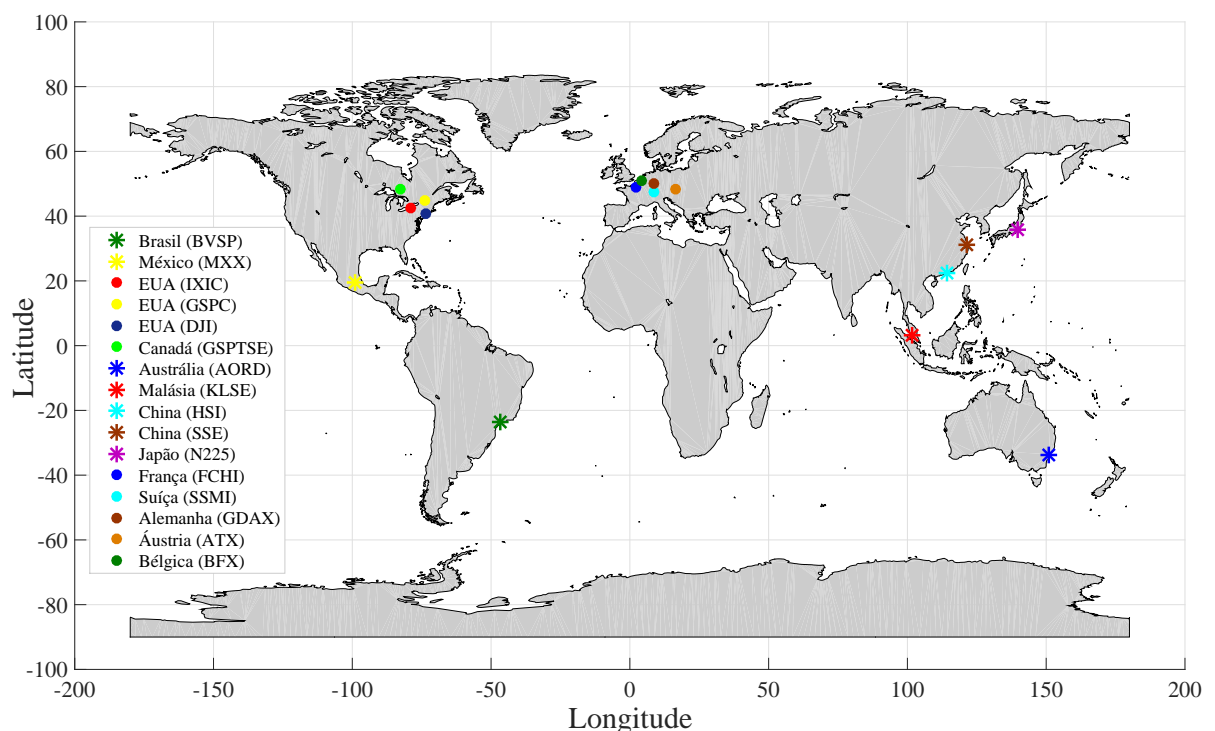
4.2 Dados

A informação utilizada para o desenvolvimento da parte prática deste trabalho são os dados contidos nas dezesseis bases de dados obtidas da filtragem feita na Seção 4.1. As bases de dados são: Brasil (BVSP), México (MXX), EUA (IXIC), EUA (GSPC), EUA (DJI), Canadá (GSPTSE), Austrália (AORD), Malásia (KLSE), China (HSI), China (SSE), Japão (N225), França (FCHI), Suíça (SSMI), Alemanha (GDAX), Áustria (ATX) e Bélgica (BFX). As bases de dados são ordenadas do Sul para o Norte: primeiro o continente americano e depois o resto.

4.2.1 Distribuição espacial dos mercados financeiros

Na Figura 1, apresenta-se a posição geográfica aproximada das bolsas de valores selecionadas. Estas bolsas contêm as bases de dados dos preços diários de fechamento, que são a matéria prima indispensável para este trabalho.

Figura 1 – Distribuição espacial dos mercados financeiros selecionados contendo as bases de dados para serem utilizadas neste trabalho.



4.2.2 Descrição das bases de dados

As bases de dados contêm os preços diários de fechamento do índice das bolsas de valores, os quais são calculados com metodologias particulares, próprias de cada mercado financeiro, e chamado de índice financeiro pelo uso de diferentes indicadores no processo

de cálculo. As bases de dados contêm informação a partir do 01 de janeiro de 1995 até 31 de outubro de 2016.

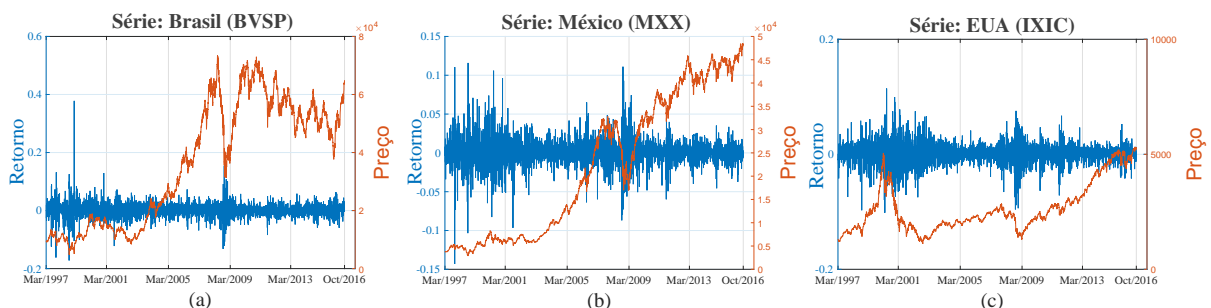
De maneira particular, a bolsa de valores do Brasil (BVSP) apresenta uma mudança radical nos preços no período antes de 11 de março de 1997 em relação aos preços de 11 de março de 1997 em diante. Isto é consequência do uso de duas moedas na época, pois o cruzeiro real ainda estava em circulação.

Para evitar problemas de incongruência, os dados correspondentes ao período de 01 de janeiro de 1995 até 10 de março de 1997 são excluídos. Com as mudanças feitas, as novas bases de dados a utilizar-se contêm informação de preços a partir do 11 de março de 1997 até 31 de outubro de 2016.

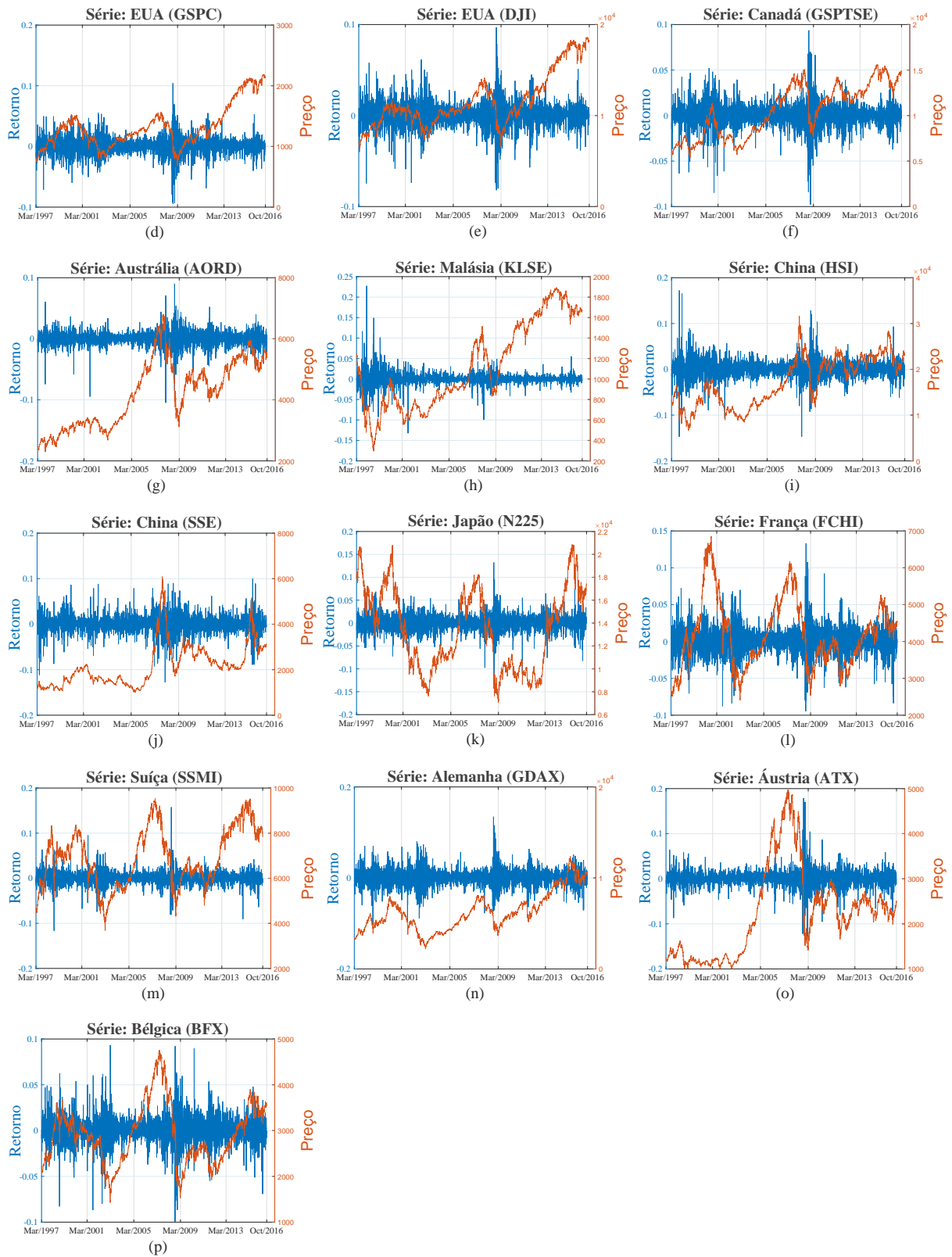
As bases de dados selecionadas apresentam diferentes quantidades de elementos para o mesmo período elegido⁴. Essa heterogeneidade em quantidade, é organizada de maneira a ter bases de dados com a mesma quantidade de observações (elementos). Por exemplo, uma data específica que não se tenha informação numa base de dados, essa data é eliminada de todas as bases. Assim, as bases de dados finalmente terminam tendo 3862 elementos no período de 11 de março de 1997 até 31 de outubro de 2016.

Em análises de séries temporais financeiras, é difícil lidar diretamente com os dados de preços de ativos discretos P_t observados, porque os P_t são frequentemente não-estacionários e altamente correlacionados (Figura 2, gráficos na cor vermelha). Assim, é comum analisar a taxa de retorno logarítmicos, que geralmente são estacionários e não correlacionados.

Figura 2 – Preços diários de fechamento (gráficos na cor vermelha) e retornos logarítmicos de fechamento (gráficos na cor azul) dos índices de bolsa de valores no período do 11 de março de 1997 até 31 de outubro de 2016.



⁴ Entre as causas, exemplifica-se que os dias feriados ocorrem em datas e quantidades diferentes para cada índice de bolsa de valores.



Partindo das bases de preços⁵ convenientemente alinhadas, são obtidas novas bases

⁵ Cada base de dados contém sua própria moeda para os preços de fechamento, porém, as análises feitas não são afetadas pela diferença monetária já que o desenvolvimento dos processos é feito com dados sem unidade de medida.

de dados, em que os dados são chamados retornos logarítmicos,

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) \quad (4.1)$$

(Figura 2, gráficos na cor azul). Estes retornos logarítmicos obtidos pela Equação 4.1 são as bases de dados a serem utilizadas daqui em diante, pois a característica que se quer analisar é a volatilidade nos retornos das bolsas de valores.

4.2.2.1 Teste de normalidade

Para testar a normalidade na série de retornos, utiliza-se a técnica fractal “Coeficiente ou expoente de *Hurst*”, com a hipótese nula: “a série de retornos provêm de uma distribuição normal”.

O primeiro a estudar as séries fractais foi o cientista britânico [Hurst \(1951\)](#). Posteriormente, suas ideias foram retomadas por [Mandelbrot \(1997\)](#), quem colocou seu trabalho num contexto mais geral sob o nome “*Rescaled range analysis* $\left(\frac{R}{S}\right)$ ”. O $\left(\frac{R}{S}\right)$ é um método estatístico utilizado para avaliar a ocorrência de eventos pouco comuns e é uma ferramenta ideal para processos físico e financeiros. O parâmetro que resulta da análise $\left(\frac{R}{S}\right)$ é o coeficiente ou expoente de *Hurst* que é uma medida de independência das séries temporais

$$\left(\frac{R}{S}\right)_s = cs^H, \quad (4.2)$$

em que $\left(\frac{R}{S}\right)$ é a estatística *Rescaled range*, c é uma constante de proporcionalidade, s é o número de elementos em cada intervalo no qual foi dividida a série e H é o coeficiente ou expoente de *Hurst*.

O expoente de *Hurst* é determinado por meio de uma regressão linear dos pontos $\log\left(\frac{R}{S}\right)_s$ contra $\log(s)$, como se apresenta na seguinte equação

$$\log\left(\frac{R}{S}\right)_s = \log(c) + H \log(s). \quad (4.3)$$

A metodologia para obter o expoente de *Hurst* é a seguinte:

1. Da amostra original dos preços é calculada a série dos retornos por meio da diferença dos logaritmos naturais, $r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$;
2. A série de retorno é dividida em subamostras ou intervalos de igual magnitude $s = \left(\frac{n}{S}\right)$, em que n é o tamanho da amostra, S é o número de intervalos em cada

partição e s é o número de dados em cada intervalo. Calcula-se a média e o desvio padrão para cada intervalo;

3. Calculam-se as diferenças das observações de cada intervalo em relação à média do intervalo ao qual eles pertencem. Em seguida, calculam-se as diferenças acumuladas de cada intervalo. Dessa série acumulada, calcula-se a amplitude em cada intervalo;
4. Para cada intervalo, divide-se o alcance pelo desvio padrão para obter o *Rescaled range* $\left(\frac{R}{S}\right)_s$. A média dos *Rescaled ranges* é o valor de $\left(\frac{R}{S}\right)_s$ a utilizar na análise;
5. Com os pares $\left(\log\left(\frac{R}{S}\right)_s, \log(s)\right)$ obtém-se uma regressão linear, em que a inclinação é o expoente de *Hurst*.

O *Rescaled range* é uma estatística com média zero, expressada em função do desvio padrão e a análise é de tipo não paramétrica, pois não é preciso uma distribuição específica. O expoente de *Hurst* estará sempre no intervalo $[0,1]$, e dependendo do valor adquirido nesse intervalo, determinam-se as seguintes características:

- Se $0 \leq H < 0,5$, a série é antipersistente, ou seja, se a série tem estado acima (ou abaixo) da média de longo prazo no período anterior, o mais provável é que mude para baixo (ou acima) no período seguinte. Neste caso a série é ruído rosa;
- Se $H = 0,5$, a série é não correlacionada, ou seja, os dados são independentes (série sem memória). Trata-se de uma série aleatória que cumpre as características do movimento browniano e diz-se que a série é ruído branco;
- Se $0,5 < H \leq 1$, a série é persistente, ou seja, se a série tem estado acima (ou embaixo) da média de longo prazo no período anterior, o mais provável é que continue acima (ou abaixo) no período seguinte. Neste caso diz-se que a série é ruído preto.

4.2.2.2 Teste de estacionariedade

Para testar a estacionariedade dos retornos neste trabalho, utiliza-se o teste criado por Kwiatkowski et al. (1992), denominado teste *KPSS* devido a seus nomes, tendo por finalidade determinar estacionariedade em uma série temporal. As hipóteses nula e alternativa são “**a série é estacionaria**” e “**a série apresenta raiz unitária**”, respetivamente. A estatística de teste é

$$KPSS = \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{S}_t^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}, \quad (4.4)$$

em que $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ é a estimativa da variância dos erros, \mathcal{S}_t é a soma dos resíduos $t = 1, 2, \dots, n$ e n é o tamanho da amostra.

4.3 Identificação de modelos de média condicional (ARMA), de variância condicional (GARCH) e compostos (ARMA+GARCH)

Em relação a modelagem da variância, a série de retornos r_t com $n = 3861$ elementos é dividida em duas subséries. A primeira, chamada de treinamento r_{tr} contém os primeiros 80% ($n_1 = 3089$) dos elementos de r_t , a qual é utilizada para testar os modelos na etapa de identificação. A segunda, chamada de validação r_v contém os últimos 20% ($n_2 = 772$) dos elementos de r_t , a qual é utilizada para comparar com os valores previstos dos modelos estimados.

Esta seção é formada por 4 subseções, cada uma explica detalhadamente os passos de cada um dos casos da figura anterior. Na primeira, se faz uma breve narrativa do por quê não é possível realizar a modelagem. Na segunda, explicam-se os passos para a identificação dos modelos ARMA. Na terceira subseção, explicam-se os passos para a identificação dos modelos da família GARCH. Na quarta subseção, explicam-se os passos da composição dos modelos ARMA+GARCH. Ao final de cada subseção, detalha-se a quantidade de modelos testados e explica-se o por quê dessa quantidade.

4.3.1 Caso 1: Independência nos retornos e nos resíduos ao quadrado

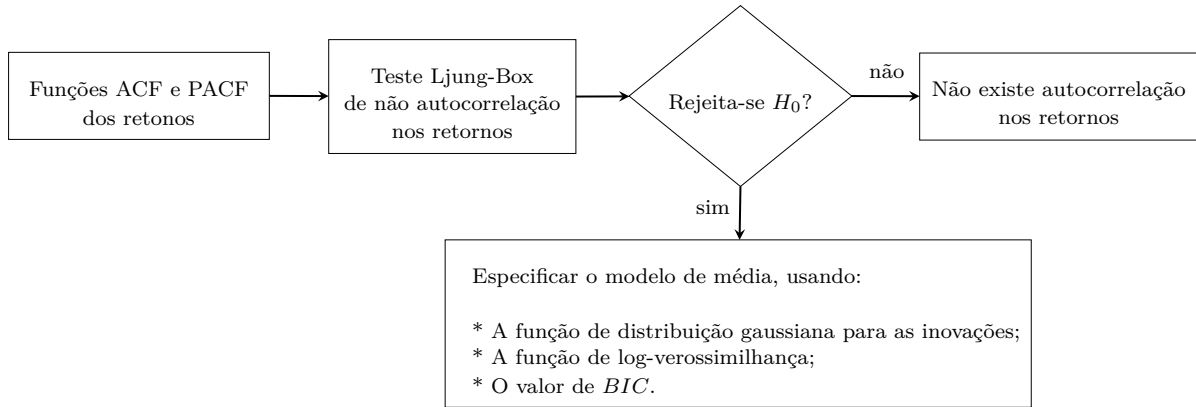
Neste caso, tanto a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos retornos, quanto a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos resíduos ao quadrado, não são rejeitadas. Isto quer dizer que os retornos apresentam independência entre eles, e portanto, não é possível utilizar os modelos ARMA na modelagem da média condicional. Também os resíduos ao quadrado apresentam independência entre eles, e portanto, não é possível utilizar os modelos da família GARCH na modelagem da variância condicional. Em conclusão, não é possível modelar uma série com este tipo de comportamento.

4.3.2 Caso 2: Identificação de modelos de média condicional

Nestes modelos, a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos retornos, é rejeitada, enquanto que a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos resíduos ao quadrado não é rejeitada. De maneira que na identificação dos modelos ARMA⁶, utiliza-se o esquema da [Figura 3](#), o qual mostra ordenadamente os passos a seguir, caso estes modelos existam.

⁶ Correspondente a atingir o primeiro objetivo: “Avaliar a relevância de utilizar modelos de média condicional, para serem incluídos nos modelos de previsão de variância condicional especificados aos retornos dos mercados financeiros.”

Figura 3 – Esquema dos passos para a identificação de modelos de média condicional, sejam estes, modelos autorregressivos (AR), modelos de média móvel (MA), ou modelos autorregressivos de média móvel (ARMA).



4.3.2.1 Funções de autocorrelação simples (ACF) e parcial (PACF) dos retornos

Na adoção de um modelo para uma série temporal, é necessário conhecer-se a relação entre as observações atuais e as anteriores. Uma forma de avaliar essa relação é através das funções de *autocorrelação*.

Se r_t , por exemplo, representa os retornos diários de fechamento de um índice de bolsa de valores, a autocorrelação entre as séries r_t e r_{t-1} (autocorrelação com atraso 1) indica como os valores de retornos estão relacionados com seus valores imediatamente precedentes, enquanto que a autocorrelação entre r_t e r_{t-2} (autocorrelação com atraso 2) fornece uma relação dos valores de retornos da série r_t com aqueles atrasados em dois intervalos de tempo. A *autocorrelação* é, então, a dependência linear de uma variável consigo mesma em dois pontos diferentes no tempo.

4.3.2.1.1 Funções de autocorrelação simples (ACF)

Várias estimativas da função de autocorrelação têm sido sugeridas pelos estatísticos, e, suas propriedades são discutidas em G.M. (1968), concluindo-se que a estimativa mais satisfatória da autocorrelação ρ_h com atraso h é

$$\rho_h = \text{Corr}(r_t, r_{t+h}) = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t+h})}{\text{Var}(r_t)} = \frac{\varrho_h}{\varrho_0}, \quad (4.5)$$

em que ϱ_h é a covariância entre r_t e r_{t+h} e ϱ_0 é a variância de r_t .

Assim, a função de autocorrelação amostral é dada por

$$\hat{\rho}_h = \frac{\hat{\varrho}_h}{\hat{\varrho}_0} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (r_t - \bar{r})(r_{t+h} - \bar{r})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}, \quad (4.6)$$

em que $\hat{\varrho}_h$ com $h = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ é a estimativa da covariância ϱ_h , $\hat{\varrho}_0$ é a estimativa da variância ϱ_0 e \bar{r} é a média amostral da série temporal. Para um processo estacionário, esta variância ϱ_0 é a mesma no tempo $t + h$ como no tempo t , o que implica, em particular, que $\rho_0 = 1$. Os valores ρ_h na [Equação 4.6](#) podem ser chamados de função de autocorrelação da amostra, ver [Box Gwilym M. Jenkins \(2008\)](#).

Os modelos $AR(P)$, $MA(Q)$ e $ARMA(P, Q)$ apresentam ACF com as seguintes características:

- (i) um processo $AR(P)$ tem ACF infinita em extensão que decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas;
- (ii) um processo $MA(Q)$ tem ACF finita, no sentido que ela apresenta um corte após a defasagem Q ;
- (iii) um processo $ARMA(P, Q)$ tem ACF infinita que decai de acordo com exponencias e/ou senoides amortecidas após a defasagem $(Q - P)$.

Assim, a partir das ACF estimadas, tenta-se identificar um padrão que se comporte teoricamente com algum modelo. Em particular, a ACF estimada é útil para identificar modelos MA por causa da característica (ii) e não são muito úteis na identificação de modelos ARMA, que possuem ACF complicadas.

4.3.2.1.2 Funções de autocorrelação parcial (PACF)

Outra ferramenta utilizada no processo de identificação de modelos é a PACF. Esta medida corresponde à correlação de r_t e r_{t-h} removendo o efeito das observações $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-h+1}$ e é denotada por ρ_{hh} , ou seja

$$\phi_{hh} = Corr(r_t, r_{t-h} | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-h+1}). \quad (4.7)$$

Um método geral para encontrar a PACF para um processo estacionário com ACF ρ_h é utilizando as equações de Yule-Walker, isto é, para um certo h tem-se que

$$\rho_j = \phi_{h1}\rho_{j-1} + \phi_{h2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{h(h-1)}\rho_{j-h+1} + \phi_{hh}\rho_{j-h}, \quad j = 1, 2, \dots, h$$

e as equações de Yule-Walker podem ser escritas da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{h1} \\ \phi_{h2} \\ \vdots \\ \phi_{hh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_h \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema para $h = 1, 2, 3, \dots$, sucessivamente, obtém-se $\phi_{11} = \rho_1$,

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}, \text{ e } \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_2 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_3 + \rho_2^2 \rho_1 + \rho_1^3 - 2\rho_1 \rho_2 - \rho_1^2 \rho_3}{1 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2}.$$

Em geral, se tem que $\phi_{hh} = \frac{|P_h^*|}{|P_h|}$, em que P_h é a matriz de autocorrelação, e P_h^* é a matriz P_h com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelação. A quantidade ϕ_{hh} , considerada como uma função do atraso h , é chamada de função de autocorrelação parcial.

Nos processos AR, MA e ARMA se tem as seguintes PACF teóricas:

(i) em um processo AR(P) a PACF é da forma:

$$\begin{cases} \phi_{hh} \neq 0, & \text{se } h \leq P \\ \phi_{hh} = 0, & \text{se } h > P; \end{cases}$$

(ii) em um processo MA(Q) a PACF se comporta de maneira similar à ACF de um processo AR(P), isto é, composta por exponenciais e/ou senoides amortecidas;

(iii) um processo ARMA(P, Q) tem PACF que se comporta como a PACF e um processo MA puro.

Devido aos fatores acima, segue que a PACF é útil para identificar modelos AR puros, não sendo tão útil para identificar modelos MA e ARMA.

4.3.2.2 Teste de autocorrelação Ljung-Box

Na quantificação da autocorrelação dos retornos, utiliza-se o teste Ljung-Box, o qual, segundo [Box Gwilym M. Jenkins \(2008\)](#), é dado por

$$Q_{PB}(m) = n(n+2) \sum_{h=1}^m \frac{\rho_h^2}{n-h}, \quad (4.8)$$

em que n é o tamanho da amostra ($n = 3861$ retornos para este trabalho), m é o número de atrasos de autocorrelação, e ρ_h é a autocorrelação da amostra no atraso h .

A hipótese nula para o teste Ljung-Box é que as primeiras m autocorrelações são conjuntamente zero $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$, e a hipótese alternativa é que são

diferentes de zero $H_a : \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_m \neq 0$. Sob a hipótese nula, a distribuição assintótica de Q_{PB} segue uma distribuição qui-quadrada com m graus de liberdade.

A escolha do número de atrasos m afeta o desempenho do teste, e a escolha de quantos utilizar, segundo [Box Gwilym M. Jenkins \(1994\)](#), são $m = 20$ a quantidade sugerida⁷. Mas, a escolha de m recomendada a utilizar segundo [Tsay \(2010\)](#) é $m \approx \log(n)$. Por tal motivo, neste trabalho, para o caso dos modelos ARMA utilizam-se nove ($m = 9$) atrasos, o que equivale aproximadamente a $\log(3861)$.

Sob a decisão de utilizar os primeiros 9 atrasos, sabe-se que o modelo ARMA combina os primeiros 9 atrasos de AR com os 9 primeiros atrasos de MA, obtendo o total de 81 modelos. Desses modelos, o ARMA(9,9) é o que tem o maior número de parâmetros ($k = 18$). Com objetivo de padronizar a quantidade máxima de parâmetros a aceitar em todos os modelos, são testados 18 modelos AR, 18 modelos MA e 81 modelos ARMA.

A estatística Q_{PB} , além de ser utilizada para testar as autocorrelações nos retornos, também é utilizada nas séries de resíduos dos modelos especificados para verificar a autocorrelação durante a etapa de diagnóstico. Se a hipótese nula for rejeitada, significa que existem atrasos diferentes de zero. Isto leva a concluir que é preciso a inclusão de modelos de média condicional na modelagem.

4.3.2.3 Função log-verossimilhança

Na especificação de modelos de média, utiliza-se a função de distribuição gaussiana para as inovações, e portanto, a função de log-verossimilhança a se maximizar é

$$\log(L) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^n \frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}, \quad (4.9)$$

em que a média μ é desconhecida, a variância σ^2 é conhecida e r_t com $t = 1, 2, \dots, n$, é cada um dos retornos ([BOLFARINE, 2001](#)). O estimador de máxima verossimilhança é calculado para cada um dos modelos por meio dos seguintes passos:

- Encontrar a função de verossimilhança;
- Aplicar a função logarítmica;
- Derivar a função de log-verossimilhança em relação ao parâmetro ou aos parâmetros do modelo;
- Igualar o resultado a zero e obter os valores dos parâmetros;
- Verificar que o estimador é ponto de máximo.

⁷ Este número $m = 20$, é na pratica utilizado na maioria dos programas computacionais para o traço das funções de autocorrelação simples e parciais.

4.3.2.4 Critério de Informação Bayesiano (BIC)

O *BIC*, desenvolvido por Schwarz et al. (1978), é um critério para a seleção de modelos entre um conjunto finito de modelos. Ao ajustar modelos, é possível aumentar a probabilidade do ajuste adicionando parâmetros, mas isso pode resultar em *overfitting*. O *BIC* resolve esse problema introduzindo um termo de penalidade para o número de parâmetros (κ) no modelo. Com os estimadores de máxima verossimilhança L , a quantidade de parâmetros dos modelos (κ), e o tamanho da amostra (n) calcula-se o valor de *BIC*. Segundo Liddle (2007), a fórmula é:

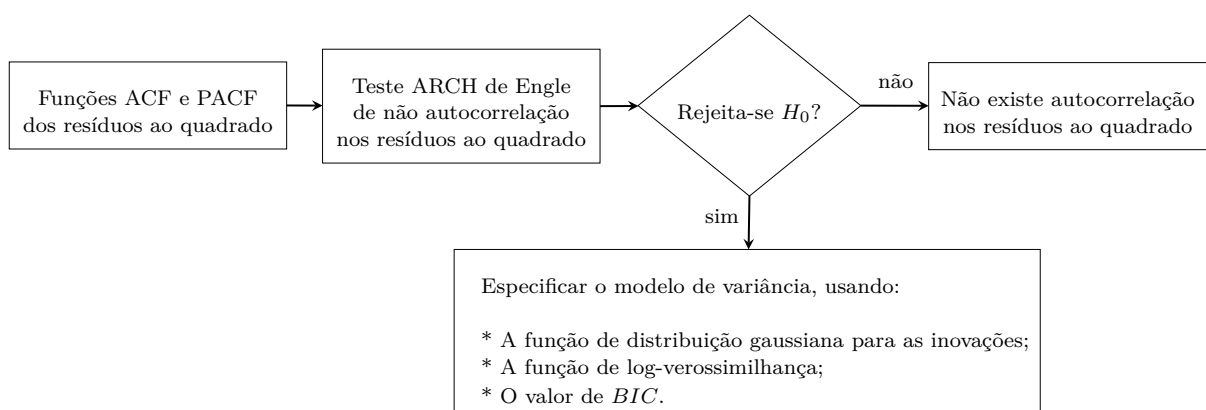
$$BIC = -2 \log(L) + \kappa \log(n). \quad (4.10)$$

Os modelos AR, MA e ARMA com menor valor de *BIC* são escolhidos para representar a média condicional dos modelos de volatilidade.

4.3.3 Caso 3: Identificação de modelos de variância

Nestes modelos, a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos retornos, não é rejeitada, enquanto que a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos resíduos ao quadrado é rejeitada. De maneira que na identificação dos modelos da família GARCH⁸, utiliza-se o esquema da Figura 4, o qual mostra ordenadamente os passos a seguir, caso estes modelos existirem.

Figura 4 – Esquema dos passos para a identificação de modelos de variância condicional, sejam estes, modelos ARCH, GARCH, EGARCH ou GJR.



4.3.3.1 Funções de autocorrelação simples (ACF) e parcial (PACF) dos resíduos ao quadrado

O processo da análise das ACF e PACF nestes modelos de variância é igual que nos modelos ARMA definidos na Subseção 4.3.2.1, mas, a série a se utilizar é a dos resíduos ao

⁸ Correspondente a atingir o segundo objetivo: “Identificar por meio da metodologia do critério de informação Bayesiano (*BIC*), qual modelo puro de variância condicional é o escolhido para representar a variância no processo de volatilidade para os retornos dos mercados financeiros.”

quadrado do modelo ARMA implícito no modelo de variância, ver Engle (1982). O modelo de média implícito neste tipo de modelo de variância puro é o ARMA(0,0), portanto, a série de resíduos ao quadrado é mesma que a série de retornos ao quadrado.

4.3.3.2 Teste ARCH de Engle

Uma série temporal não correlacionada ainda pode ser serialmente dependente devido a um processo dinâmico de variância condicional. Uma série temporal exibindo heteroscedasticidade condicional - ou autocorrelação na série ao quadrado - é dita ter efeitos autorregressivos condicionais heterocedásticos (ARCH). O teste ARCH de Engle é um teste de multiplicador de Lagrange para avaliar o significado dos efeitos do ARCH (ENGLE, 1982).

Seja $r_t = \mu_t + e_t$ uma série temporal de retornos, em que μ_t é a média condicional do processo, e e_t é um processo de inovação com média zero.

Supondo que as inovações são geradas como $e_t = \sigma_t z_t$, em que z_t é um processo independente e identicamente distribuído com média 0 e variância 1. Assim, $E(e_t e_{t+h}) = 0$ para todos os atrasos $h \neq 0$ e as inovações não são correlacionadas.

Seja H_t a história do processo disponível no tempo t . A variância condicional de r_t é $Var(r_t|H_{t-1}) = Var(e_t|H_{t-1}) = E(e_t^2|H_{t-1}) = \sigma_t^2$. Assim, a heterocedasticidade condicional no processo de variância é equivalente à autocorrelação no processo de inovação ao quadrado. A hipótese alternativa para o teste ARCH de Engle é a autocorrelação nos resíduos quadrados, dada pela regressão

$H_a : e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m e_{t-m}^2 + v_t$, em que α_i com $i = 0, \dots, m$ são as primeiras m autocorrelações dos resíduos ao quadrado e v_t é um processo de erro ruído branco. A hipótese nula é $H_0 : \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Continuando com a análise da autocorrelação dos primeiros 9 atrasos ($m = 9$), e sabendo que os modelos GARCH, EGARCH e GJR combinam tanto atrasos GARCH como atrasos ARCH, obtêm-se o total de 81 modelos em cada família. Desses modelos combinados, os modelos GARCH(9,9) por exemplo é o que tem o maior número de parâmetros ($k = 18$). Com objetivo de padronizar a quantidade máxima de parâmetros a aceitar em todos os modelos, são testados 18 modelos ARCH, pois este modelo têm apenas atrasos ARCH, 81 modelos GARCH, 81 modelos EGARCH e 81 modelos GJR.

4.3.3.3 Função log-verossimilhança

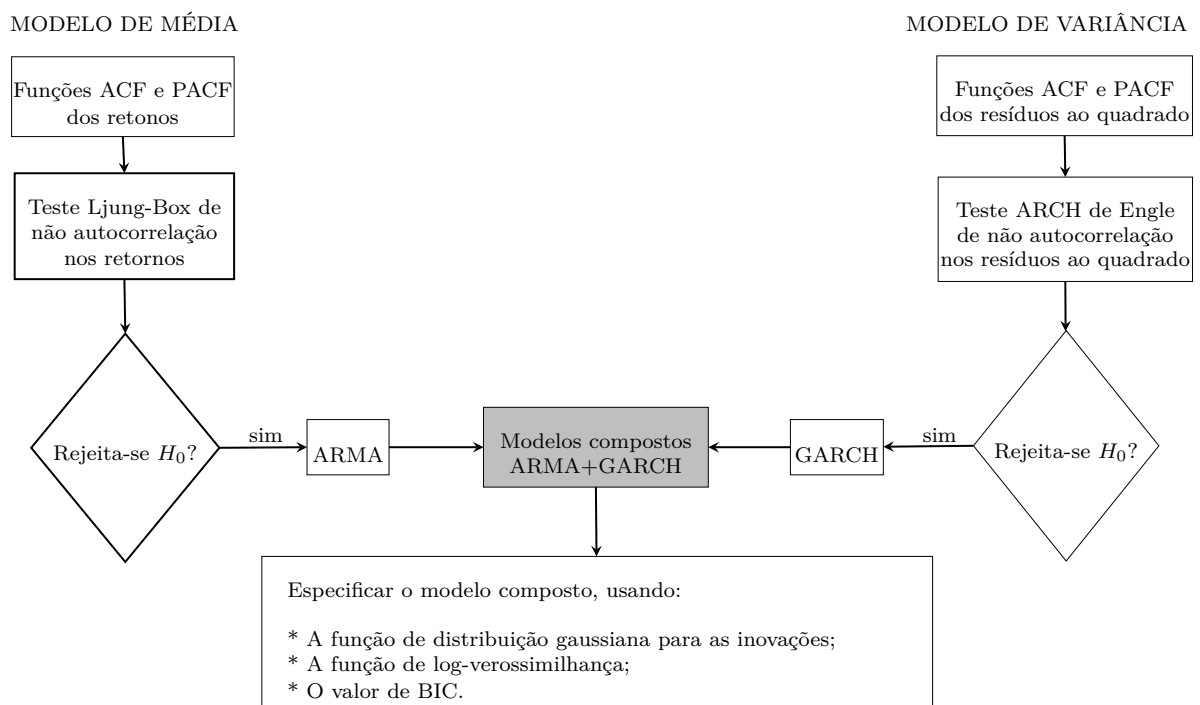
Na especificação de modelos de variância condicional, utiliza-se a função de distribuição gaussiana para as inovações, e portanto, a função de log-verossimilhança a se

maximizar é mesma utilizada nos modelos ARMA: $\log(L) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^n \frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}$, em que μ e σ_t^2 são desconhecidos, r_t com $t = 1, 2, \dots, n$, é cada um dos retornos e n o tamanho da amostra. Finalmente, é calculado o valor de BIC por meio da Equação 4.10. Os modelos ARCH, GARCH, EGARCH e JGR com menor valor de BIC são escolhidos para representar a variância condicional dos modelos de volatilidade.

4.3.4 Caso 4: Identificação de modelos compostos de média e variância

Nestes modelos, tanto a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos retornos, quanto a hipótese nula (H_0) de autocorrelação nos resíduos ao quadrado, são rejeitadas. De maneira que na identificação dos modelos compostos ARMA+GARCH⁹, utiliza-se o esquema da Figura 5, o qual mostra ordenadamente os passos a seguir, caso estes modelos existirem.

Figura 5 – Esquema dos passos na identificação de modelos compostos, sejam estes, AR+ARCH, MA+ARCH, ARMA+ARCH, AR+GARCH, MA+GARCH, ARMA+GARCH, AR+EGARCH, MA+EGARCH, ARMA+EGARCH, AR+GJR, MA+GJR e ARMA+GJR.



⁹ Correspondente a atingir o terceiro objetivo: “Identificar por meio da metodologia do critério de informação Bayesiano (BIC), qual modelo composto de média e variância condicionais é o escolhido para representar a variância nos processos de volatilidade para os retornos dos mercados financeiros.”

Nestes modelos compostos, a análise das ACF e PACF, o teste de não autocorrelação nos retornos e de não autocorrelação nos resíduos ao quadrado, é feita de maneira separada para os modelos ARMA, quanto para os modelos de variância. Estes processos são os mesmos explicados nas Subseções 4.3.2 e 4.3.3.

O número de combinações neste tipo de modelos ao utilizar os primeiros 9 atrasos ($m = 9$), é muito alto, devido á combinação dos atrasos AR, MA, GARCH e ARCH. Assim, o tempo computacional necessário na obtenção dos resultados é alto, motivo pelo qual utilizam-se os primeiros 4 atrasos ($m = 4$). Assim, o número de modelos compostos testados são apresentados na Tabela 1.

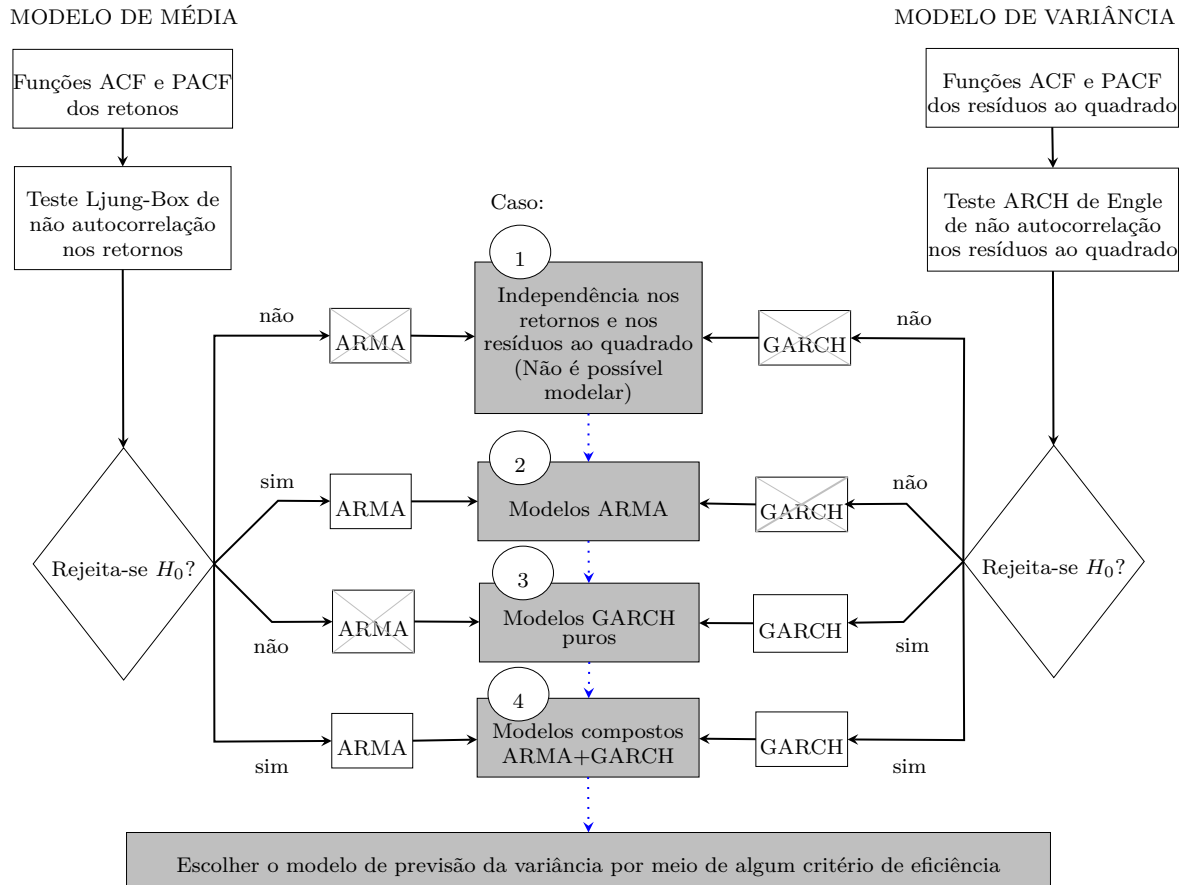
Tabela 1 – Modelos de média e variância condicional combinados para obtenção dos modelos compostos, e quantidade de modelos testados.

Modelos de média	Modelos de variância			
	ARCH	GARCH	EGARCH	GJR
AR	$(P)+(p, q)=16$	$(P)+(p, q)=64$	$(P)+(p, q)=64$	$(P)+(p, q)=64$
MA	$(Q)+(p, q)=16$	$(Q)+(p, q)=64$	$(Q)+(p, q)=64$	$(Q)+(p, q)=64$
ARMA	$(P, Q)+(p, q)=64$	$(P, Q)+(p, q)=256$	$(P, Q)+(p, q)=256$	$(P, Q)+(p, q)=256$

A função de log-verossimilhança e a equação para calcular o valor de BIC a se utilizar nestes modelos, são as mesmas dadas em 4.9 e 4.10, respectivamente. Os modelos compostos de menor valor de BIC em cada combinação, são escolhidos para representar a média e a variância condicional dos modelos de volatilidade.

A maneira de resumo da Seção 4.3, mostra-se na Figura 6 o esquema geral dos passos necessários para identificar os casos em que: não exista a possibilidade de modelar, os modelos sejam de média condicional, os modelos sejam de variância condicional e o caso em que os modelos sejam compostos de média e variância condicional, se eles existirem.

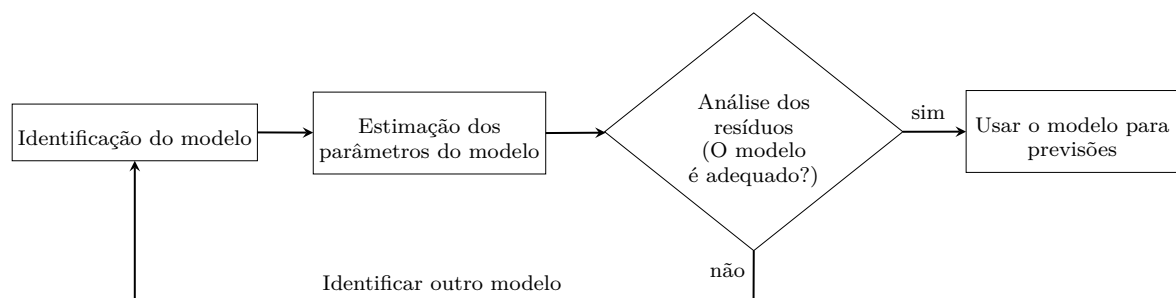
Figura 6 – Esquema para identificar os casos em que não é possível modelar, em que os modelos são de média (ARMA), de variância (GARCH) e compostos de média e variância (ARMA+GARCH).



4.4 Modelos de volatilidade para a série de retornos

Segundo [Box Gwilym M. Jenkins \(2008\)](#), os estágios da metodologia Box-Jenkins para construção de modelos de previsão¹⁰ são os mostrados na [Figura 7](#).

Figura 7 – Esquema da abordagem iterativa para construção de modelos, sejam estes, ARMA, GARCH puros ou compostos ARMA+GARCH, mediante a metodologia de Box-Jenkies.



¹⁰ Correspondente a atingir o quarto objetivo: “Concluir, qual dos modelos concorrentes para representar a volatilidade condicional é o de “melhor” desempenho preditivo, mediante a comparação de diferentes critérios de eficiência, para ser utilizado na simulação e previsão de retornos e variâncias condicionais.”

4.4.1 Identificação dos modelos

Terminada a fase de identificação ou especificação de modelos de média, de variância e compostos, decide-se especificar 5 modelos para concorrer nas seguintes fases da metodologia de Box-Jenkies. Esses modelos são: os três modelos compostos escolhidos na Subseção 4.3.4, o modelo de variância condicional puro de menor *BIC* escolhido na Subseção 4.3.3 e o modelo GARCH (p, q) ¹¹ de menor *BIC* escolhido também na Subseção 4.3.3.

4.4.2 Estimação de parâmetros dos modelos

Com objetivo de fazer previsões, seleciona-se apenas um modelo dentre os 5 especificados. A metodologia na seleção desse modelo é a seguinte:

1. Mediante o teste de Ljung-Box, dado na Equação 4.8, testa-se a autocorrelação dos resíduos padronizados dos 5 modelos. Mediante o teste ARCH de Engle dado na Subseção 4.3.3.2 testa-se a heterocedasticidade com 2 atrasos e a normalidade é testada mediante a estatística *JB* de Jarque-Bera.

O teste de Jarque-Bera é um teste adequado quando uma distribuição é desconhecida e seus parâmetros devem ser estimados (JARQUE; BERA, 1987). A estatística de teste *JB* de Jarque-Bera é definida por

$$JB = \frac{n}{6} \left(A^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right), \quad (4.11)$$

em que n é o tamanho da amostra, A é assimetria da amostra e K a curtose. Para grandes tamanhos de amostra, a estatística de teste tem uma distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade.

2. Os modelos em que a não autocorrelação com 9 atrasos e a não heterocedasticidade com 2 atrasos (ou apenas uma delas) seja rejeitada, são excluídos da concorrência.
3. Com os modelos que chegar até este ponto, faz-se o seguinte:
 - No caso dos modelos puros de variância. É simulado 20% dos retornos e das variâncias, mediante as inovações e as variâncias inferidas previamente.
 - No caso dos modelos compostos. É simulado 20% dos retornos, dos resíduos e das variâncias, mediante as inovações observadas, os resíduos e as variâncias inferidas previamente.

¹¹ Decide-se incorporar este modelo por ser um modelo popular na modelagem da volatilidade.

4. Como medida de desempenho preditivo, utiliza-se o Erro Quadrático Médio (EQM), definido como

$$EQM = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (r_i^v - \hat{r}_i^v)^2, \quad (4.12)$$

em que r_i^v são os retornos de validação, \hat{r}_i^v são os retornos simulados e M é 20% dos retornos de validação (neste trabalho, $M = 772$). Compara-se 20% dos retornos simulados com 20% dos retornos de validação e seleciona-se o modelo de menor EQM para realizar as previsões.

4.4.3 Verificação

- Se a hipótese nula de normalidade dos resíduos padronizados do modelo selecionado é rejeitada, se faz um reajuste ao modelo.
- Supondo que as inovações (resíduos) do modelo reajustado seguem uma distribuição t de Student com $v > 2$ graus de liberdade, calcula-se o valor de BIC usando a função log-verossimilhança

$$\log(L) = n \log \left[\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(v-2)}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log \sigma_t^2 - \frac{v+1}{2} \sum_{t=1}^n \log \left[1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2(v-2)} \right], \quad (4.13)$$

em que L é a função de verossimilhança, n é 80% dos retornos utilizados no treinamento, v são os graus de liberdade, $\Gamma(\cdot)$ é a função gamma, σ_t^2 é a variância e ε_t é o erro.

- Seleciona-se o modelo com o menor valor de BIC e de EQM para a etapa de previsões.

4.4.4 Previsões

Com o modelo selecionado, utiliza-se 100% dos dados (retornos) para estimar os parâmetros. Com estes parâmetros estimados, com os retornos observados e com as variâncias inferidas como dados pré-amostra, são previstos 1000 caminhos de variância com 772 de comprimento. Esses 1000 caminhos de variâncias são previstos mediante simulações Monte Carlo, cujos passos são:

1. Para modelos puros de variância:

- Utilizar as variâncias previamente inferidas e as inovações reais;
- Gerar a próxima variância condicional recursivamente usando o modelo de variância condicional especificado;
- Simular a próxima inovação a partir da distribuição da inovação (Gaussiana ou t de Student) usando a variância condicional atual.

2. Para modelos compostos de variância:

- Utilizar os resíduos e as variâncias previamente inferidas e as inovações reais;
- Gerar a próxima variância condicional recursivamente usando o modelo de variância condicional especificado;
- Simular a próxima inovação a partir da distribuição da inovação (Gaussiana ou t de Student) usando a variância condicional atual.

A média desses 1000 caminhos é comparada com o Erro Quadrático Médio Mínimo (MMSE) de Monte Carlo, sendo este o caminho de previsões da variância que minimiza $E((\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2 | H_t))$, em que σ_t^2 é o valor da variância real, $\hat{\sigma}_t^2$ é a variância prevista e H_t são os dados históricos que condiciona as variâncias previstas. Finalmente, são comparadas com a variância teórica (chamada também incondicional) dos modelos GARCH (p, q) e EGARCH (p, q) , dadas nas Equações 2.10 e 2.13 respectivamente.

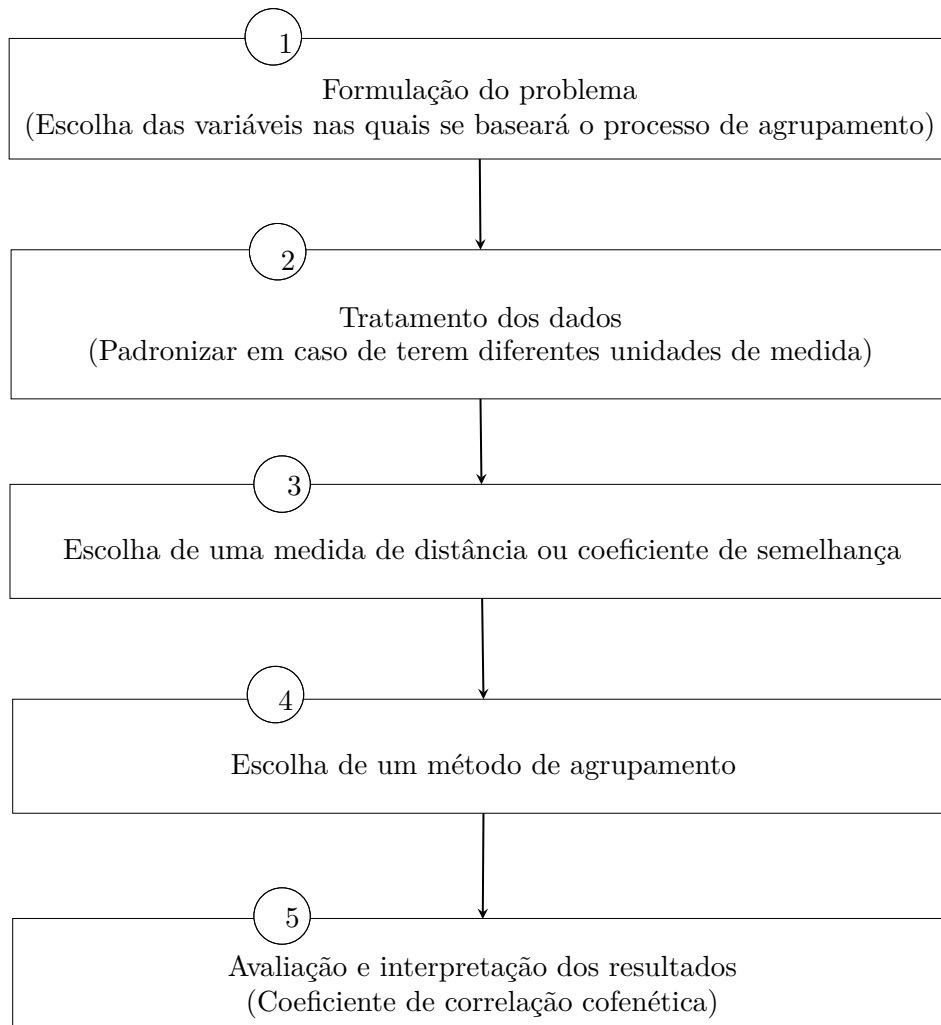
4.5 Agrupamento de índices financeiros mediante: retornos observados, previsões de retornos, variâncias e volatilidades

Terminada a modelagem de variância, incluindo a fase de previsões de retornos, variâncias e volatilidades, inicia-se o processo de agrupamento. Neste trabalho, o processo consiste em agrupar os índices financeiros em quatro momentos diferentes. O primeiro momento é em relação aos retornos observados¹², o segundo, terceiro e quarto momentos é em relação a previsões de retornos, previsões de variância e previsões de volatilidade¹³. Na Figura 8, mostra-se o esquema geral dos passos para o processo de agrupamento.

¹² Correspondente a atingir o quinto objetivo: “Comparar mediante análise de agrupamento, se os índices financeiros que forem modelados mediante mesmo modelo de variância, são organizados no mesmo grupo.”

¹³ Correspondente a atingir o sexto objetivo: “Verificar se os modelos de variância condicional como funções de transferência, modificam as características do agrupamento dos retornos observados em relação as previsões de retornos, variâncias e volatilidades.”

Figura 8 – Esquema geral dos passos para selecionar a medida de distância e o processo de agrupamento na análise de agrupamento, avaliada mediante a correlação cofenética.



Os passos da metodologia de agrupamento organizados no esquema anterior são explicados baseado nos dados específicos deste trabalho.

1. **Formulação do problema.** As variáveis nas quais se baseará o processo de agrupamento são;
 - (a) os últimos 25 retornos observados das séries de retornos para o primeiro agrupamento;
 - (b) as previsões de 25 retornos para o segundo agrupamento;
 - (c) as previsões de 25 variâncias para o terceiro agrupamento;
 - (d) as previsões de 25 variâncias para o quarto agrupamento.

2. **Tratamento dos dados.** Os dados utilizados são os retornos, os quais já estão padronizados do início deste trabalho;
3. **Medidas de distância escolhidas.** As medidas de distância utilizadas são: Euclidiana, Maximum, Manhattan, Canberra e Minkowski;
4. **Métodos de agrupamento.** Os métodos utilizados são: Ward.D, Ward.D2, ligação simples, ligação completa, ligação k-means, mcquitty, mediana e centroide;
5. **Avaliação de resultados.** Na seleção da combinação da medida de distância e o método de agrupamento, é utilizado o coeficiente de correlação cofenética, dado na [Equação 3.5](#).

5 Resultados e discussão

Neste capítulo, os resultados são apresentados seguindo a sequência dos passos mostrados na metodologia, lembrando que as séries utilizadas são os retornos logarítmicos dos preços diários de fechamento dos dezesseis mercados, com 3861 observações cada base de dados.

Na primeira seção, faz-se uma análise exploratória das séries, apresentando algumas estatísticas descritivas e provas de normalidade, estacionariedade, autocorrelação e heterocedasticidade. Isto é feito com a finalidade de verificar que tipo de modelagem deve-se incluir: apenas os modelos de média condicional (ARMA), os de variância condicional puros (GARCH), ou os compostos de média e variância condicional (ARMA+GARCH). Na segunda seção, utiliza-se o Critério de Informação Bayesiano (*BIC*) para especificar os modelos de média condicional, de variância condicional e os compostos (ARMA+GARCH).

Na terceira seção, estimam-se os parâmetros dos modelos sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição gaussiana. As estimativas dos parâmetros dos modelos, os 80% dos retornos de treinamento e, os 80% das variâncias inferidas, são utilizados para simular os 20% dos retornos e das variâncias condicionais. Estes dados são o insumo para demonstrar o desempenho preditivo dos modelos.

Nos casos em que a hipótese de normalidade dos resíduos do modelo selecionado seja rejeitada, as previsões são feitas com o modelo reajustado à suposição que as inovações seguem uma distribuição *t* de Student.

5.1 Análise exploratória dos índices financeiros

5.1.1 Normalidade nas séries de retorno

Conhecendo a importância que a distribuição normal tem tido na modelagem de numerosos fenômenos naturais, sociais e psicológicos, verifica-se se as séries de retornos utilizadas neste trabalho são ou não normalmente distribuídas, cuja finalidade é saber se elas devem ou não ser modeladas mediante uma distribuição normal. Algumas características numéricas como o primeiro quartil (Q_1), a mediana (Md), o terceiro quartil (Q_3), a média (\bar{x}), a assimetria (A) e a curtose (K), ajudam a ter a primeira abordagem se são ou não normalmente distribuídas. As estatísticas são apresentadas na [Tabela 2](#).

Tabela 2 – Estatística descritiva para analisar normalidade nas séries de retornos logarítmicos de fechamento diários dos índices financeiro.

Índice	$Q_1^{(a)}$	Md. ^(b)	$Q_3^{(c)}$	$\bar{x}^{(d)}$	$A^{(e)}$	$K^{(f)}$
Brasil (BVSP)	-0,0110	7,1665e-04	0,0127	4,9602e-04	0,7344	24,3017
México (MXX)	-0,0069	9,2116e-04	0,0085	6,5665e-04	-0,0360	9,8351
EUA (IXIC)	-0,0078	1,1000e-03	0,0090	3,5519e-04	-0,1920	6,8805
EUA (GSPC)	-0,0061	7,0503e-04	0,0067	2,4952e-04	-0,3050	8,5372
EUA (DJI)	-0,0059	5,1634e-04	0,0065	2,4434e-04	-0,2472	8,2865
Canadá (GSP TSE)	-0,0053	6,8366e-04	0,0065	2,2076e-04	-0,4631	9,8016
Austrália (AORD)	-0,0049	7,4370e-04	0,0060	2,0288e-04	-0,6136	12,1244
Malásia (KLSE)	-0,0047	2,9055e-04	0,0050	7,5340e-05	1,2100	33,4803
China (HSI)	-0,0082	5,0380e-04	0,0090	1,4206e-04	0,1538	12,4032
China (SSE)	-0,0077	7,4393e-05	0,0090	2,6611e-04	-0,3226	7,5974
Japão (N225)	-0,0088	3,5866e-04	0,0094	-1,2236e-05	-0,2452	7,5822
França (FCHI)	-0,0081	4,5942e-04	0,0087	1,3416e-04	0,0158	7,6047
Suíça (SSMI)	-0,0065	4,3206e-04	0,0072	1,3338e-04	-0,0158	12,1471
Alemanha (GDAX)	-0,0085	9,4182e-04	0,0092	2,9151e-04	0,0009	7,1728
Áustria (ATX)	-0,0069	8,1106e-04	0,0084	1,7546e-04	0,0340	15,0406
Bélgica (BFX)	-0,0064	3,4727e-04	0,0074	1,2080e-04	-0,2621	8,1780

^(a) primeiro quartil, ^(b) mediana, ^(c) terceiro quartil, ^(d) média, ^(e) assimetria, ^(f) curtose.

Dos resultados da [Tabela 2](#), pode-se ver que a média (\bar{x}), por exemplo, indica que não existe deslocamento dos retornos em relação ao parâmetro de comparação que é zero. Outra característica é a assimetria (A), indicando que quase todas as séries são assimétricas, seja à esquerda ou à direita, afastando-se ligeiramente do parâmetro de comparação que é o zero, exceto a Alemanha com uma assimetria de 0,0009. Em relação à curtose (K), todas as séries indicam ser leptocúrticas, afastando-se muito de uma distribuição normal, na qual o parâmetro de comparação é três.

Os vieses negativo e positivo da característica assimétrica e curtoses superiores a três, levam a suspeitar que as séries de retornos não são normalmente distribuídas. Para formalizar essa suspeita de evidência ou não de normalidade, utiliza-se a técnica fractal do “Expoente de *Hurst*” explicada na Subseção [4.2.2.1](#). A hipótese testada é: “a série de retornos provêm de uma distribuição normal. Os resultados são mostrados na [Tabela 3](#).

Tabela 3 – Estatística de contraste para o teste de normalidade das séries de retornos logarítmicos de fechamento diários dos índices financeiro, mediante o expoente de *Hurst* e seu método do *Rescaled range*.

Índice	Equação linear gerada	<i>Hurst</i>
Brasil (BVSP)	$\log(R/S)_s = 0,5760 \log(s) - 0,2333$	0,5760
México (MXX)	$\log(R/S)_s = 0,5534 \log(s) - 0,1133$	0,5540
EUA (IXIC)	$\log(R/S)_s = 0,5640 \log(s) - 0,2063$	0,5668

Continua na próxima página

Tabela 3 – Continuação da página anterior

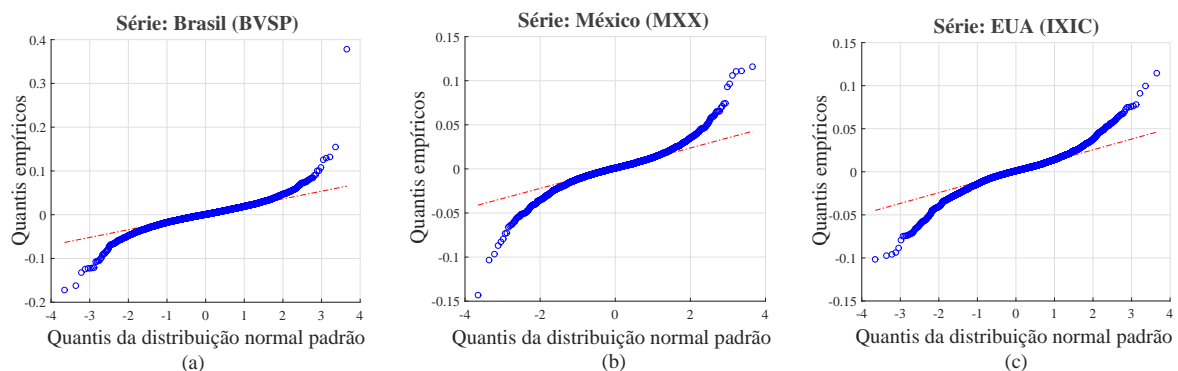
Índice	Equação linear gerada	Hurst ¹
EUA (GSPC)	$\log(R/S)_s = 0,5292 \log(s) - 0,1131$	0,5292
EUA (DJI)	$\log(R/S)_s = 0,5293 \log(s) - 0,0915$	0,5293
Canadá (GSPTSE)	$\log(R/S)_s = 0,5761 \log(s) - 0,2105$	0,5761
Austrália (AORD)	$\log(R/S)_s = 0,5432 \log(s) - 0,0902$	0,5432
Malásia (KLSE)	$\log(R/S)_s = 0,5999 \log(s) - 0,2194$	0,5910
China (HSI)	$\log(R/S)_s = 0,5707 \log(s) - 0,1806$	0,5707
China (SSE)	$\log(R/S)_s = 0,6161 \log(s) - 0,3638$	0,6161
Japão (N225)	$\log(R/S)_s = 0,5502 \log(s) - 0,1510$	0,5502
França (FCHI)	$\log(R/S)_s = 0,5399 \log(s) - 0,1434$	0,5399
Suíça (SSMI)	$\log(R/S)_s = 0,5662 \log(s) - 0,1888$	0,5662
Alemanha (GDAX)	$\log(R/S)_s = 0,5657 \log(s) - 0,2048$	0,5657
Áustria (ATX)	$\log(R/S)_s = 0,5765 \log(s) - 0,1939$	0,5765
Bélgica (BFX)	$\log(R/S)_s = 0,5795 \log(s) - 0,2227$	0,5795

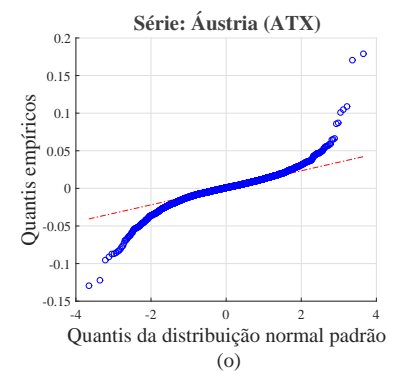
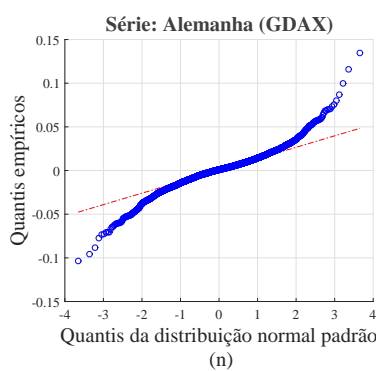
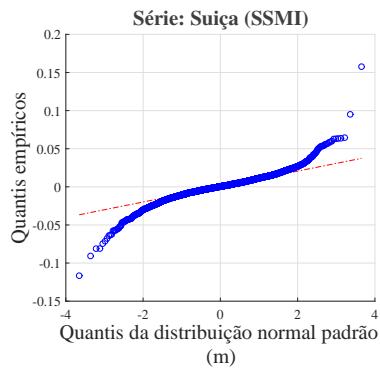
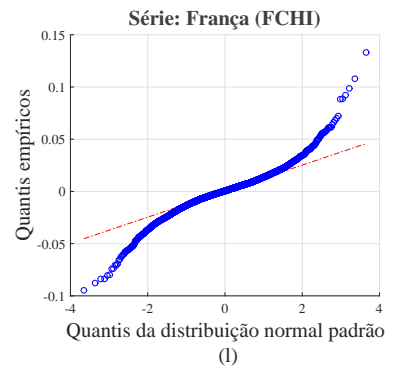
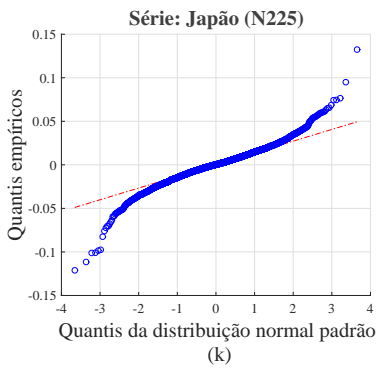
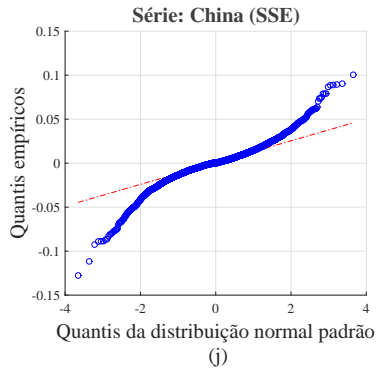
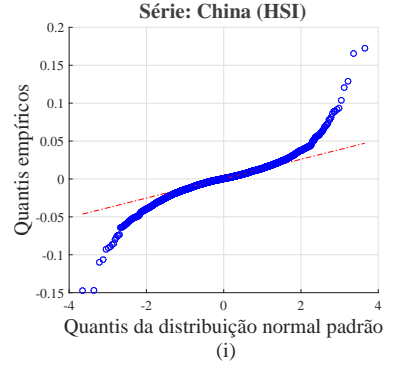
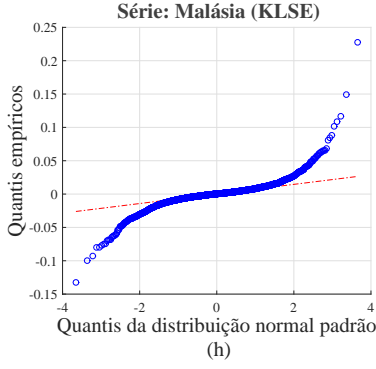
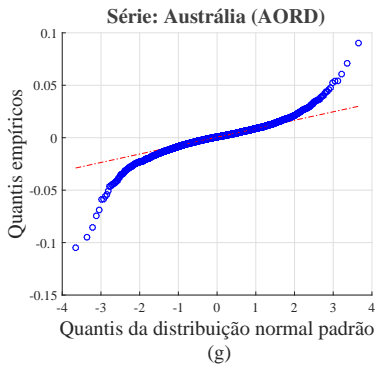
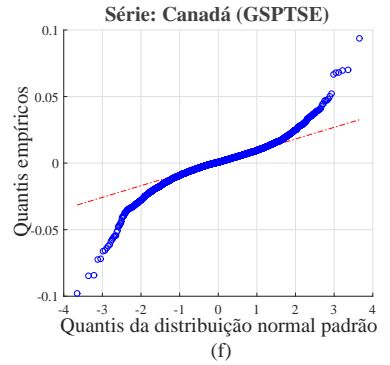
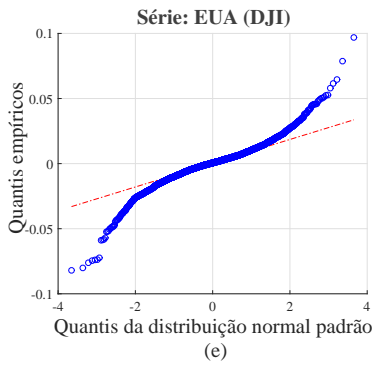
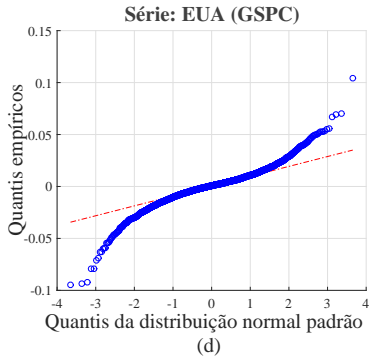
¹Expoente de Hurst

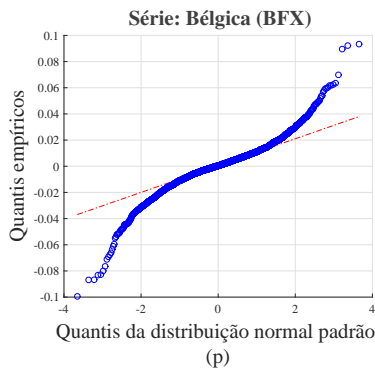
Com os resultados [Tabela 3](#), observa-se que todos os coeficientes (*Hurst*) estão no intervalo entre 0,5 e 1. Concluindo-se que nenhuma das séries de retornos tem um comportamento normalmente distribuído, rejeitando-se a hipótese de normalidade.

Os gráficos QQ-plot, são outro meio para analisar a normalidade nas séries temporais. Portanto, na [Figura 9](#), mostram-se os gráficos QQ-plot das séries de retornos comparando os quantis empíricos com os da normal padrão.

Figura 9 – Quantis empíricos das séries de retornos dos índices versus os quantis da distribuição normal padrão para analisar a normalidade.







Pode-se ver que nas 16 séries, as caudas tanto esquerdas quanto direitas são mais pesadas que as correspondentes a uma distribuição normal, reafirmando a rejeição da normalidade em todas as séries de retornos.

Em conclusão, todas estas séries de retornos diários de fechamento não devem ser modeladas mediante uma distribuição normal, e portanto, deve-se pensar em outro tipo de modelagem para estas séries de retornos.

5.1.2 Estacionariedade nas séries de retorno

Outro conceito a ter presente na análise de séries temporais é o de “estacionariedade”, devido a que a maioria dos procedimentos de análise estatística de séries temporais supõe que estas sejam estacionárias, portanto, será necessário a sua verificação. Uma série temporal é dita estacionária quando ela se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável.

Para tal fim, analisa-se primeiramente, a aparência das séries de retornos mostradas na [Figura 2](#) (gráficos na cor azul). Pode-se ver que a série de retornos se desenvolve no tempo ao redor da média constante, zero, suspeitando-se então a existência de estacionariedade. Esta característica de estacionariedade, é testada formalmente utilizando o teste *KPSS* dado na [Equação 4.4](#), com a hipótese nula “A série de retornos é de tendência estacionária”. Os valores da estatística de contraste são apresentados na [Tabela 4](#).

Tabela 4 – Estatística de contraste para o teste de estacionariedade das séries de retornos mediante o Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (*KPSS*), com o 5% de significância.

Índice	Estacionariedade	
	<i>KPSS</i> ¹	v.c. ²
Brasil (BVSP)	0,0499	0,1460
México (MXX)	0,0523	0,1460

Continua na próxima página

Tabela 4 – *Continuação da página anterior*

Índice	Estacionariedade	
	$KPSS^1$	v.c. ²
EUA (IXIC)	0,0864	0,1460
EUA (GSPC)	0,0863	0,1460
EUA (DJI)	0,0519	0,1460
Canadá (GSPTSE)	0,0374	0,1460
Austrália (AORD)	0,0434	0,1460
Malásia (KLSE)	0,1206	0,1460
China (HSI)	0,0383	0,1460
China (SSE)	0,0581	0,1460
Japão (N225)	0,0509	0,1460
França(FCHI)	0,0835	0,1460
Suíça (SSMI)	0,0700	0,1460
Alemanha (GDAX)	0,0613	0,1460
Áustria (ATX)	0,1062	0,1460
Bélgica (BFX)	0,0799	0,1460

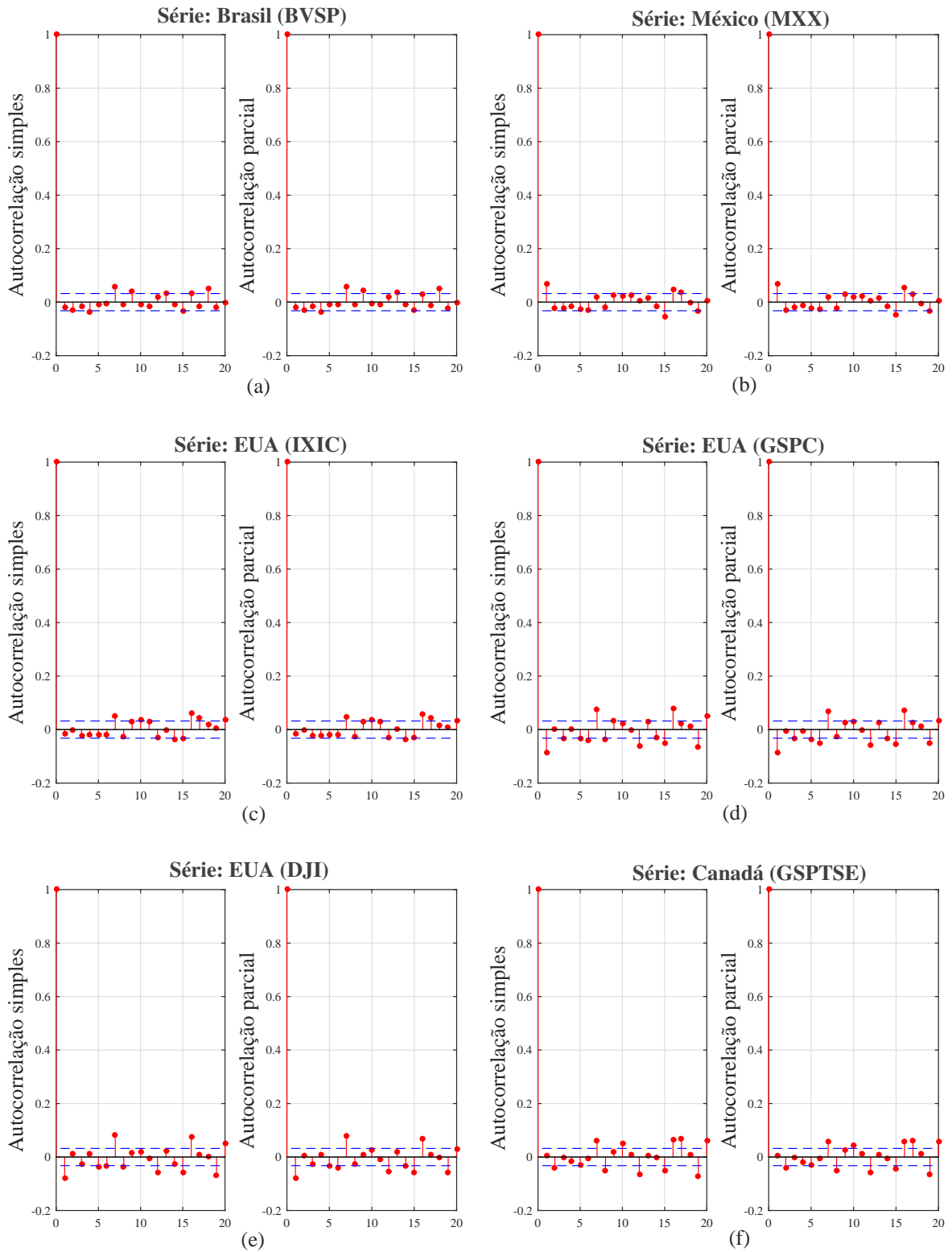
¹Estatística de teste, ²Valor crítico.

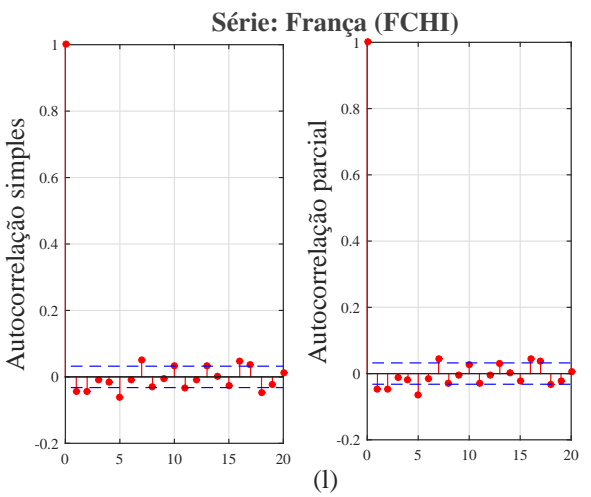
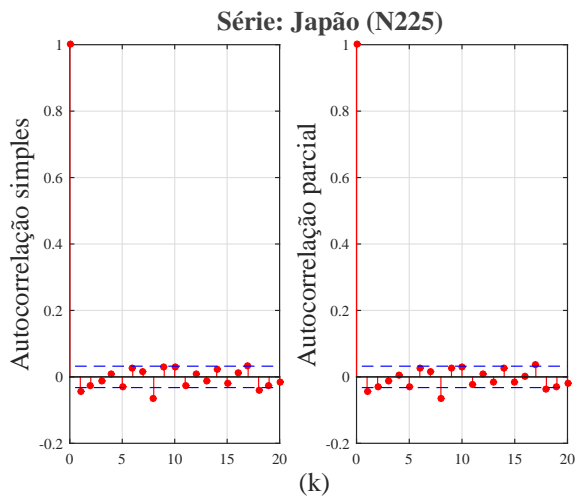
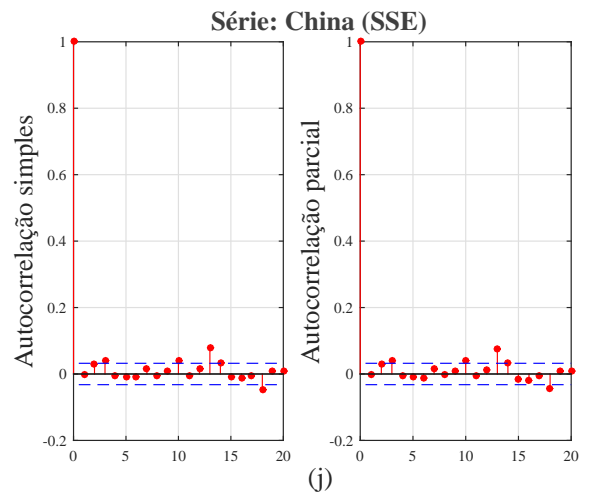
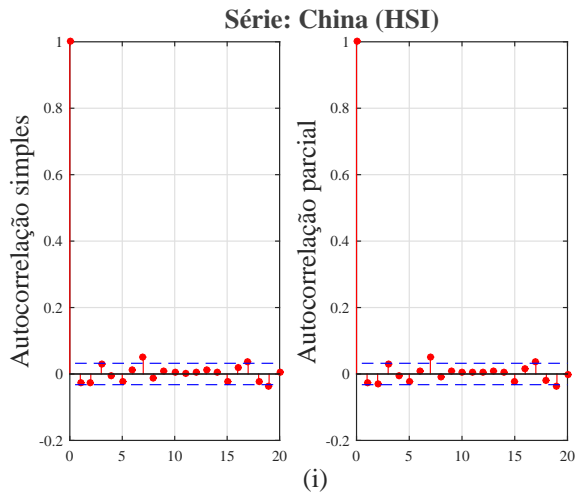
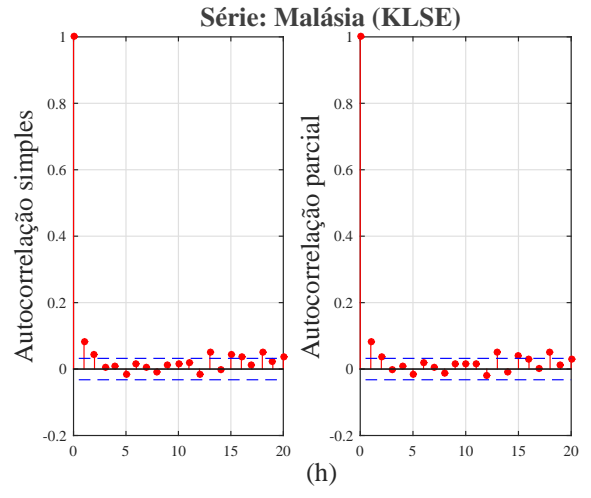
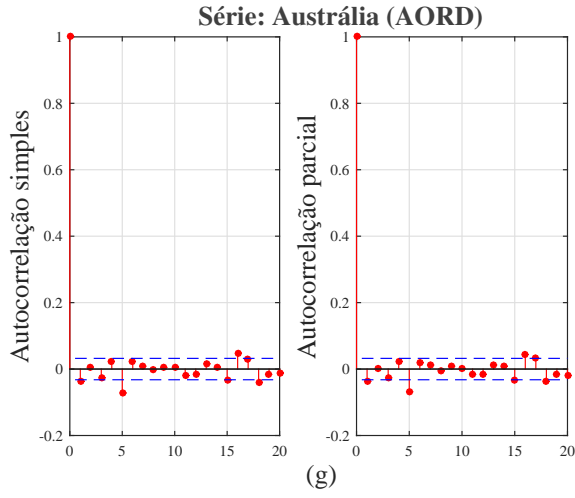
Os resultados levam a concluir que em todas as séries, a hipótese nula não é rejeitada, pois em todos os casos o valor da estatística $KPSS$ cai na zona de não rejeição por ser menor que o valor crítico. Em conclusão, todas as séries de retornos analisadas neste trabalho são estacionárias.

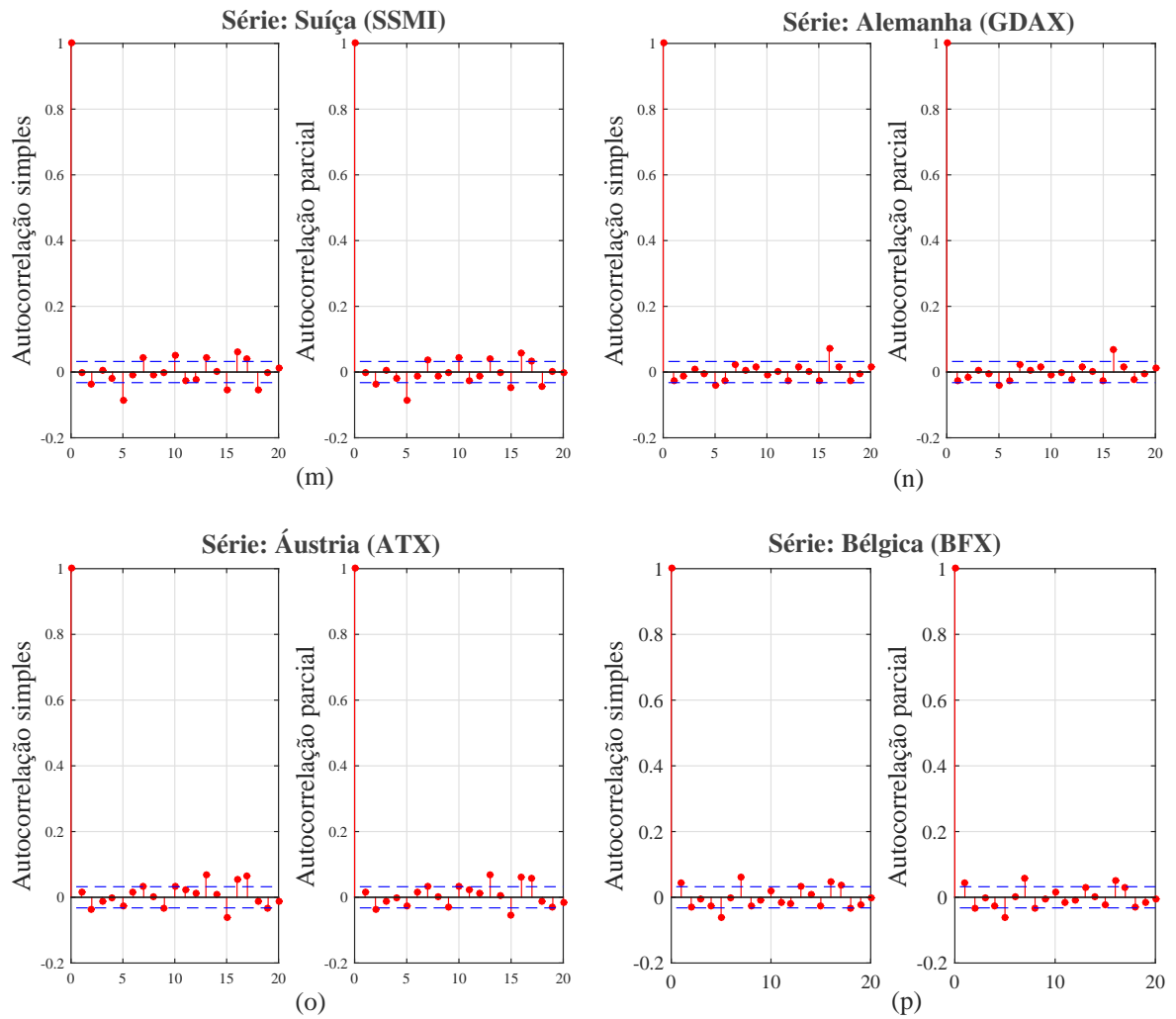
5.1.3 Autocorrelação nas séries de retorno

A modelagem econométrica de séries temporais tem como objetivo capturar a relação linear entre a série r_t (em que r_t , é a série temporal dos retornos neste trabalho) e informações disponíveis antes de t . Desta forma, os valores históricos de r_t podem ser úteis para modelar o seu comportamento ao longo do tempo. Neste caso, a correlação entre os retornos tem um papel importante. Tais correlações são chamadas de **autocorrelação** e esta é uma ferramenta básica para estudar uma série temporal estacionária para a identificação de modelos ARMA. As funções de autocorrelação simples e parcial para cada série de retornos r_t são mostradas na [Figura 10](#).

Figura 10 – Funções de autocorrelação simples (ACF) e funções de autocorrelação parcial (PACF) versus atrasos das séries de retornos para a identificação de modelos ARMA.







Na [Figura 10](#), observa-se que em todas as séries de retornos existe pelo menos um atraso (barras na cor vermelha) fora dos limites de confiança (linhas na cor azul) durante os primeiros nove atrasos que são os priorizados nesta análise.

Para testar formalmente a autocorrelação das séries de retornos r_t , utiliza-se o teste de significância de autocorrelação Q_{PB} dado na [Equação 4.8](#) com a hipótese nula das primeiras nove autocorrelações dos retornos são conjuntamente iguais a zero,

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_9 = 0. \quad (5.1)$$

As estatísticas de teste e seus correspondentes valores críticos são apresentados na [Tabela 5](#).

Tabela 5 – Estatística de contraste para o teste de autocorrelação nos primeiros nove atrasos ($m = 9$) das séries de retornos, mediante o Q-Test Ljung-Box (Q_{BP}) para a identificação de modelos ARMA, com o 5% de significância.

Índice		m^a								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Brasil (BVSP)	$Q_{BP}(m)^b$	1,428	4,807	5,768	10,600	10,833	10,951	24,441	24,667	31,428
	v.c. ^c	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
México (MXX)	$Q_{BP}(m)$	17,353	19,590	21,480	22,354	24,796	27,984	29,175	30,509	33,085
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
EUA (IXIC)	$Q_{BP}(m)$	1,152	1,156	2,969	4,581	5,796	6,993	16,576	19,360	22,958
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
EUA (GSPC)	$Q_{BP}(m)$	27,784	27,829	32,148	32,148	36,716	43,557	66,120	71,479	76,140
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
EUA (DJI)	$Q_{BP}(m)$	24,625	25,135	27,831	28,428	33,492	37,627	64,033	69,522	70,622
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Canadá (GSP TSE)	$Q_{BP}(m)$	0,113	6,557	6,563	7,657	10,799	10,903	25,643	35,129	36,682
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Austrália (AORD)	$Q_{BP}(m)$	5,528	5,615	8,063	10,109	29,430	31,727	31,950	31,962	32,112
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Malásia (KLSE)	$Q_{BP}(m)$	25,595	32,693	32,773	33,188	34,146	35,269	35,377	35,755	36,363
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
China (HSI)	$Q_{BP}(m)$	2,855	5,895	9,530	9,684	11,619	12,117	22,435	23,178	23,487
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
China (SSE)	$Q_{BP}(m)$	0,003	3,734	9,559	9,627	9,827	10,212	11,199	11,282	11,647
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Japão (N225)	$Q_{BP}(m)$	6,959	9,677	10,167	10,382	13,785	16,675	17,473	33,914	37,087
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
França (FCHI)	$Q_{BP}(m)$	7,883	15,558	15,774	16,588	31,745	31,977	42,212	45,496	45,585
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Suíça (SSMI)	$Q_{BP}(m)$	0,029	4,795	4,856	6,369	34,483	34,895	41,919	42,346	42,346
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Alemanha (GDAX)	$Q_{BP}(m)$	2,723	3,451	3,650	3,740	10,440	12,962	15,161	15,231	16,297
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Áustria (ATX)	$Q_{BP}(m)$	0,842	5,824	6,506	6,530	9,061	9,850	14,474	14,482	18,780
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919
Bélgica (BFX)	$Q_{BP}(m)$	7,949	11,321	11,439	14,096	29,498	29,508	44,094	46,970	47,338
	v.c.	3,842	5,992	7,815	9,488	11,071	12,592	14,067	15,507	16,919

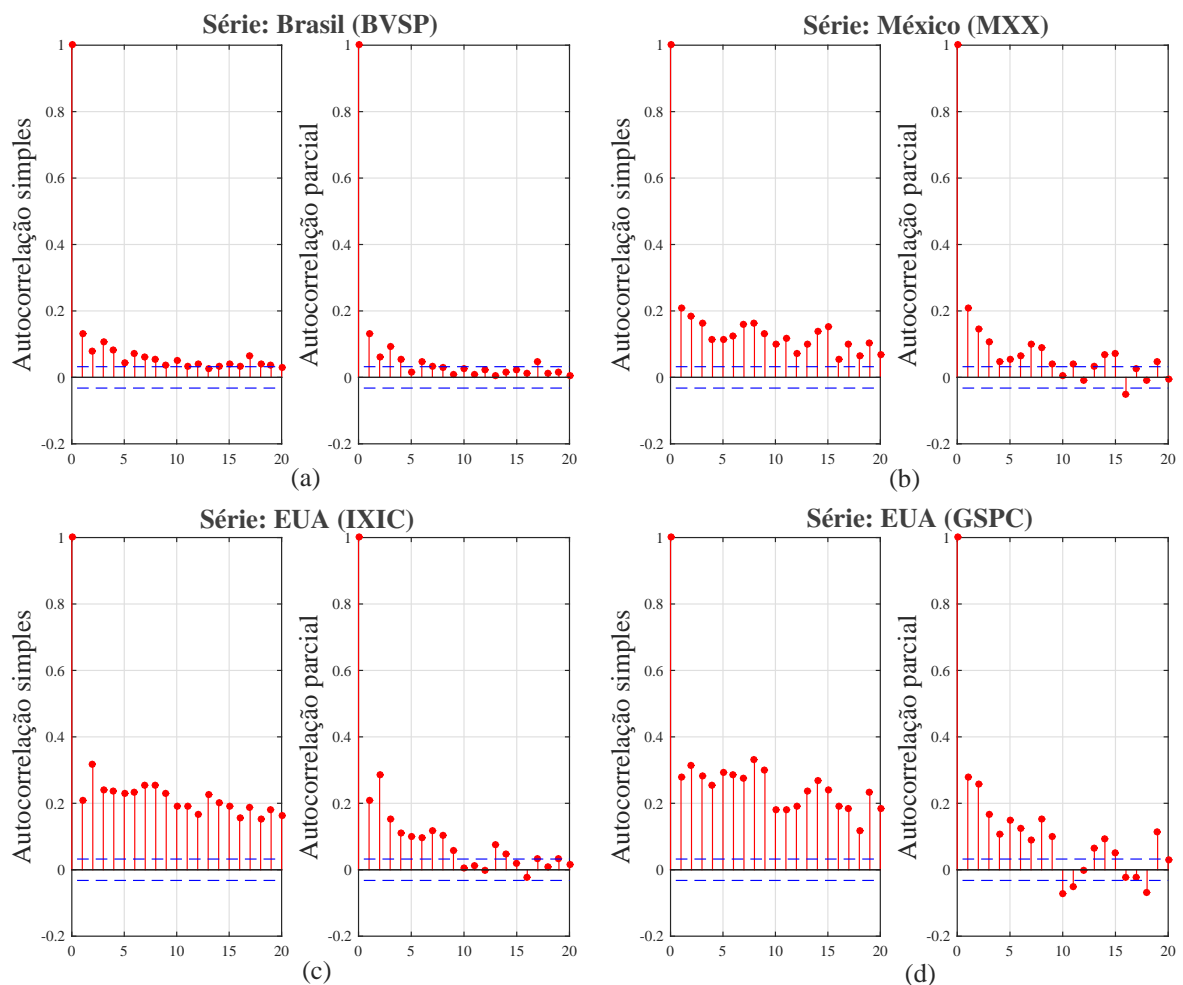
^a Atrasos, ^b Estatística de teste, ^c Valor crítico.

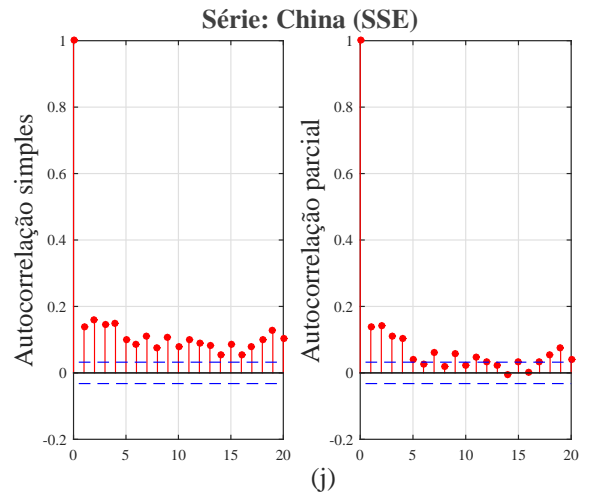
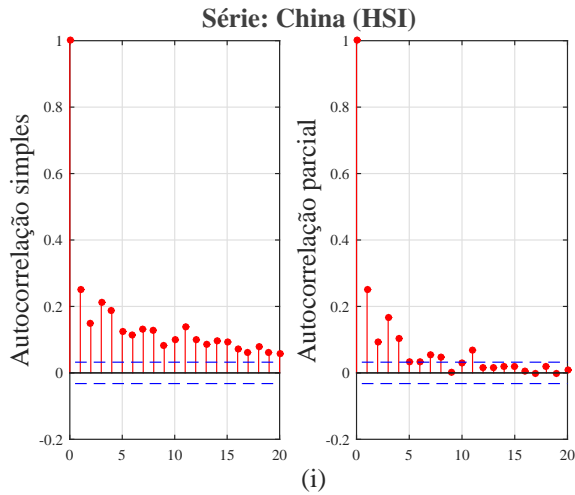
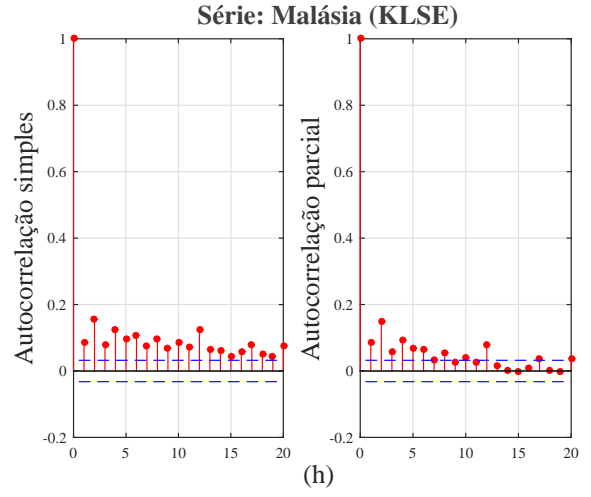
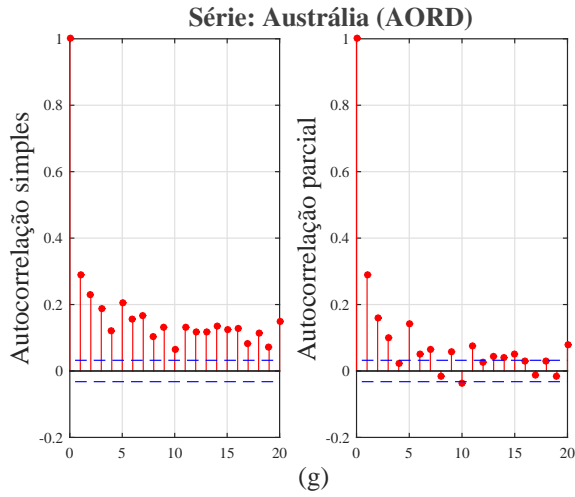
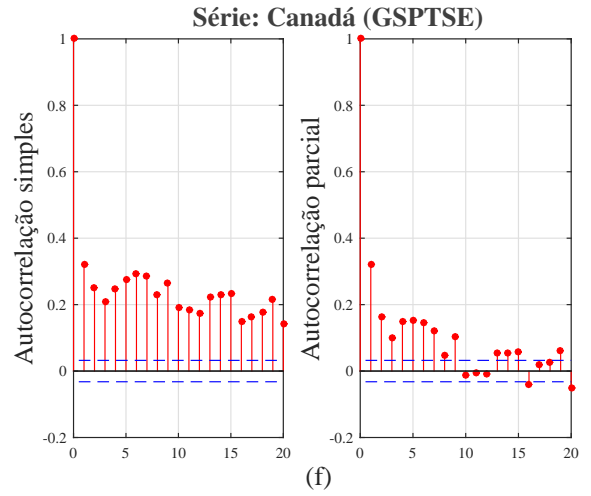
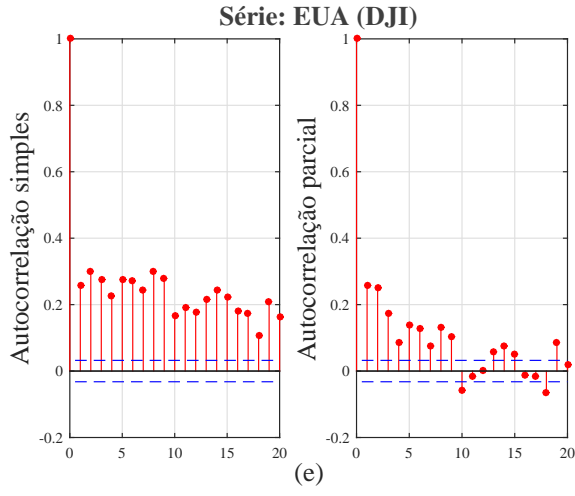
Nos resultados da [Tabela 5](#), mostra-se que a hipótese nula é rejeitada em pelo menos um dos primeiros nove atrasos em todas as séries de retornos, já que o valor da estatística de teste $Q_{BP}(m)$ (valor em negrito) cai na zona de rejeição por ser maior que o valor crítico (valor em negrito), ou seja, todas as séries são significativamente autocorrelacionadas, e portanto, os modelos ARMA na modelagem da variância nas séries de retornos pode ser adequado.

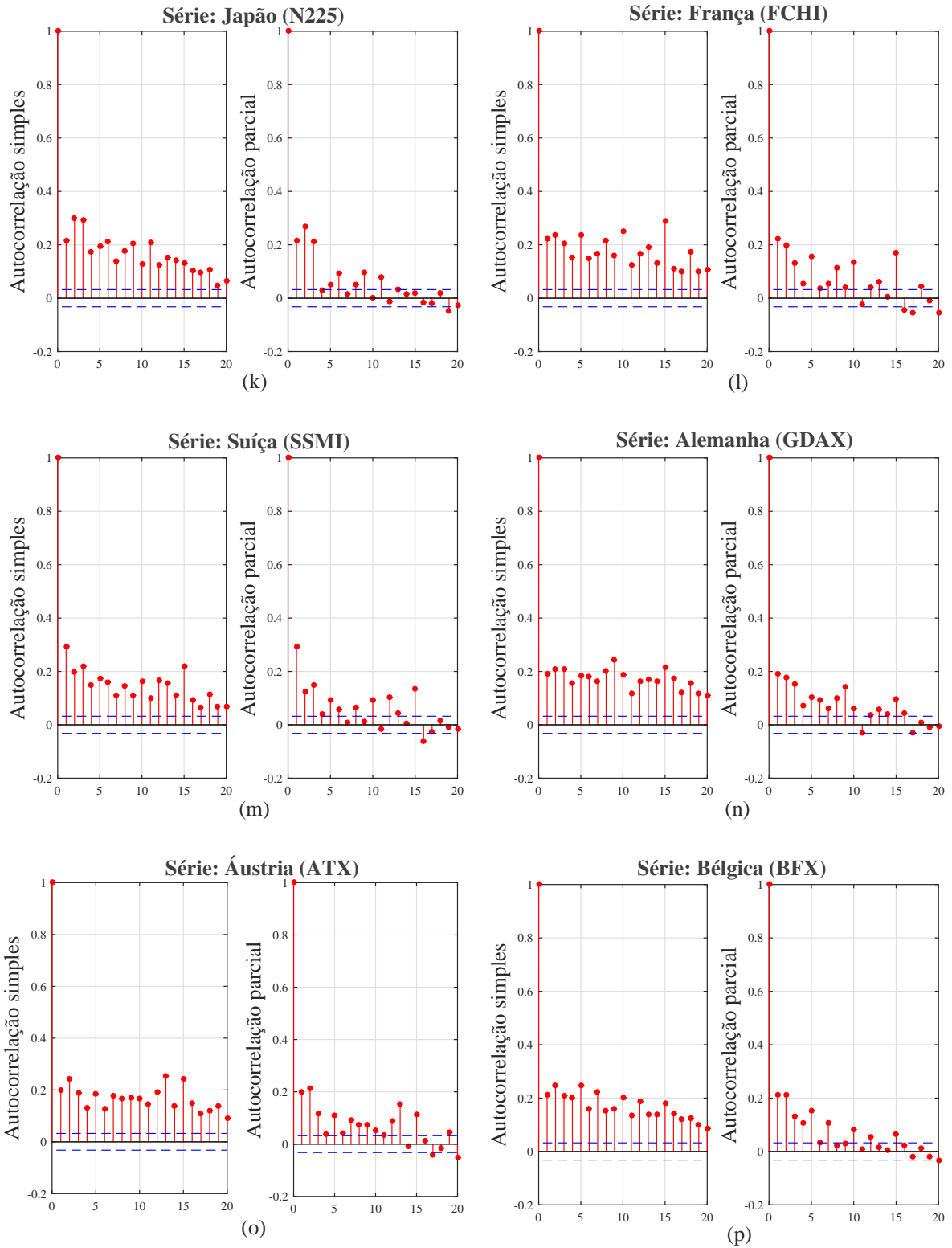
5.1.4 Heterocedasticidade nas séries de retorno

Na identificação de modelos da família GARCH (modelos heterocedásticos), o processo de autocorrelação é semelhante ao da seção anterior, mas, a série utilizada é a dos resíduos ao quadrado das séries de retornos. Na [Figura 11](#) mostram-se as funções de autocorrelação simples e parcial.

Figura 11 – Funções de autocorrelação simples (ACF) e funções de autocorrelação parcial (PACF) versus atrasos das séries de resíduos ao quadrado dos retornos logarítmicos diários para a identificação de modelos da família GARCH.







Na [Figura 11](#), observa-se que em todas as séries de resíduos ao quadrado dos retornos, existe pelo menos um atraso (barras na cor vermelha) fora dos limites de confiança (linhas na cor azul) durante os primeiros nove atrasos.

Para testar formalmente a autocorrelação das séries de resíduos ao quadrado dos

retornos r_t , utiliza-se o teste de significância de heterocedasticidade $LM - Test$ de Engle (1982), com a hipótese nula das autocorrelações dos erros ao quadrado dos retornos são conjuntamente iguais a zero,

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_9 = 0. \quad (5.2)$$

As estatísticas de teste e seus correspondentes valores críticos utilizando dois atrassos são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6 – Estatística de contraste para o teste de heterocedasticidade das séries de resíduos ao quadrado dos retornos, mediante o $LM - Test$ para a identificação de modelos da família GARCH, com o 5% de significância.

Índice	Heterocedasticidade	
	LM^1	v.c. ²
Brasil (BVSP)	81,6524	5,9915
México (MXX)	246,0805	5,9915
EUA (IXIC)	475,6252	5,9915
EUA (GSPC)	536,4641	5,9915
EUA (DJI)	486,0456	5,9915
Canadá (GSPTSE)	492,3164	5,9915
Austrália (AORD)	409,8467	5,9915
Malásia (KLSE)	112,4216	5,9915
China (HSI)	270,7784	5,9915
China (SSE)	150,4348	5,9915
Japão (N225)	443,0965	5,9915
França (FCHI)	337,7708	5,9915
Suíça (SSMI)	381,3859	5,9915
Alemanha (GDAX)	260,3593	5,9915
Áustria (ATX)	320,5148	5,9915
Bélgica (BFX)	341,2222	5,9915

¹Estatística de teste por meio do multiplicador de Lagrang, ²Valor crítico.

Nos resultados da Tabela 6, mostra-se que a hipótese nula é rejeitada em todas as séries dos erros ao quadrado, já que o valor da estatística de teste LM cai na zona de rejeição por ser maior que o valor crítico, ou seja, todas as séries de resíduos ao quadrado são significativamente autocorrelacionadas, e portanto, os modelos da família GARCH são adequados para modelar a variância das séries de retornos.

5.2 Especificação de modelos para os mercados financeiros

Da Seção 5.1 sabe-se que é necessário envolver os modelos de média condicional na modelagem da volatilidade das séries de retornos. Para tal fim, nesta seção, especificam-se

os três tipos de modelos: os modelos ARMA, os modelos da família GARCH e os modelos compostos ARMA+GARCH. Os modelos de média condicional especificados às séries de retornos, são apresentados na [Tabela 7](#). Os modelos são: AR (P), MA (Q) e ARMA (P, Q). Os quais, são especificados em relação ao menor valor de BIC .

Tabela 7 – Modelos de média condicional AR (P), MA(Q) e ARMA(P, Q) para prever a média das séries de retornos dos índices, especificados segundo o menor valor de BIC .

Índice	Modelos de média condicional			
		AR(P)	MA(Q)	ARMA(P, Q)
Brasil (BVSP)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
	BIC	-1,7933e+04	-1,7933e+04	-1,7938e+04
México (MXX)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
	BIC	-2,0751e+04	-2,0752e+04	-2,0753e+04
EUA (IXIC)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(2,3)
	BIC	-2,0044e+04	-2,0044e+04	-2,0054e+04
EUA (GSPC)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(2,5)
	BIC	-2,2162e+04	-2,2162e+04	-2,2172e+04
EUA (DJI)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(2,5)
	BIC	-2,2608e+04	-2,2608e+04	-2,2619e+04
Canadá (GSPTSE)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(5,3)
	BIC	-2,2890e+04	-2,2890e+04	-2,2912e+04
Austrália (AORD)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
	BIC	-2,3801e+04	-2,3801e+04	-2,3801e+04
Malásia (KLSE)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
	BIC	-2,1912e+04	-2,1910e+04	-2,1916e+04
China (HSI)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
	BIC	-1,9767e+04	-1,9767e+04	-1,9768e+04

Continua na próxima página

Tabela 7 – Continuação da página anterior

Índice		Modelos de média condicional		
		AR(P)	MA(Q)	ARMA(P, Q)
China (SSE)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(2,1)
	<i>BIC</i>	-1,9891e+04	-1,9891e+04	-1,9894e+04
Japão (N225)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(3,2)
	<i>BIC</i>	-2,0415e+04	-2,0415e+04	-2,0420e+04
França (FCHI)	Modelo	AR(2)	MA(2)	ARMA(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,0512e+04	-2,0513e+04	-2,0527e+04
Suíça (SSMI)	Modelo	AR(5)	MA(1)	ARMA(3,3)
	<i>BIC</i>	-2,1916e+04	-2,1915e+04	-2,1931e+04
Alemanha (GDAX)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,0220e+04	-2,0220e+04	-2,0223e+04
Áustria (ATX)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(2,2)
	<i>BIC</i>	-2,0649e+04	-2,0649e+04	-2,0657e+04
Bélgica (BFX)	Modelo	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,1690e+04	-2,1691e+04	-2,1693e+04

Para a o índice Brasil (BVSP) por exemplo, dentre 18 modelos AR (P) testados, o modelo AR(1) é o de menor valor BIC com -1,7933e+04; dentre 18 modelos MA (Q) testados, o modelo MA(1) é o de menor valor BIC com -1,7933e+04 e, dentre 81 modelos ARMA (P, Q) testados, o modelo ARMA(1,1) é o de menor valor BIC com -1,7938e+04.

Deve-se notar também que dentre esses três modelos selecionados, o recomendado para prever a média da série e destacado em negrito, é o ARMA(1,1) por ter o menor valor de BIC .

Na Tabela 8, são apresentados os quatro modelos puros de variância condicional ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q) especificados em relação ao menor valor BIC .

Tabela 8 – Modelos de variância condicional ARCH (q), GARCH (p, q), EGARCH (p, q) e GJR (p, q) para prever a variância dos retornos diários de fechamento, especificados segundo o menor valor de BIC .

Índice	Modelos de variância condicional				
	ARCH(q)	GARCH(p, q)	EGARCH(p, q)	GJR(p, q)	
Brasil(BVSP)	Modelo	ARCH(12)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2)	GJR(1,1)
	BIC	-1,8966e+04	-1,9048e+04	-1,9209e+04	-1,9145e+04
México(MXX)	Modelo	ARCH(16)	GARCH(1,1)	EGARCH(3,3)	GJR(1,1)
	BIC	-2,1839e+04	-2,1945e+04	-2,2090e+04	-2,2049e+04
EUA(IXIC)	Modelo	ARCH(13)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2)	GJR(1,1)
	BIC	-2,1420e+04	-2,1499e+04	-2,1661e+04	-2,1597e+04
EUA(GSPC)	Modelo	ARCH(12)	GARCH(1,2)	EGARCH(2,3)	GJR(1,1)
	BIC	-2,3361e+04	-2,3434e+04	-2,3672e+04	-2,3607e+04
EUA(DJI)	Modelo	ARCH(12)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,3)	GJR(1,1)
	BIC	-2,3744e+04	-2,3822e+04	-2,4023e+04	-2,3993e+04
Canadá(GSP TSE)	Modelo	ARCH(11)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2)	GJR(1,1)
	BIC	-2,4117e+04	-2,4229e+04	-2,4373e+04	-2,4303e+04
Austrália(AORD)	Modelo	ARCH(17)	GARCH(1,1)	EGARCH(7,5)	GJR(1,1)
	BIC	-2,4805e+04	-2,4895e+04	-2,5162e+04	-2,5065e+04
Malásia(KLSE)	Modelo	ARCH(15)	GARCH(1,1)	EGARCH(6,7)	GJR(10,3)
	BIC	-2,4359e+04	-2,4487e+04	-2,4670e+04	-2,4509e+04
China(HSI)	Modelo	ARCH(14)	GARCH(1,2)	EGARCH(2,3)	GJR(1,1)
	BIC	-2,1048e+04	-2,1147e+04	-2,1248e+04	-2,1211e+04
China(SSE)	Modelo	ARCH(20)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2)	GJR(1,1)
	BIC	-2,0619e+04	-2,0737e+04	-2,0785e+04	-2,0735e+04
Japão(N225)	Modelo	ARCH(10)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2)	GJR(1,1)
	BIC	-2,1031e+04	-2,1114e+04	-2,1218e+04	-2,1184e+04

Continua na próxima página

Tabela 8 – Continuação da página anterior

Índice	Modelos de variância condicional				
		ARCH(q)	GARCH(p, q)	EGARCH(p, q)	GJR(p, q)
França(FCHI)	Modelo	ARCH(15)	GARCH(1,1)	EGARCH(3,3)	GJR(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,1453e+04	-2,1555e+04	-2,1772e+04	-2,1700e+04
Suíça(SSMI)	Modelo	ARCH(10)	GARCH(1,1)	EGARCH(5,4)	GJR(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,3111e+04	-2,3193e+04	-2,3426e+04	-2,3337e+04
Alemanha(GDAX)	Modelo	ARCH(12)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2)	GJR(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,1200e+04	-2,1288e+04	-2,1490e+04	-2,1426e+04
Áustria(ATX)	Modelo	ARCH(12)	GARCH(1,1)	EGARCH(5,5)	GJR(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,1850e+04	-2,1956e+04	-2,2135e+04	-2,2073e+04
Bélgica(BFX)	Modelo	ARCH(15)	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2)	GJR(1,1)
	<i>BIC</i>	-2,2709e+04	-2,2819e+04	-2,2970e+04	-2,2941e+04

Seguindo com a série Brasil (BVSP) como exemplo na análise, dentre 18 modelos ARCH (p) testados, o modelo ARCH(12) é o de menor valor *BIC* com -1,8966e+04; dentre 81 modelos GARCH (p, q) testados, o modelo GARCH(1,1) é o de menor valor *BIC* com -1,9048e+04; dentre 18 modelos EGARCH (p, q) testados, o modelo EGARCH(2,2) é o de menor valor *BIC* com -1,9209e+04 e dentre 81 modelos GJR (p, q) testados, o modelo GJR(1,1) é o de menor valor *BIC* com -1,9145e+04.

Deve-se notar também que dentre esses três modelos selecionados, o recomendado para prever a variância da série e destacado em negrito, é o EGARCH(2,2) por ter o menor valor de *BIC*.

Para prever a média e variância condicionais das séries de retornos, é selecionado um dos doze modelos compostos apresentados na [Tabela 9](#). Estes modelos são: AR(P)+ARCH(q), AR(P)+GARCH(p, q), AR(P)+EGARCH(p, q), AR(P)+GJR(p, q), MA(Q)+ARCH(q), MA(Q)+GARCH(p, q), MA(Q)+EGARCH(p, q), MA(Q)+GJR(p, q), ARMA(P, Q)+ARCH(q), ARMA(P, Q)+GARCH(p, q), ARMA(P, Q)+EGARCH(p, q) e ARMA(P, Q)+GJR(p, q) com o menor valor *BIC*.

Tabela 9 – Modelos compostos de média e variância condicional para prever a média e variância dos retornos diários de fechamento, especificados segundo o menor valor de BIC .

Índice	Modelos de média	Modelos de variância				Menor BIC
		ARCH(q)	GARCH(p, q)	EGARCH(p, q)	GJR(p, q)	
Brasil (BVSP)	AR(P)	(4)+(4)	(3)+(1,1)	(4)+(2,2)	(4)+(1,3)	-1,9196e+04
	MA(Q)	(4)+(4)	(3)+(1,1)	(4)+(2,2)	(4)+(1,3)	-1,9196e+04
	ARMA(P, Q)	(4,3)+(4)	(4,3)+(2,1)	(4,4)+(2,2)	(2,2)+(1,3)	-1,9191e+04
México (MXS)	AR(P)	(1)+(4)	(1)+(2,1)	(3)+(4,4)	(1)+(2,1)	-2,2109e+04
	MA(Q)	(1)+(4)	(1)+(2,1)	(1)+(2,3)	(1)+(2,1)	-2,2101e+04
	ARMA(P, Q)	(3,1)+(4)	(3,1)+(2,1)	(1,3)+(2,3)	(1,3)+(4,2)	-2,2096e+04
EUA (IXIC)	AR(P)	(4)+(4)	(3)+(4,2)	(4)+(2,2)	(4)+(4,3)	-2,1650e+04
	MA(Q)	(4)+(4)	(3)+(4,2)	(4)+(2,2)	(4)+(4,3)	-2,1652e+04
	ARMA(P, Q)	(3,3)+(4)	(3,3)+(4,2)	(3,3)+(2,3)	(4,4)+(4,3)	-2,1648e+04
EUA (GSPC)	AR(P)	(3)+(4)	(1)+(3,2)	(4)+(2,3)	(1)+(1,1)	-2,3661e+04
	MA(Q)	(3)+(4)	(1)+(1,3)	(3)+(2,2)	(1)+(2,1)	-2,3659e+04
	ARMA(P, Q)	(4,4)+(4)	(1,1)+(1,3)	(1,1)+(2,2)	(4,4)+(2,1)	-2,3660e+04
EUA (DJI)	AR(P)	(3)+(4)	(1)+(2,1)	(1)+(3,3)	(1)+(1,2)	-2,4014e+04
	MA(Q)	(3)+(4)	(1)+(1,1)	(1)+(3,3)	(1)+(1,2)	-2,4014e+04
	ARMA(P, Q)	(4,4)+(4)	(4,4)+(2,1)	(1,3)+(2,3)	(2,2)+(1,2)	-2,4009e+04
Canadá (GSPTSE)	AR(P)	(1)+(4)	(1)+(1,1)	(3)+(2,2)	(1)+(1,4)	-2,4368e+04
	MA(Q)	(1)+(4)	(1)+(1,1)	(3)+(2,2)	(1)+(1,4)	-2,4368e+04
	ARMA(P, Q)	(4,4)+(4)	(3,1)+(2,1)	(4,3)+(2,2)	(3,1)+(1,4)	-2,4363e+04
Austrália (AORD)	AR(P)	(2)+(4)	(3)+(1,1)	(4)+(2,2)	(2)+(1,1)	-2,5166e+04
	MA(Q)	(2)+(4)	(3)+(1,1)	(1)+(2,2)	(2)+(1,1)	-2,5165e+04
	ARMA(P, Q)	(1,1)+(4)	(4,4)+(1,3)	(4,3)+(2,2)	(2,2)+(1,1)	-2,5158e+04
Malásia (KLSE)	AR(P)	(1)+(4)	(1)+(4,1)	(1)+(2,3)	(1)+(4,1)	-2,4622e+04
	MA(Q)	(1)+(4)	(1)+(4,1)	(1)+(3,4)	(1)+(4,1)	-2,4622e+04
	ARMA(P, Q)	(2,1)+(4)	(1,1)+(4,1)	(2,1)+(4,4)	(1,1)+(4,1)	-2,4671e+04
China (HSI)	AR(P)	(3)+(4)	(2)+(4,2)	(1)+(2,3)	(4)+(4,3)	-2,1235e+04
	MA(Q)	(3)+(4)	(2)+(4,2)	(1)+(2,3)	(4)+(4,3)	-2,1235e+04
	ARMA(P, Q)	(4,4)+(4)	(4,4)+(1,2)	(3,1)+(2,3)	(2,2)+(4,3)	-2,1228e+04
China (SSE)	AR(P)	(4)+(4)	(3)+(1,4)	(3)+(2,2)	(3)+(1,1)	-2,0776e+04
	MA(Q)	(3)+(4)	(3)+(1,4)	(3)+(2,2)	(3)+(1,1)	-2,0776e+04
	ARMA(P, Q)	(1,1)+(4)	(3,2)+(1,1)	(3,2)+(2,2)	(2,3)+(1,1)	-2,0771e+04
Japão (N225)	AR(P)	(4)+(4)	(3)+(2,1)	(1)+(2,2)	(3)+(2,2)	-2,1204e+04
	MA(Q)	(4)+(4)	(3)+(3,1)	(1)+(2,2)	(3)+(2,2)	-2,1204e+04
	ARMA(P, Q)	(4,4)+(4)	(4,4)+(4,1)	(4,4)+(2,2)	(4,2)+(3,4)	-2,1204e+04
França (FCHI)	AR(P)	(4)+(4)	(1)+(1,1)	(1)+(3,3)	(1)+(1,1)	-2,1760e+04
	MA(Q)	(4)+(4)	(1)+(2,1)	(2)+(3,3)	(1)+(1,1)	-2,1757e+04
	ARMA(P, Q)	(1,1)+(4)	(1,1)+(1,1)	(1,1)+(3,3)	(3,1)+(1,1)	-2,1761e+04

Continua na próxima página

Tabela 9 – Continuação da página anterior

Índice	Modelos de média	Modelos de variância				Menor BIC
		ARCH(q)	GARCH(p, q)	EGARCH(p, q)	GJR(p, q)	
Suíça (SSMI)	AR(P)	(4)+(4)	(4)+(3,3)	(2)+(4,4)	(2)+(1,4)	-2,3411e+04
	MA(Q)	(4)+(4)	(2)+(2,4)	(2)+(4,4)	(2)+(1,4)	-2,3411e+04
	ARMA(P, Q)	(4,1)+(4)	(4,4)+(2,1)	(4,4)+(4,4)	(4,4)+(1,4)	-2,3417e+04
Alemanha (GDAX)	AR(P)	(4)+(4)	(4)+(2,1)	(4)+(2,2)	(4)+(2,1)	-2,1479e+04
	MA(Q)	(4)+(4)	(4)+(1,1)	(4)+(2,2)	(4)+(1,1)	-2,1479e+04
	ARMA(P, Q)	(4,4)+(4)	(4,4)+(1,4)	(4,4)+(2,2)	(4,4)+(2,1)	-2,1477e+04
Áustria (ATX)	AR(P)	(1)+(4)	(1)+(1,1)	(1)+(2,2)	(1)+(4,1)	-2,2131e+04
	MA(Q)	(1)+(4)	(1)+(1,1)	(1)+(2,2)	(1)+(4,1)	-2,2129e+04
	ARMA(P, Q)	(1,1)+(4)	(4,4)+(1,1)	(4,1)+(2,2)	(4,4)+(4,1)	-2,2125e+04
Bélgica (BFX)	AR(P)	(1)+(4)	(4)+(1,2)	(1)+(1,1)	(1)+(1,1)	-2,2951e+04
	MA(Q)	(1)+(4)	(4)+(1,2)	(1)+(1,1)	(1)+(1,1)	-2,2951e+04
	ARMA(P, Q)	(2,4)+(4)	(1,4)+(1,1)	(3,4)+(2,2)	(1,3)+(1,1)	-2,2956e+04

Para compreender a leitura dos resultados da [Tabela 9](#), continua-se com a série Brasil (BVSP) como exemplo e é feita linha por linha.

- **Linha 1:** Dentre 16 modelos AR(P)+ARCH(q) testados, o modelo AR(4)+ARCH(4) é o de menor valor de BIC . Dentre 64 modelos AR(P)+GARCH(p, q) testados, o modelo AR(3)+GARCH(1,1) é o de menor valor de BIC . Dentre 64 modelos AR(P)+EGARCH(p, q) testados, o modelo AR(4)+EGARCH(2,2) é o de menor valor de BIC . Dentre 64 modelos AR(P)+GJR(p, q) testados, o modelo AR(4)+GJR(1,3) é o de menor valor de BIC . Finalmente, desses 4 modelos, o AR(4)+EGARCH(2,2) é o de menor BIC com o valor de -1,9196e+04.
- **Linha 2:** Dentre 16 modelos MA(P)+ARCH(q) testados, o modelo MA(4)+ARCH(4) é o de menor valor de BIC . Dentre 64 modelos MA(P)+GARCH(p, q) testados, o modelo MA(3)+GARCH(1,1) é o de menor valor de BIC . Dentre 64 modelos MA(P)+EGARCH(p, q) testados, o modelo MA(4)+EGARCH(2,2) é o de menor valor de BIC . Dentre 64 modelos MA(P)+GJR(p, q) testados, o modelo MA(4)+GJR(1,3) é o de menor valor de BIC . Finalmente, desses 4 modelos, o MA(4)+EGARCH(2,2) é o de menor BIC com o valor de -1,9196e+04.
- **Linha 3:** Dentre 64 modelos ARMA(P, Q)+ARCH(q) testados, o modelo ARMA(4,3)+ARCH(4) é o de menor valor de BIC . Dentre 256 modelos ARMA(P, Q)+GARCH(p, q) testados, o modelo ARMA(4,3)+GARCH(2,1) é o de menor valor de BIC . Dentre 256 modelos ARMA(P, Q)+EGARCH(p, q) testados, o modelo ARMA(4,4)+EGARCH(2,2) é o de menor valor de BIC . Dentre 256 modelos ARMA(P, Q)+GJR(p, q) testados, o modelo ARMA(2,2)+GJR(1,3) é o de menor

valor de BIC . Finalmente, desses 4 modelos, o $ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)$ é o de menor BIC com o valor de $-1,9191e+04$.

Terminada aqui a fase de especificação de modelos, decide-se levar 5 modelos para concorrer na seguinte fase de estimação de parâmetros. Esses modelos são: os 3 compostos que estão destacados em negrito na Tabela 9, o modelo puro de variância condicional de menor BIC destacado em negrito na Tabela 8 e o modelo GARCH (p, q) por ser o mais popular e muito utilizado na modelagem da volatilidade, este último, também apresentado na Tabela 8. Em resumo, os 5 modelos concorrentes para cada índice, são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Modelos puros ((a) e (b)) e compostos ((c), (d) e (e)) selecionados para a concorrência do melhor nas previsões da variância dos retornos de cada índice financeiro.

Brasil (BVSP)			México (MXX)			EUA (IXIC)		
(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)
(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(3,3)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)
(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(4,4)	(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)
(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,3)	(d) MA(1)+EGARCH(3,3)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)
(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,3)	(e) ARMA(2,1)+EGARCH(2,3)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)
EUA (GSPC)			EUA (DJI)			Canadá (GSPTSE)		
(a) GARCH(1,2)	(a) GARCH(1,2)	(a) GARCH(1,2)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)
(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)
(c) AR(4)+EGARCH(2,3)	(c) AR(4)+EGARCH(2,3)	(c) AR(4)+EGARCH(2,3)	(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)
(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(3,3)	(d) MA(1)+EGARCH(3,3)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)
(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(1,3)+EGARCH(2,3)	(e) ARMA(2,1)+EGARCH(2,3)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)
Austrália (AORD)			Malásia(KLSE)			China (HSI)		
(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,2)	(a) GARCH(1,2)	(a) GARCH(1,2)	(a) GARCH(1,2)
(b) EGARCH(7,5)	(b) EGARCH(7,5)	(b) EGARCH(7,5)	(b) EGARCH(6,7)	(b) EGARCH(6,7)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)	(b) EGARCH(2,3)
(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(2,3)	(c) AR(1)+EGARCH(2,3)	(c) AR(1)+EGARCH(2,3)	(c) AR(1)+EGARCH(2,3)	(c) AR(1)+EGARCH(2,3)	(c) AR(1)+EGARCH(2,3)
(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(3,4)	(d) MA(1)+EGARCH(3,4)	(d) MA(1)+EGARCH(2,3)	(d) MA(1)+EGARCH(2,3)	(d) MA(1)+EGARCH(2,3)	(d) MA(1)+EGARCH(2,3)
(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)	(e) ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)	(e) ARMA(3,1)+EGARCH(2,3)	(e) ARMA(3,1)+EGARCH(2,3)	(e) ARMA(3,1)+EGARCH(2,3)	(e) ARMA(3,1)+EGARCH(2,3)
China (SSE)			Japão (N225)			França (FCHI)		
(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)
(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(3,3)	(b) EGARCH(3,3)	(b) EGARCH(3,3)	(b) EGARCH(3,3)
(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	(c) AR(1)+EGARCH(3,3)
(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(2)+EGARCH(3,3)	(d) MA(2)+EGARCH(3,3)	(d) MA(2)+EGARCH(3,3)	(d) MA(2)+EGARCH(3,3)
(e) ARMA(3,2)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(3,2)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(3,2)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(3,3)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(3,3)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(3,3)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(3,3)
Suíça (SSMI)			Alemanha(GDAX)			Áustria (ATX)		
(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)	(a) GARCH(1,1)
(b) EGARCH(5,4)	(b) EGARCH(5,4)	(b) EGARCH(5,4)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(2,2)	(b) EGARCH(5,5)	(b) EGARCH(5,5)	(b) EGARCH(5,5)	(b) EGARCH(5,5)
(c) AR(2)+EGARCH(4,4)	(c) AR(2)+EGARCH(4,4)	(c) AR(2)+EGARCH(4,4)	(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(2,2)	(c) AR(1)+EGARCH(2,2)
(d) MA(2)+EGARCH(4,4)	(d) MA(2)+EGARCH(4,4)	(d) MA(2)+EGARCH(4,4)	(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	(d) MA(1)+EGARCH(2,2)
(e) ARMA(4,4)+EGARCH(4,4)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(4,4)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(4,4)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,1)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,1)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,1)+EGARCH(2,2)	(e) ARMA(4,1)+EGARCH(2,2)
Bélgica (BFX)								
(a) GARCH(1,1)								
(b) EGARCH(2,2)								
(c) AR(1)+EGARCH(1,1)								
(d) MA(1)+EGARCH(1,1)								
(e) ARMA(3,4)+EGARCH(2,2)								

5.3 Modelos de previsão de volatilidade dos mercados financeiros

Nesta subseção, são apresentadas as três últimas etapas da modelagem: a estimação de parâmetros, as simulações e as previsões.

A estimação de parâmetros é feita em dois momentos, a primeira, sob o pressuposto que as inovações seguem uma distribuição gaussiana e a segunda sob o pressuposto que seguem uma *t* de Student. Como resultado, obteve-se que a segunda é a selecionada para as seguintes etapas por apresentar melhor ajuste, tanto em relação ao valor de *BIC*, quanto ao valor do *EQM*.

Em relação as simulações, simula-se 20% dos retornos, das variâncias condicionais e dos preços, sendo depois, comparados graficamente com os 20% dos dados de validação.

Finalmente, mediante os mesmos modelos, e utilizando todos os elementos da amostra (retornos=3861) são feitas as previsões dos retornos e das variâncias. Com objetivo avaliar o ajuste das variâncias previstas, são comparadas graficamente com o *MMSE* de Monte Carlo e com a variância teórica.

5.3.1 Estimação de parâmetros dos modelos selecionados

A estimativa dos parâmetros dos 5 modelos de variância condicional concorrentes especificados na seção 5.2, considerando que as inovações seguem uma distribuição gaussiana, são apresentados no Apêndice A. O apêndice está formado por 16 tabelas (da 32 à 47, uma para cada índice), cada tabela por 5 modelos ((a), (b), (c), (d) e (e)) e cada modelo, pela quantidade de parâmetros estimados.

A finalidade de ajustar modelos é para fazer previsões, e para saber se esses modelos ajustados são adequados, se faz a análise da série residual padronizada de cada um deles. Primeiramente, é testada a não autocorrelação dos resíduos mediante o teste de Ljung-Box, com a hipótese dada na Equação 5.1, seguidamente, testa-se a significância de heterocedasticidade mediante o teste ARCH de Engle dado na Equação 5.2 e finalmente, testa-se a normalidade mediante o teste de Jarque-Bera dado na Equação 4.11 com a hipótese nula “a série de resíduos provém de uma distribuição normal”. Os resultados são apresentados no Apêndice B. O apêndice está formado por 16 tabelas (da 48 à 63, uma para cada índice), cada tabela por 5 modelos ((a), (b), (c), (d) e (e)) e cada modelo, pelos valores dos 3 testes (Q_{PB} , LM e JB).

Na Tabela 48, pertencente à série Brasil (BVSP), observa-se que para cada modelo ((a), (b), (c), (d) e (e)), o valor da estatística de autocorrelação Q_{PB} é menor que o valor crítico 31,4104. O valor da estatística de heterocedasticidade LM é menor que o valor

crítico 3,8415. Isto quer dizer que as hipóteses de não autocorrelação e não heterocedasticidade não são rejeitadas. Em conclusão, os 5 modelos são apropriados para realizar previsões.

Na [Tabela 49](#), pertencente à série México (MXX), observa-se que para os modelos (a), (b) e (c), o valor da estatística de autocorrelação Q_{PB} destacado em negrito, não é menor que o valor crítico 31,4104, e portanto, a hipótese de não autocorrelação é rejeitada para esses 3 modelos. O valor da estatística de heterocedasticidade LM , nos 5 modelos é menor que o valor crítico 3,8415, portanto, a hipótese de não heterocedasticidade não é rejeitada para nenhum deles. Em conclusão, para esse índice, somente os modelos (d) e (e) são apropriados para realizar previsões.

De forma similar, analisam-se a autocorrelação e heterocedasticidade dos resíduos padronizados de cada modelo dos seguintes 14 índices ([Tabelas 50-63](#)). O valor de autocorrelação ou heterocedasticidade menor que o seu correspondente valor crítico, é remarcado em negrito, indicando que a hipótese é rejeitada, e portanto, esses modelos são excluídos da seguinte fase de previsão.

Como resumo da análise feita ao [Apêndice B](#), apresenta-se a [Tabela 11](#), contendo os modelos de cada índice que passam a etapa de previsão, pois tanto a hipótese de não autocorrelação, quanto a de não heterocedasticidade não são rejeitadas.

Tabela 11 – Modelos de cada índice em que as hipóteses de não autocorrelação e não heterocedasticidade não são rejeitadas, e portanto, são apropriados para realizar previsões.

Índice	Modelos				
Brasil (BVSP)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
México (MXX)				(d),	(e)
EUA (IXIC)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
EUA (GSPC)				(d),	(e)
EUA (DJI)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
Canada (GSPTSE)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
Austrália (AORD)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
Malásia (KLSE)			(c),		(e)
China (HSI)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
China (SSE)	(a)				
Japão (N225)					(e)
França (FCHI)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
Suíça (SSMI)	(a),	(b),	(c),	(d)	
Alemanha (GDAX)	(a)				
Áustria (ATX)	(a),	(b),	(c),	(d),	(e)
Bélgica (BFX)	(c),			(d)	

Por outro lado, observa-se que nos 5 modelos de cada índice, o valor da estatística de normalidade JB é maior que o valor crítico 5,9739, ou seja, a hipótese de normalidade é

rejeitada, isto quer dizer que esta hipótese não é apropriada para os resíduos padronizados destes modelos.

Outra maneira de ver a não normalidade dos resíduos dos modelos é comparando os quantis empíricos dos resíduos padronizados com os quantis da distribuição normal padrão. Estes resultados são apresentados no [Apêndice C](#). O apêndice está formado por 16 figuras (da 30 à 45, uma para cada índice), cada figura por 5 gráficos e cada gráfico representa um modelo. Em cada gráfico das figuras deste apêndice, observa-se como os resíduos empíricos padronizados (gráficos na cor azul) fogem nos extremos da distribuição normal padrão (gráficos na cor vermelha), reafirmando assim a rejeição da hipótese de normalidade dos resíduos padronizados.

Os resultados na [Tabela 11](#), mostram que no índice, Brasil (BVSP), por exemplo, os 5 modelos resultaram apropriados para realizar previsões. Para o índice, México (MXX), dois resultaram apropriados. Dessa maneira, pode-se ver que alguns índices apresentam mais de um modelo apropriado para realizar previsões.

Com objetivo de selecionar apenas um modelo para a etapa de previsão, utiliza-se o Erro Quadrático Médio (EQM) como medida de desempenho preditivo. Para cada índice, é selecionado o modelo de menor EQM. Os resultados são apresentados no [Apêndice D](#), o qual está formado por 16 tabelas (da 64 à 79, uma para cada índice), cada tabela pelos modelos que resultaram apropriados para realizar previsões, e cada modelo contém os valores de *BIC* e do EQM. Os resultados do [Apêndice D](#), são resumidos na [Tabela 12](#).

Tabela 12 – Modelo de menor Erro Quadrático Médio (*EQM*) selecionado dentre os 5 concorrentes para cada índice, sob o suposto que as inovações seguem uma distribuição Gaussiana.

Índice	Modelo	<i>BIC</i>	<i>EQM</i>
Brasil (BVSP)	(a) GARCH(1,1)	-1,9048e+04	0,0008
México (MXX)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,3)	-2,2096e+04	0,0005
EUA (IXIC)	(a) GARCH(1,1)	-2,1499e+04	0,0004
EUA (GSPC)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	-2,3660e+04	0,0003
EUA (DJI)	(a) GARCH(1,1)	-2,3822e+04	0,0002
Canadá (GSPTSE)	(a) GARCH(1,1)	-2,4229e+04	0,0002
Austrália (AORD)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	-2,5158e+04	0,0002
Malásia (KLSE)	(e) ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)	-2,4671e+04	0,0005
China (HSI)	(a) GARCH(1,2)	-2,1147e+04	0,0004
China (SSE)	(a) GARCH(1,1)	-2,0737e+04	0,0007
Japão (N225)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	-2,1204e+04	0,0006
França (FCHI)	(a) GARCH(1,1)	-2,1555e+04	0,0004
Suíça (SSMI)	(a) GARCH(1,1)	-2,3193e+04	0,0003
Alemanha (GDAX)	(a) GARCH(1,1)	-2,1288e+04	0,0004
Áustria (ATX)	(a) GARCH(1,1)	-2,1956e+04	0,0004
Bélgica (BFX)	(d) MA(1)+EGARCH(1,1)	-2,2951e+04	0,0004

Da [Tabela 12](#), observa-se que para o índice Brasil (BVSP) por exemplo, o modelo GARCH(1,1) dentre os 5 concorrentes, e com valor de $BIC=-1,9048e+04$, apresenta o menor valor de $EQM= 0,0008$, e portanto, é o selecionado para a etapa de previsão. As leituras dos modelos selecionados para cada índice continuam na mesma lógica até concluir com Bélgica (BFX), em que o modelo selecionado é o MA(1)+EGARCH(1,1) correspondente ao letra (d) dentre os 5 concorrente ((a),(b),(c),(d) e (e)), para esse índice.

Lembrando que esses modelos selecionados, são sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição Gaussiana, mas, tinha-se concluído que a hipótese de normalidade dos resíduos não é apropriada em nenhum deles. Por tal motivo, efetua-se o reajuste de cada modelo da [Tabela 12](#), supondo que as inovações são oriundas de uma distribuição t de Student.

As estimativas dos parâmetros para os 16 modelos, supondo que as inovações são distribuídas segundo uma t de Student, são apresentados nas tabelas, da [13](#) à [28](#).

Tabela 13 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob o suposto que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Brasil (BVSP).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,2454	0,0459	-5,3516
GARCH(1)	0,9679	0,0059	163,3460
ARCH(1)	0,1703	0,0196	8,6825
Alavancagem(1)	-0,0972	0,0125	-7,7483
Graus de liberdade	7,1140	0,7629	9,3247

Tabela 14 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,3) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: México (MXX).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	0,0011	0,0004	3,0418
AR(1)	-0,2171	0,2283	-0,9509
MA(1)	0,2878	0,2243	1,2831
Constante	-0,0197	0,0111	-1,7800
GARCH(1)	1,7950	0,0712	25,1955
GARCH(2)	-0,7974	0,0702	-11,3632
ARCH(1)	0,1250	0,0476	2,6263
ARCH(2)	-0,0511	0,0883	-0,5787
ARCH(3)	-0,0446	0,0470	-0,9491
Alavancagem(1)	-0,1443	0,0327	-4,4111
Alavancagem(2)	0,1022	0,0643	1,5892
Alavancagem(3)	0,0341	0,0365	0,9335
Graus de liberdade	5,9776	0,6460	9,2533

Tabela 15 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (IXIC).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1244	0,0259	-4,7982
GARCH(1)	0,9847	0,0031	315,2740
ARCH(1)	0,1483	0,0170	8,7119
Alavancagem(1)	-0,0869	0,0107	-8,1248
Graus de liberdade	9,1761	1,2474	7,3565

Tabela 16 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (GSPC).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	0,0001	0,0001	1,9833
AR(1)	0,7159	0,1185	6,0404
MA(1)	-0,7588	0,1103	-6,8778
Constante	-0,0279	0,0098	-2,8361
GARCH(1)	1,7284	0,0643	26,8938
GARCH(2)	-0,7315	0,0635	-11,5263
ARCH(1)	0,0110	0,0302	0,3626
ARCH(2)	0,0214	0,0334	0,6389
Alavancagem(1)	-0,2390	0,0242	-9,8689
Alavancagem(2)	0,2173	0,0214	10,1597
Graus de liberdade	7,1595	0,8473	8,4499

Tabela 17 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (DJI).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1925	0,0288	-6,6844
GARCH(1)	0,9783	0,0032	304,9560
ARCH(1)	0,1219	0,0174	6,9945
Alavancagem(1)	-0,1409	0,0123	-11,4621
Graus de liberdade	7,6485	0,9337	8,1917

Tabela 18 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Canadá (GSPTSE).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1703	0,0326	-5,2223
GARCH(1)	0,9808	0,0036	270,6350
ARCH(1)	0,1268	0,0170	7,4589
Alavancagem(1)	-0,0856	0,0115	-7,4684
Graus de liberdade	6,9413	0,7786	8,9155

Tabela 19 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(4,3)+EGARCH(2,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Austrália (AORD).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	0,0005	0,0001	3,6113
AR(4)	-0,0248	0,0175	-1,4188
MA(3)	-0,0052	0,0170	-0,3049
Constante	-0,0157	0,0066	-2,3755
GARCH(1)	1,7926	0,0437	40,9747
GARCH(2)	-0,7943	0,0433	-18,3525
ARCH(1)	0,0853	0,0303	2,8131
ARCH(2)	-0,0633	0,0314	-2,0186
Alavancagem(1)	-0,2249	0,0232	-9,6763
Alavancagem(2)	0,2159	0,0213	10,1154
Graus de liberdade	7,5106	0,7954	9,4429

Tabela 20 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(2,1)+EGARCH(4,4) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Malásia (KLSE).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	0,0004	0,0001	2,9395
AR(2)	0,0500	0,0170	2,9399
MA(1)	0,0844	0,0169	4,9814
Constante	-0,3908	0,1064	-3,6743
GARCH(1)	-0,4711	0,1486	-3,1704
GARCH(2)	0,2655	0,1446	1,8364
GARCH(3)	0,4748	0,1450	3,2754
GARCH(4)	0,6881	0,1413	4,8687
ARCH(1)	0,1958	0,0403	4,8559
ARCH(2)	0,3325	0,0513	6,4859
ARCH(3)	0,1683	0,0702	2,3987
ARCH(4)	0,0367	0,0605	0,6071
Alavancagem(1)	-0,0047	0,0268	-0,1770
Alavancagem(2)	-0,0306	0,0295	-1,0370
Alavancagem(3)	-0,0851	0,0261	-3,2561
Alavancagem(4)	-0,0799	0,0262	-3,0487
Graus de liberdade	3,9026	0,2880	13,5490

Tabela 21 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (HSI).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1206	0,0263	-4,5863
GARCH(1)	0,9851	0,0032	309,8730
ARCH(1)	-0,0702	0,0432	-1,6258
ARCH(2)	0,2262	0,0456	4,9612
Alavancagem(1)	-0,1398	0,0298	-4,6935
Alavancagem(2)	0,0717	0,0304	2,3608
Graus de liberdade	6,1270	0,6888	8,8953

Tabela 22 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (SSE).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1686	0,0440	-3,8328
GARCH(1)	0,9789	0,0054	180,9570
ARCH(1)	0,1867	0,0220	8,5012
Alavancagem(1)	-0,0310	0,0114	-2,7142
Graus de liberdade	3,9117	0,3372	11,6003

Tabela 23 – Estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(4,4)+EGARCH(2,2) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Japão (N225).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	0,0000	0,0004	0,0231
AR(4)	-0,6840	0,1899	-3,6028
MA(4)	0,7081	0,1837	3,8539
Constante	-0,1553	0,0523	-2,9722
GARCH(1)	1,3410	0,1731	7,7451
GARCH(2)	-0,3595	0,1681	-2,1384
ARCH(1)	0,0136	0,0396	0,3435
ARCH(2)	0,0907	0,0526	1,7241
Alavancagem(1)	-0,1803	0,0263	-6,8676
Alavancagem(2)	0,1267	0,0267	4,7400
Graus de liberdade	8,9138	1,2815	6,9558

Tabela 24 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: França (FCHI).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1622	0,0280	-5,7875
GARCH(1)	0,9806	0,0033	296,1680
ARCH(1)	0,1281	0,0158	8,1208
Alavancagem(1)	-0,1172	0,0108	-10,8525
Graus de liberdade	9,9460	1,6078	6,1862

Tabela 25 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Suíça (SSMI).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,2338	0,0362	-6,4525
GARCH(1)	0,9735	0,0041	240,1640
ARCH(1)	0,1568	0,0177	8,8396
Alavancagem(1)	-0,1383	0,0114	-12,1315
Graus de liberdade	9,5425	1,4186	6,7267

Tabela 26 – Estimativa dos parâmetros do modelo GARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Alemanha (GDAX).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1789	0,0291	-6,1375
GARCH(1)	0,9782	0,0035	281,5040
ARCH(1)	0,1376	0,0165	8,3204
Alavancagem(1)	-0,1132	0,0107	-10,5716
Graus de liberdade	9,0088	1,1728	7,6814

Tabela 27 – Estimativa dos parâmetros do modelo MA(1)+EGARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Áustria (ATX).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	-0,1638	0,0347	-4,7231
GARCH(1)	0,9806	0,0040	243,0960
ARCH(1)	0,1606	0,0191	8,4275
Alavancagem(1)	-0,0684	0,0119	-5,7701
Graus de liberdade	5,3606	0,5163	10,3829

Tabela 28 – Estimativa dos parâmetros do modelo MA(1)+EGARCH(1,1) sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Bélgica (BFX).

Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
Constante	0,0005	0,0002	2,5180
MA(1)	0,0330	0,0181	1,8261
Constante	-0,2109	0,0352	-5,9944
GARCH(1)	0,9762	0,0040	243,7940
ARCH(1)	0,1630	0,0197	8,2846
Alavancagem(1)	-0,1128	0,0125	-9,0313
Graus de liberdade	6,4289	0,7121	9,0279

Para verificar se esses novos modelos ajustados são adequados para prever, foi feita a análise da série residual padronizada de cada um deles. Testa-se a não autocorrelação mediante o teste de Ljung-Box, a significância de heterocedasticidade e por último, a normalidade da série de resíduos padronizados. Os resultados são apresentados na [Tabela 29](#).

Tabela 29 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos 16 modelos de variância condicional com função de inovação t de Student.

Índice	Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
		Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
Brasil (BVSP)	(a) GARCH(1,1)	29,0397	31,41	0,1918	3,84	772,7059	5,97
México (MXX)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,3)	21,4706	31,41	0,0030	3,84	592,2527	5,97
EUA (IXIC)	(a) GARCH(1,1)	22,9466	31,41	2,3264	3,84	358,6371	5,97
EUA (GSPC)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	20,5155	31,41	0,8479	3,84	574,7806	5,97
EUA (DJI)	(a) GARCH(1,1)	25,7860	31,41	0,2628	3,84	451,5068	5,97
Canadá (GSPTSE)	(a) GARCH(1,1)	28,6660	31,41	0,2333	3,84	727,9189	5,97
Austrália (AORD)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	18,1960	31,41	0,6616	3,84	1793,396	5,97
Malásia (KLSE)	(e) ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)	31,2700	31,41	0,0004	3,84	51940,56	5,97
China (HSI)	(a) GARCH(1,2)	23,5972	31,41	1,0864	3,84	484,2797	5,97
China (SSE)	(a) GARCH(1,1)	30,6759	31,41	0,2624	3,84	1334,386	5,97
Japão (N225)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	30,3122	31,41	2,9031	3,84	209,9671	5,97
França (FCHI)	(a) GARCH(1,1)	26,5634	31,41	1,0956	3,84	132,0887	5,97
Suíça (SSMI)	(a) GARCH(1,1)	20,0195	31,41	0,9358	3,84	210,6391	5,97
Alemanha (GDAX)	(a) GARCH(1,1)	15,3619	31,41	1,8456	3,84	349,4093	5,97
Áustria (ATX)	(a) GARCH(1,1)	27,0652	31,41	0,1752	3,84	1323,01	5,97
Bélgica (BFX)	(d) MA(1)+EGARCH(1,1)	19,3883	31,41	3,7456	3,84	581,7075	5,97

Dos resultados da tabela anterior, conclui-se que todos os modelos são adequados para prever, já que a não autocorrelação nos resíduos é não rejeitada pois a estatística Q_{PB} de Ljung-Box em todos os casos cai na zona de não rejeição por ser menor que o valor crítico 31,41. De igual forma, a ausência de efeito ARCH (LM), rejeita-se em todos os casos por ser menor que o valor crítico 3,84 e, o teste de Jarque-Bera (PB) permite rejeitar a hipótese de normalidade nos resíduos padronizados por ser maior que o valor crítico 5,97.

A vantagem destes modelos de variância condicional com função de inovação t de Student em relação a eles mesmos, mas, com função de inovação Gaussiana, é que em todos os casos, os valores de *BIC* e do *EQM* são inferiores. Os resultados são apresentados na [Tabela 30](#).

Tabela 30 – Valor de *BIC* e *EQM* dos 16 modelos de variância selecionados para prever, sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student.

Índice	Modelo	<i>BIC</i>	<i>EQM</i>
Brasil (BVSP)	(a) GARCH(1,1)	-1,9257e+04	0,0004
México (MXX)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,3)	-2,2283e+04	0,0001
EUA (IXIC)	(a) GARCH(1,1)	-2,1614e+04	0,0002
EUA (GSPC)	(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	-2,3799e+04	0,0001
EUA (DJI)	(a) GARCH(1,1)	-2,3993e+04	0,0001
Canada (GSPTSE)	(a) GARCH(1,1)	-2,4442e+04	0,0001
Austrália (AORD)	(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	-2,5335e+04	0,0001
Malásia (KLSE)	(e) ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)	-2,5245e+04	0,0001
China (HSI)	(a) GARCH(1,2)	-2,1379e+04	0,0002
China (SSE)	(a) GARCH(1,1)	-2,1129e+04	0,0004
Japão (N225)	(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	-2,1306e+04	0,0003
França (FCHI)	(a) GARCH(1,1)	-2,1707e+04	0,0002
Suíça (SSMI)	(a) GARCH(1,1)	-2,3409e+04	0,0002
Alemanha (GDAX)	(a) GARCH(1,1)	-2,1436e+04	0,0003
Áustria (ATX)	(a) GARCH(1,1)	-2,2294e+04	0,0002
Bélgica (BFX)	(d) MA(1)+EGARCH(1,1)	-2,3189e+04	0,0002

Comparando os resultados da [Tabela 12](#) (*BIC* e *EQM* do modelo selecionado, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição Gaussiana) com os da [Tabela 30](#) (*BIC* e *EQM* do modelo selecionado, sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student), observa-se que para todos os modelos, os valores de *BIC* e do *EQM* são inferiores na segunda, e portanto, são os selecionados para a seguinte etapa.

Em resumo, os modelos de variância condicional, sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição t de Student, são os recomendados para a etapa de simulações e previsões em vez dos modelos sob o suposto que as inovações seguem uma distribuição Gaussiana. Além disso, conclui-se que as séries em que os primeiros 9 atrasos mostraram todos ser significantemente diferentes de zero, são modelados mediante modelos compostos ARMA+EGARCH.

5.3.2 Simulação de retornos, variâncias e preços condicionais

Como já se disse na Subseção 5.3.1, para as simulações, que é o objetivo desta Subseção, são utilizados os modelos apresentados na [Tabela 30](#), sob a suposição que as

inovações seguem uma distribuição t de Student. Lembrando que cada série dos índices financeiros é dividida em duas séries, a primeira com os 80% (série de treinamento) dos dados e a segunda, com os 20% (série de validação) deles.

Nesta Subseção, são simulados 20% (equivalente a 772 simulações) dos retornos, das variâncias e dos preços. Esses retornos e preços simulados são comparados com os retornos e preços de validação, mas, as variâncias simuladas não são comparáveis por não se ter uma série de variâncias de validação. Os gráficos comparativos são apresentados no [Apêndice E](#), e está formado por 16 figuras (da 46 à 61, uma para cada índice) e cada figura por 6 gráficos ((a), (b), (c), (d), (e) e (f)):

- gráfico (a). Este gráfico é formado por o primeiro 80% dos retornos utilizados para treinar o modelo (linha na cor cinza), por 20% dos retornos utilizados para validar o modelo (linha na cor preta) e por 5 caminhos simulados com mesmo 20% de comprimento (linhas nas cores distintas de cinza e preta);
- gráfico (b). Este gráfico é formado por 80% das variâncias inferidas previamente para realizar as simulações (linha na cor preta) e por 5 caminhos de variâncias simulados com 20% de comprimento (linhas nas cores distinta de preta);
- gráfico (c). Este gráfico é formado por o primeiro 80% dos retornos utilizados para treinar o modelo (linha na cor cinza), por 20% dos retornos utilizados para validar o modelo (linha na cor preta) e por a média dos 5 caminhos simulados com mesmo 20% de comprimento (linha na cor vermelha);
- gráfico (d). Este gráfico é formado por 80% das variâncias inferidas previamente para realizar as simulações (linha na cor preta) e por a média dos 5 caminhos de variâncias simulados com 20% de comprimento (linha na cor azul);
- gráfico (e). Este gráfico é formado por o primeiro 80% dos preços utilizados para treinar o modelo (linha na cor cinza), por 20% dos preços utilizados para validar o modelo (linha na cor preta) e por 5 caminhos de preços simulados com mesmo 20% de comprimento (linhas nas cores distintas de cinza e preta);
- gráfico (f). Este gráfico é formado por o primeiro 80% dos preços utilizados para treinar o modelo (linha na cor cinza), por 20% dos preços utilizados para validar o modelo (linha na cor preta) e por a média dos 5 caminhos de preços simulados com mesmo 20% de comprimento (linha na cor vermelha).

Em termos gerais, o comportamento da tendência de cada gráfico ((a), (b), (c), (d), (e) e (f)) em relação aos mesmos gráficos das outras figuras do [Apêndice E](#), é semelhante

entre eles. Por exemplo, as simulações de cada caminho de retorno são maiores comparadas aos retornos de validação (Apêndice E (figuras (46-61))(a)), conseqüentemente, cada caminho simulado para a variância apresenta valores altos comparado com seu passado imediato inferido (Apêndice E (figuras (46-61))(b)).

Observa-se também que a média dos 5 caminhos simulados para os retornos, tendem a se aproximar mais aos retornos de validação (Apêndice E (figuras (46-61))(c)), e que a variância média dos 5 caminhos de variância simulados tem comportamento parecido com as variâncias inferidas passadas (Apêndice E (figuras (46-61))(d)). Finalmente, os retornos simulados são transformados em preços (Apêndice E (figuras (46-61))(e)) e (Apêndice E (figuras (46-61))(d)), sendo claro que as primeiras simulações estão menos afastadas dos dados reais ou validação.

Em relação aos comportamentos encontrados e resumidos acima, conclui-se que a média dos 5 caminhos simulados para os retornos, para as variâncias e para os preços, representa melhor as simulações quando comparados aos dados reais, portanto, mesmo análise é feito na etapa de previsões. Além disso, conclui-se que os modelos ajustados são bons para previsões de curto prazo, já que os primeiros valores simulados são bem próximos aos dados reais ou de treinamento.

5.3.3 Previsão de retornos e variâncias condicionais

Nesta subseção, termina-se com o processo de modelagem da variância, para isso, são realizadas as previsões da variância para cada índice de mercado financeiro utilizando seu respectivo modelo selecionado. Primeiramente, são estimados os parâmetros do modelo, mas, desta vez, utilizando a totalidade dos dados (retornos).

Utilizando esses parâmetros estimados, as inovações (retornos) reais e as variâncias inferidas como dados de pré-amostra, são previstos mil caminhos de variância com 772 de comprimento (772 (20%) variâncias previstas para frente). Esses mil caminhos de variâncias são previstos mediante simulações Monte Carlo. A média desses caminhos é comparada com o Erro Quadrático Médio Mínimo (MMSE) de Monte Carlo e com a variância teórica. Essas previsões são apresentadas após das variâncias inferidas (figuras (12-27)(a) e (b)).

Figura 12 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Brasil (BVSP).

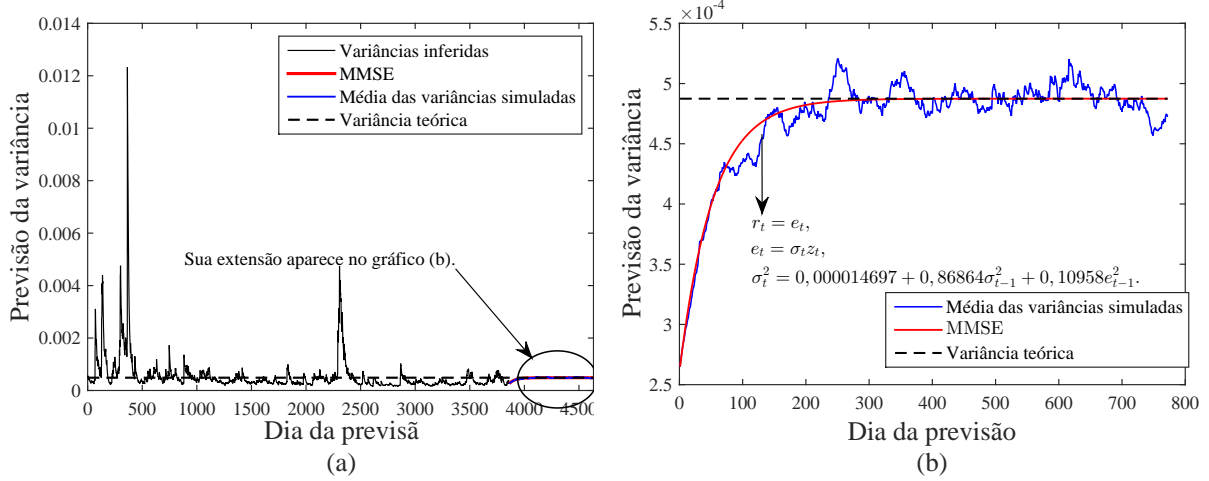


Figura 13 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(1,1)+EGARCH(2,3). Série: México (MXX).

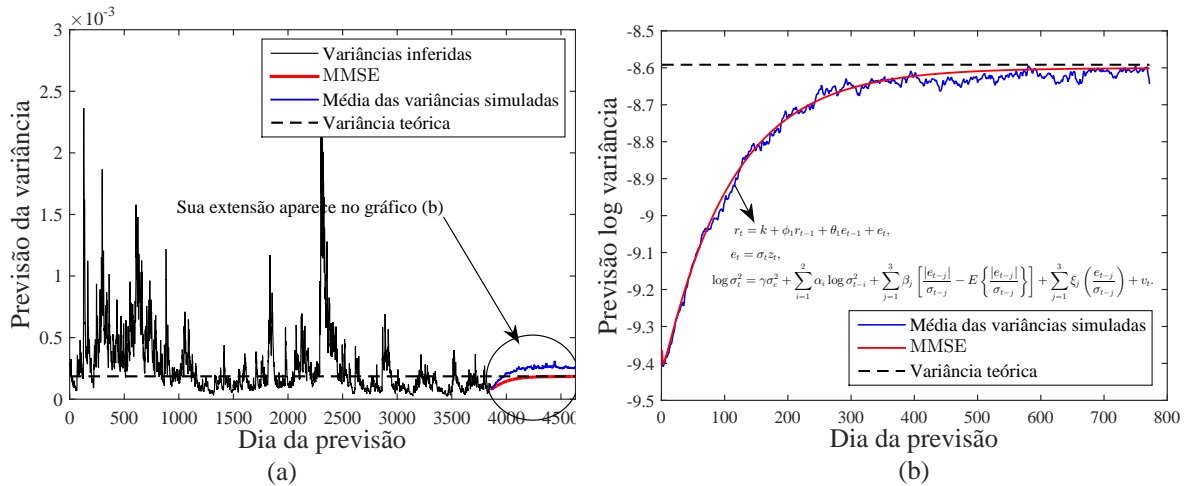


Figura 14 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: EUA (IXIC).

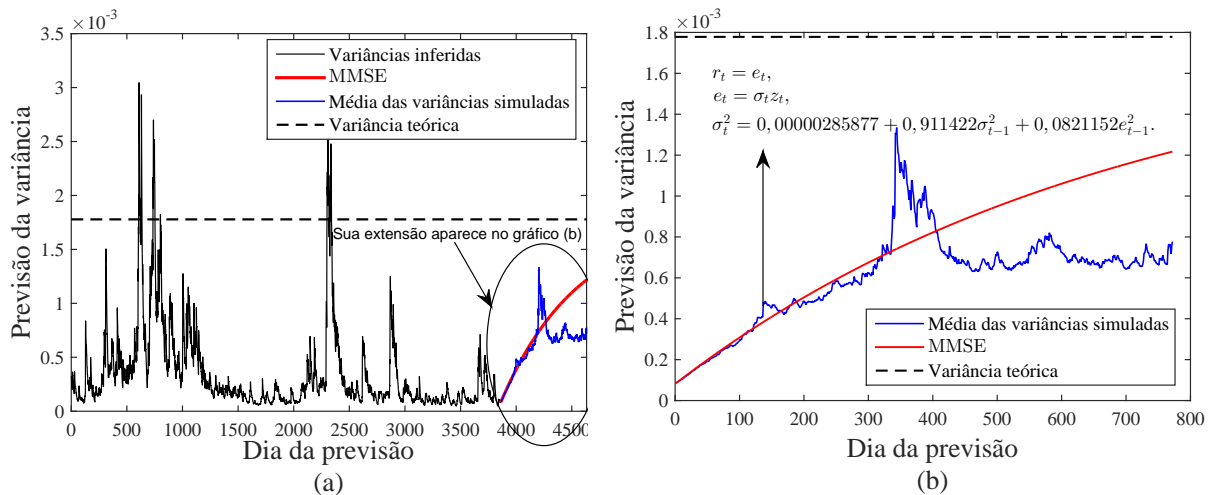


Figura 15 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(1,1)+EGARCH(2,2). Série: EUA (GSPC).

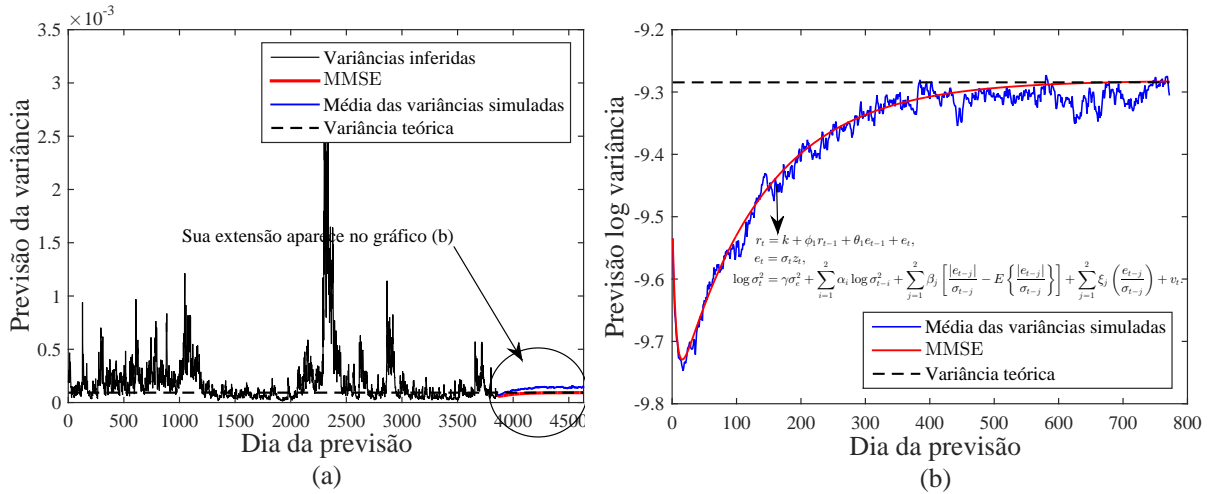


Figura 16 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: EUA (DJI).

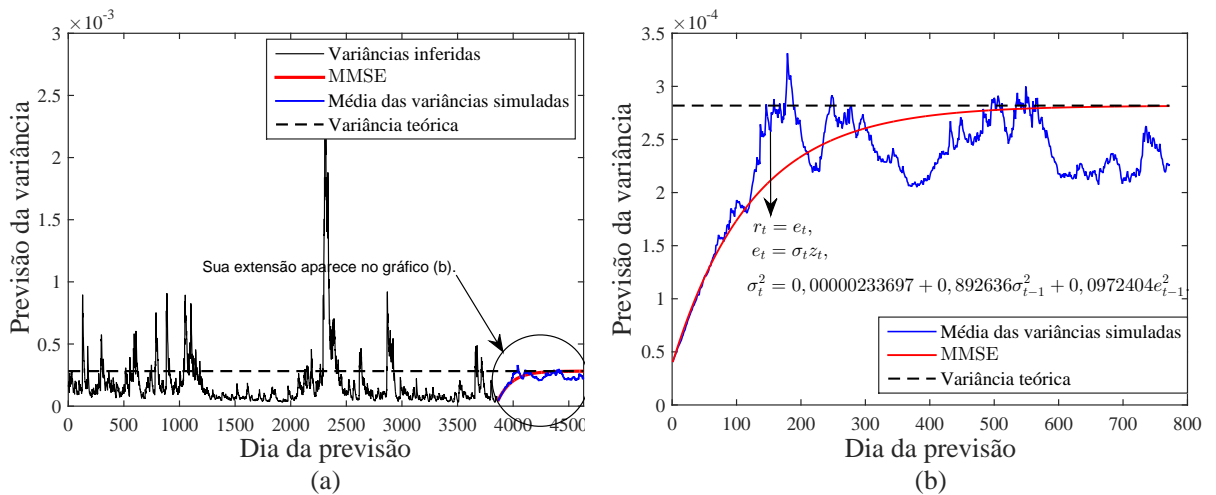


Figura 17 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Canadá (GSPTSE).

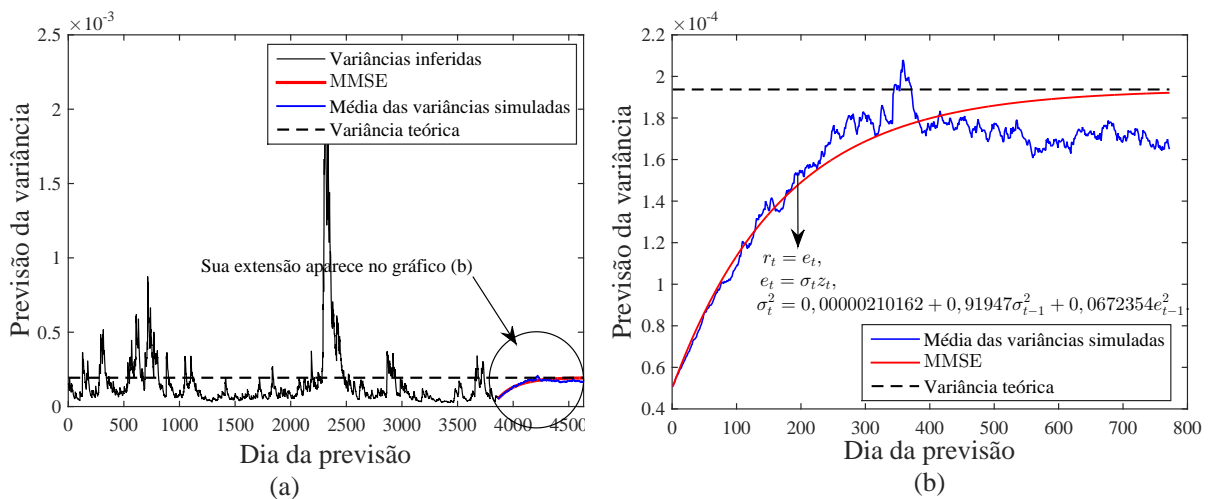


Figura 18 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(4,3)+EGARCH(2,2). Série: Austrália (AORD).

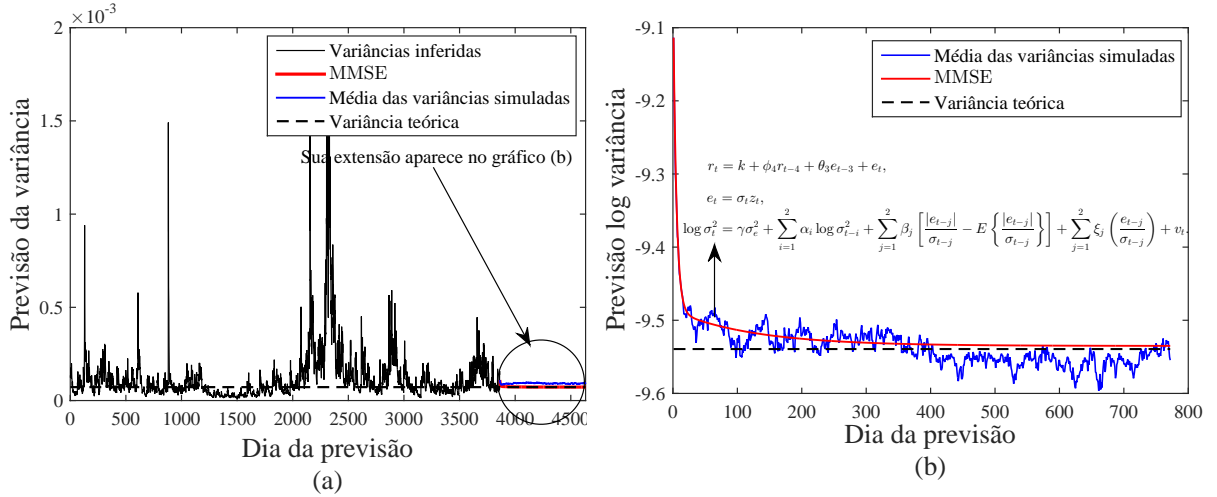


Figura 19 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(2,1)+EGARCH(4,4). Série: Malásia (KLSE).

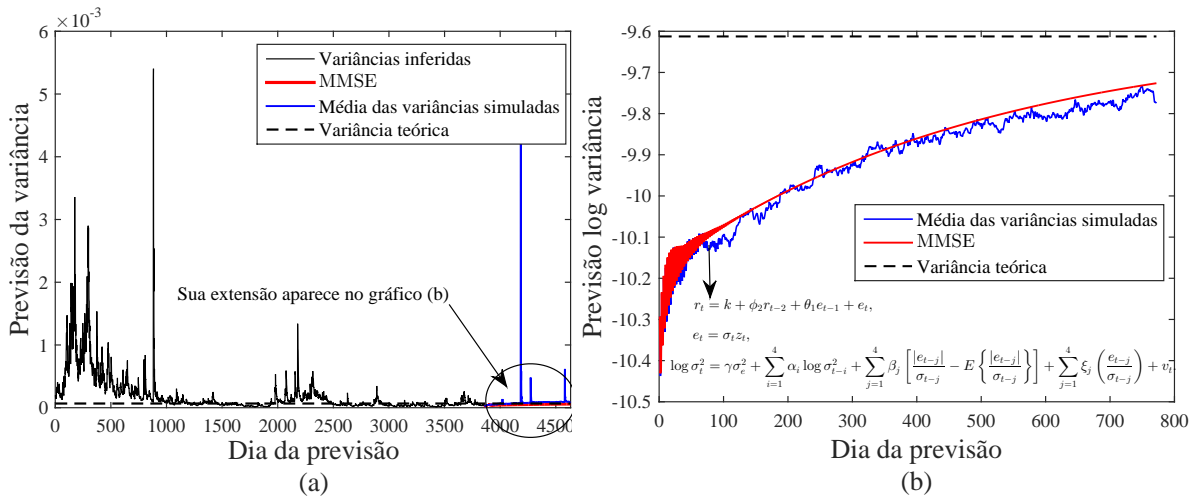


Figura 20 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,2). Série: China (HSI).

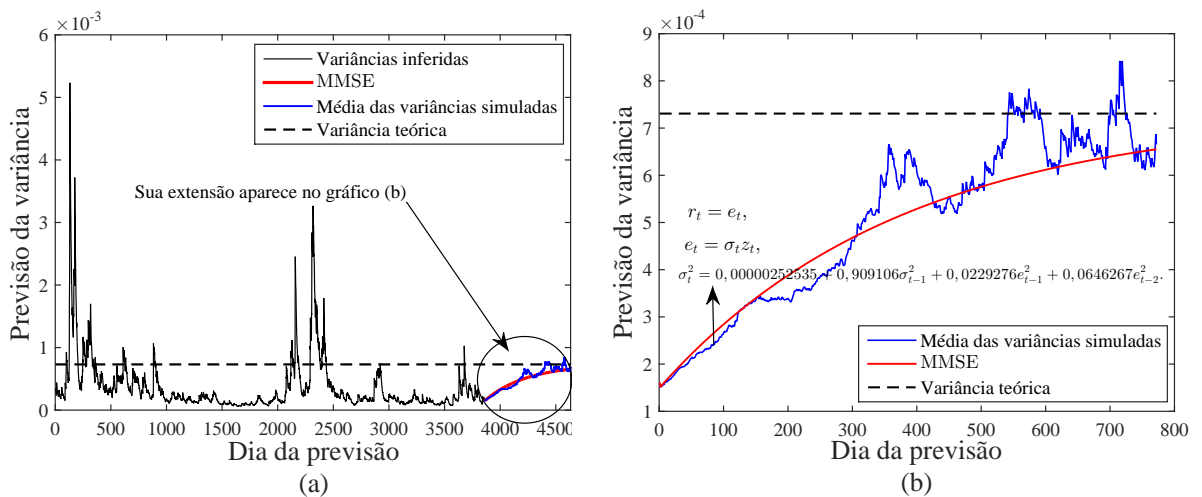


Figura 21 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: China (SSE).

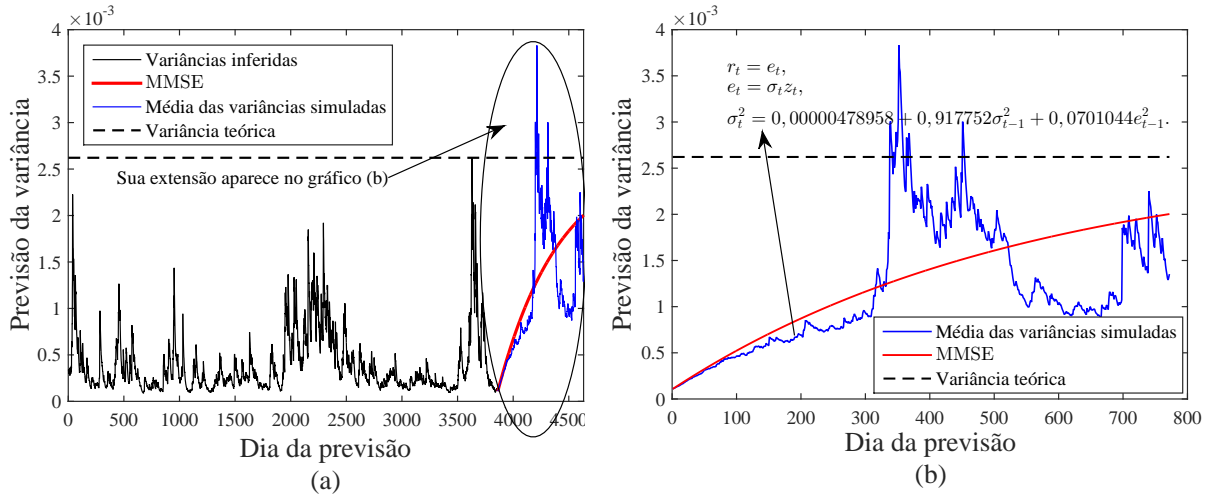


Figura 22 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância ARMA(4,4)+EGARCH(2,2). Série: Japão (N225).

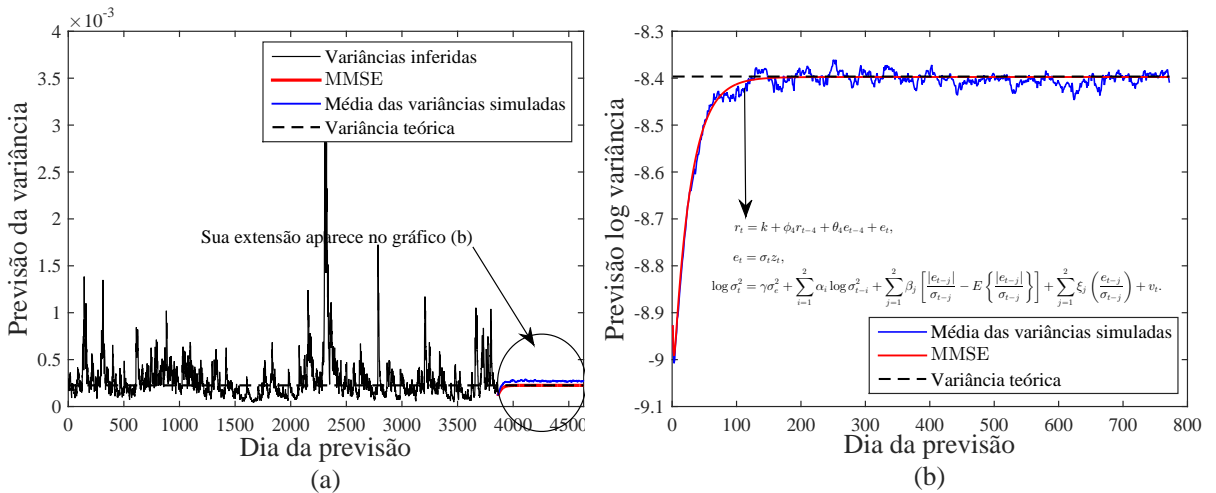


Figura 23 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: França (FCHI).

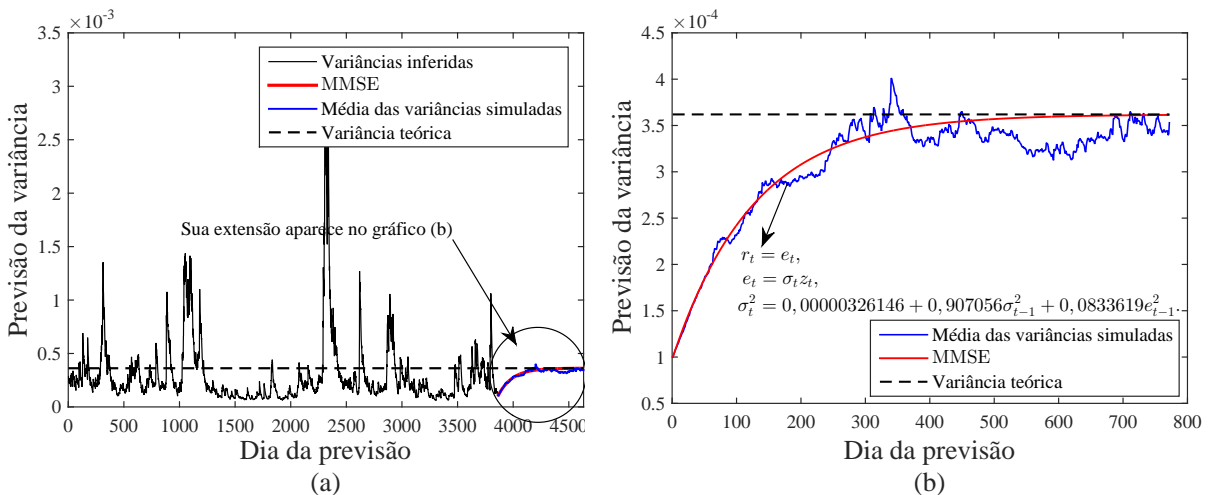


Figura 24 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Suíça (SSMI).

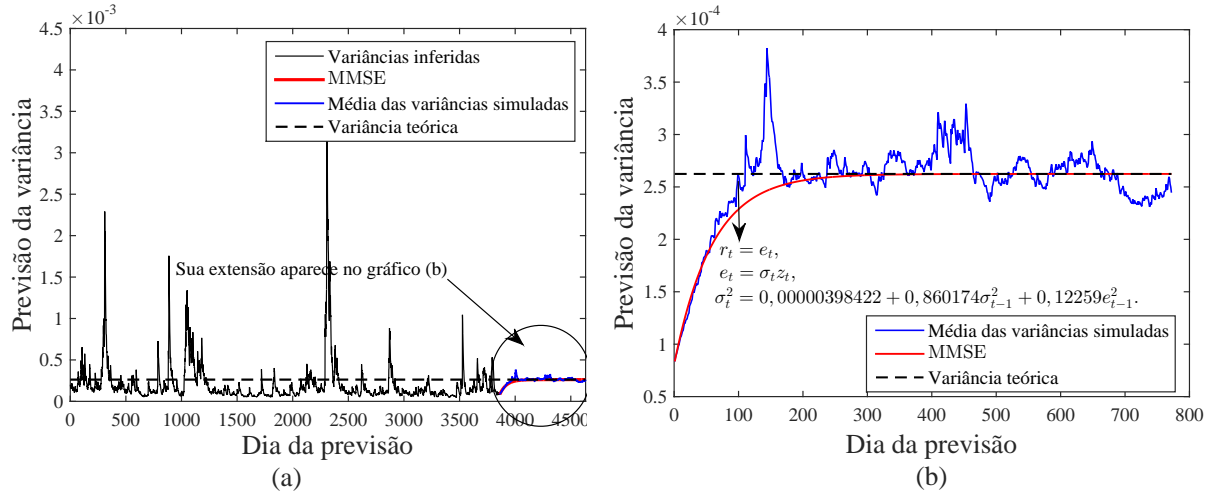


Figura 25 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Alemanha (GDAX).

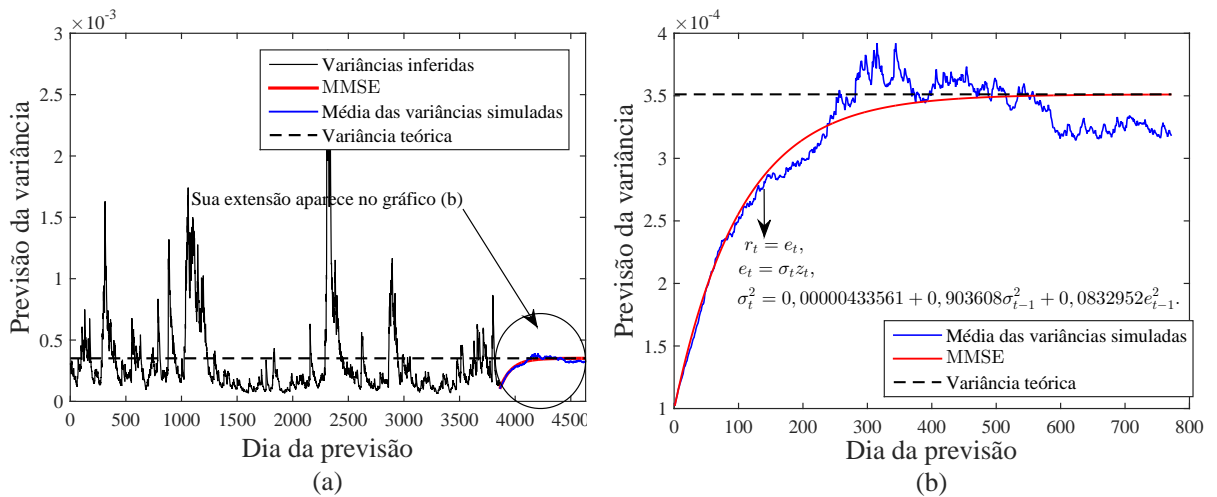


Figura 26 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo GARCH(1,1). Série: Áustria (ATX).

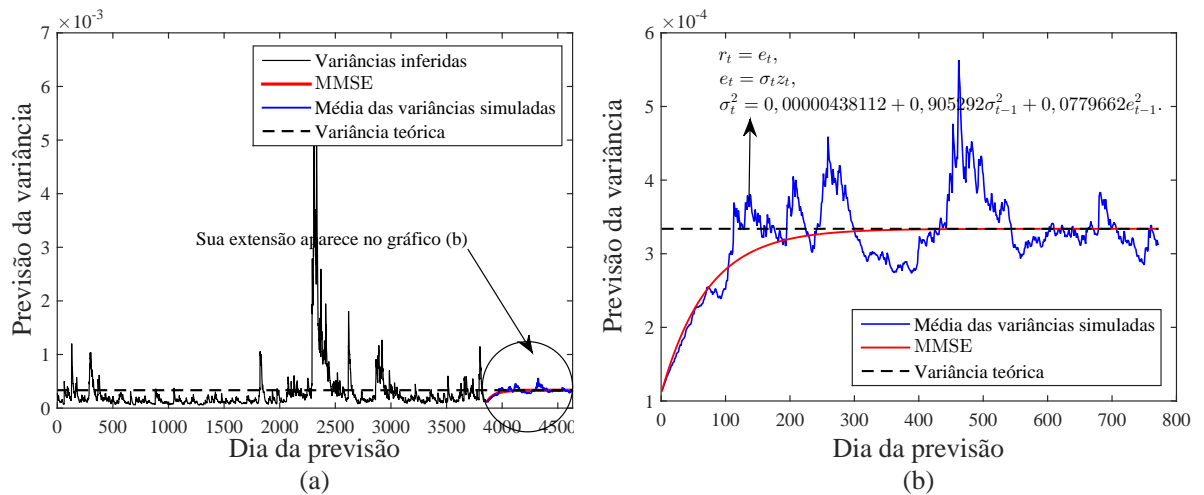
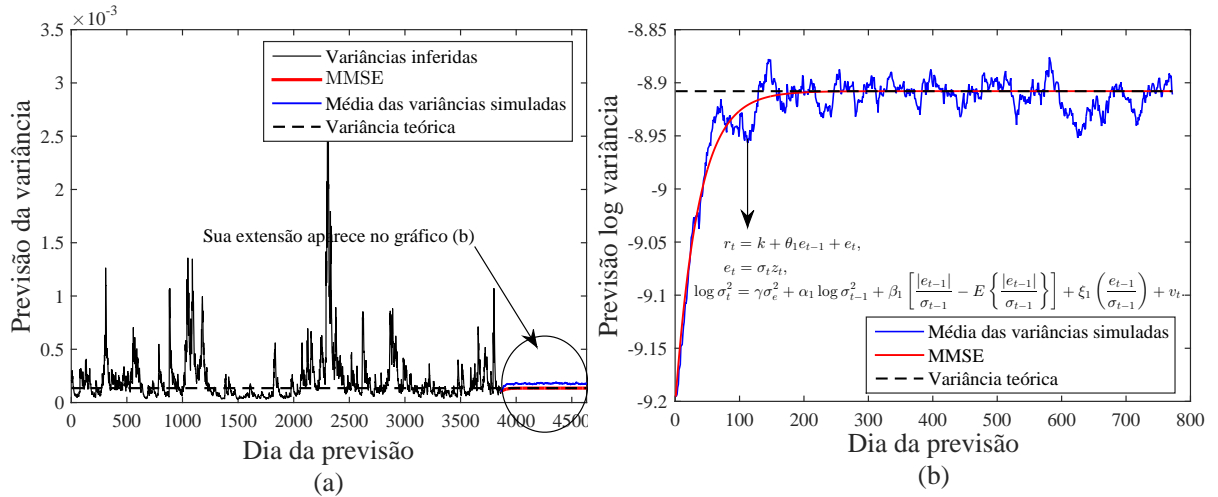


Figura 27 – Previsões de variâncias condicionais utilizando o modelo de variância AR(1)+EGARCH(1,1). Série: Bélgica (BFX).



O MMSE de Monte Carlo, é uma medida de variância que pode ser utilizada como alternativa na previsão, por isso, utiliza-se como parâmetro de comparação com as variâncias previstas neste trabalho.

Em termos gerais, as previsões da variância, mediante simulações Monte Carlo (figuras (12-27)(b), gráficos na cor azul), quando comparadas com o MMSE de Monte Carlo (figuras (12-27)(b), gráficos na cor vermelha), apresentam boa aproximação ao se tratar de previsões de curto alcance, ou seja, são semelhantes nos primeiros valores previstos. Observa-se que até aproximadamente as primeiras 50 ou 100 previsões, os caminhos percorrem juntos mesma tendência, mas, partindo desse ponto, apresentam discrepâncias bem pronunciadas.

Como resultado mais importante sobre as previsões, remarca-se o explicado no parágrafo acima, mas, analisando as previsões de longo alcance, observa-se que as séries modeladas mediante modelos puros ((figuras (12, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 24, 25, e 26) (b), gráficos na cor azul e vermelha)), apresentam discrepâncias bem pronunciadas.

Por outro lado, as séries modeladas mediante modelos compostos (figuras (13, 15, 18, 19, 22 e 27) (b), gráficos na cor azul e vermelha), ainda depois de alcançar o valor da variância teórica (máxima variância possível, gráfico na cor preta pontilhada), continuam tendo comportamento parecido. A média das variâncias previstas, o MMSE de Monte Carlo e a variância teórica nestes modelos são transformadas a log-variâncias para representar a resposta baseado na definição do modelo EGARCH.

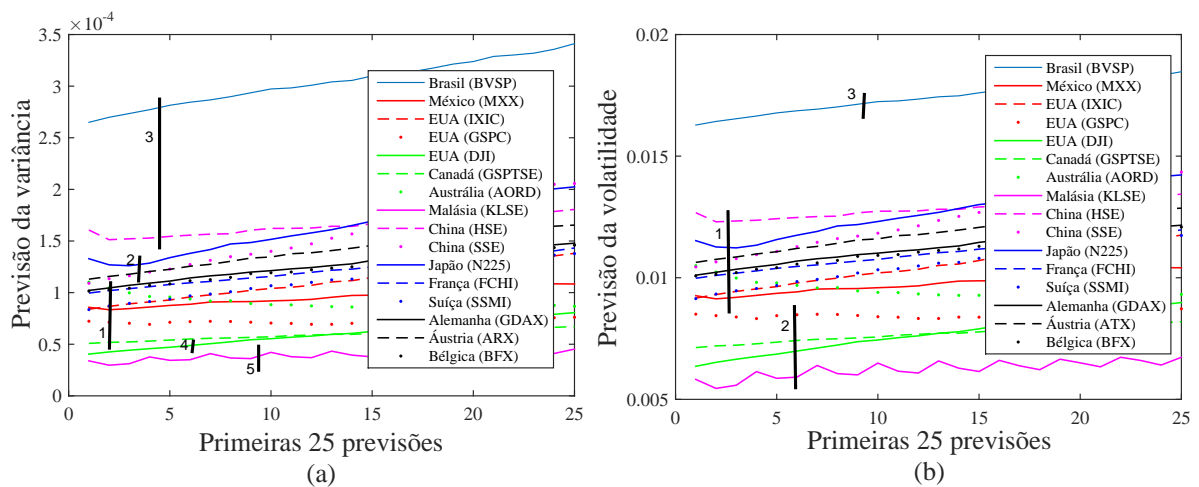
Em relação ao comportamento comum encontrado e explicado sobre as previsões da variância, dois casos merecem atenção: os índices Austrália (AORD) e Malásia (KLSE), respectivamente. O primeiro (Figura 18), por apresentar variâncias previstas que estão diminuindo no decorrer do tempo, caso atípico em relação aos outros 15 índices, e o

segundo (Figura 19), por apresentar as melhores aproximações nas primeiras 50 previsões.

Pelas características apresentadas pelos dois conjuntos de modelos de variância (puros e compostos), conclui-se a maneira de resumo que os modelos compostos têm melhor ajuste quando comparados com o MMSE de Monte Carlo.

Com objetivo de ver mais de perto as previsões da variância e da volatilidade condicionais, são apresentadas na Figura 28, as primeiras 25 delas.

Figura 28 – Previsões das primeiras 25 variâncias e volatilidades condicionais mediante os respectivos modelos ajustados para cada índice financeiro



A volatilidade é uma medida de dispersão (raiz quadrada da variância) dos retornos de um índice financeiro. Entre maior a dispersão, maior o risco de ganhar ou perder dinheiro negociado nas ações desse índice. Da (Figura 28(b)), observa-se que a maior dispersão nas previsões de volatilidade é o índice Brasil (BVSP), indicando que o preço das ações é muito variante em períodos curtos de tempo, e portanto, maior o risco de ganhar ou perder dinheiro ao investir nessa bolsa.

Por outro lado, Malásia (KLSE) apresenta a menor dispersão, indicando que o preço das ações não é muito variante em períodos curtos de tempo, e portanto, assim como não existe muito risco de perder, também não existe o de ter ganhos significativos ao investir nessa bolsa.

Em relação ao comportamento das previsões da volatilidade nos índices financeiros, observa-se que existe homogeneidade entre alguns deles e total divergência entre outros. Por exemplo, os índices unidos pela linha vertical na cor preta e identificados pelo número 1 na (Figura 28(b)), apresentam características parecidas entre eles pela proximidade, e muito diferentes aos índices: Malásia (KLSE) e Brasil (BVSP). Para aprofundar um pouco mais nesses comportamentos, se faz na seguinte seção uma análise de agrupamento para as previsões de retornos, de variâncias e volatilidades.

5.4 Análise de agrupamento

Nesta seção, os índices financeiros são agrupados em quatro momentos. O primeiro agrupamento é feito utilizando os retornos observados, e compara-se se os elementos (índices) de cada grupo têm sido ajustados pelo mesmo modelo de variância condicional. O segundo, terceiro e quarto agrupamentos, são feitos utilizando as previsões de retornos, de variâncias e de volatilidade, respectivamente. Verifica-se se os modelos de variância condicional como funções de transferência ajustados, modificam as características do agrupamento dos retornos observados em relação as previsões.

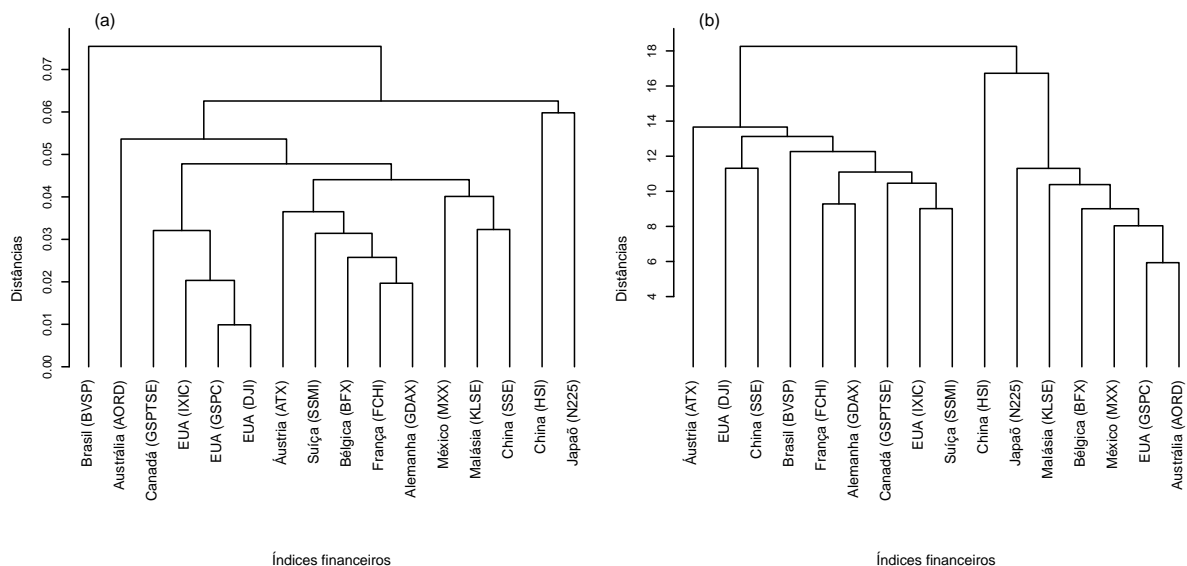
Para cada um dos quatro agrupamentos são utilizadas 25 variáveis, 4 medidas de distância e 7 diferentes métodos de agrupamento, fazendo um total de 28 combinações para cada agrupamento. Para avaliar a seleção do método de agrupamento, é utilizado o coeficiente de correlação cofenética. Os resultados são apresentados na [Tabela 31](#) e, seus respectivos agrupamentos são apresentados nos dendrogramas da figura [Figura 29](#).

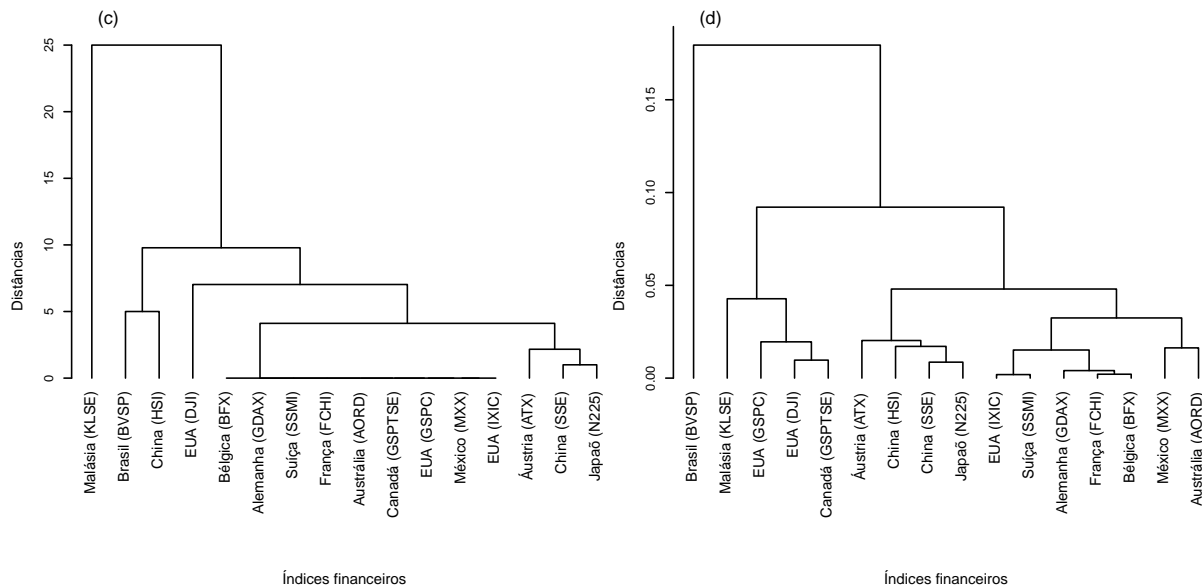
Tabela 31 – Medida de distância e método de agrupamento selecionados para o agrupamento mediante o maior valor do coeficiente de correlação cofenética.

Variáveis	Distância	Agrupamento	Correlação
Retornos observados	Euclidiana	k-means	0,9184 ^(a)
Retornos previstos	Canberra	k-means	0,9445
Variâncias previstas	Canberra	k-means	0,9795
Volatilidades previstas	Manhattan	k-means	0,8706

^(a) Das 28 combinações (4 medidas de distância com 7 métodos de agrupamento) para os retornos observados, a medida de distância Euclidiana e o método de agrupamento k-means é a de maior coeficiente de correlação cofenética 0,9184.

Figura 29 – Agrupamento dos índices, mediante: retornos observados (a), retornos previstos (b), variâncias previstas (c) e volatilidades previstas (d).





Os índices agrupados mediante os retornos observados (Figura 29(a)), que têm características semelhantes em relação aos retornos, não são todos ajustados pelo mesmo modelo de variância condicional, parece que eles foram agrupados em relação à localização geográfica. Por exemplo, do grupo formado por: Áustria (ATX), Suíça (SSMI), Bélgica (BFX), França (FCHI) e Alemanha (GDAX), todos, exceto Bélgica (BFX), são modelados pelo mesmo modelo GARCH(1,1). Outro exemplo de grupo claramente formado é : México (MXX), Malásia (KLSE) e China (SSE), em que os dois primeiros são modelados mediante modelos compostos e o último, pelo modelo puro GARCH(1,1). Em resumo, os grupos formados mediante os retornos observados, parece que tem mais a ver com a localização geográfica que com o tipo de modelo de variância ajustado.

A análise dos outros três gráficos (Figura 29 (b), (c) e (d)), é feita como resposta a seguinte pergunta: será que os modelos de variância condicional utilizados como funções de transferência, retêm as características do agrupamento dos retornos observados (Figura 29 (a)), em relação as características dos agrupamentos feitos para as previsões de retornos (Figura 29 (b)), de variâncias (Figura 29 (c)) e de volatilidades (Figura 29 (d))?

Comparando o agrupamento feito nos três gráficos (Figura 29 (b), (c) e (d)), observa-se que nos três, existe relação entre os índices de cada grupo e seus respectivos modelos ajustados e se afastando do comportamento do gráfico dos retornos observados (Figura 29 (a)). Por exemplo, no agrupamento mediante as previsões dos retornos (Figura 29 (b)), dois são os grupos claramente formados e, observa-se que todos os índices de cada grupo tem sido modelados pela mesma família de modelos. O primeiro grupo é modelado mediante modelos puros de variância condicionais GARCH, e o segundo, mediante modelos compostos ARMA+GARCH.

Em resumo, os modelos de variância condicional como funções de transferência, mantêm as características dos agrupamentos quando comparados com os agrupamentos das previsões, mas, modificam as características do agrupamento quando comparados com os agrupamentos dos retornos observados.

6 Conclusões

Em virtude das particularidades observadas nos resultados das 16 bolsas de valores estudadas neste trabalho, mediante os retornos dos índices de preços diário de fechamento, as conclusões podem ser agrupadas em dois blocos, o primeiro, relacionada aos comportamentos semelhantes, e o segundo aos comportamentos particulares de cada índice.

- Semelhanças:

1. As séries de retornos mostraram não ser normalmente distribuídas, rejeitando-se a hipótese de normalidade para cada série de retornos, e portanto, a modelagem delas é possível;
2. As séries de retornos mostraram ser estacionárias (quando a séries se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável). Nestas séries, a média constante foi aproximadamente zero;
3. Todas as séries de retornos mostraram ser significativamente correlacionadas em pelo menos um atraso dos primeiros 9 testados, e portanto, os modelos de média (ARMA) devem ser incluídos no ajuste dos modelos de variâncias condicional das séries de retosnos;
4. Todas as séries de resíduos dos retornos ao quadrado, mostraram ser significativamente correlacionadas em todos os primeiros 9 atrasos testados, e portanto, os modelos da família ARCH são adequadas para modelar a variância condicional das séries de retornos;
5. Os modelos de variância condicional ajustados para cada série, sob a suposição que as inovações (erros) seguem uma distribuição t de Student, foram os recomendados em vez dos modelos sob a suposição que as inovações seguem uma distribuição Gaussiana. Isto devido a que esses modelos conseguiram minimizar, tanto o Erro Quadrático Médio (*EQM*), quanto o valor do Critério de Informação Bayesiano (*BIC*);
6. A média aritmética de 5 caminhos simulados para os retornos, preços e variâncias, representaram melhor as simulações quando comparados aos dados reais dos retornos e preços, e das variância inferidas;
7. Os modelos de variância ajustados, resultaram muito bons para as previsões de curto prazo, já que os primeiros valores previstos são bem próximos aos dados reais ou treinamento;

- Diferenças:

1. As séries de retornos, nos quais, os primeiros 9 atrasos não foram todos significativamente diferentes de zero, mostraram ser melhor ajustados mediante os modelos de variância puros;
2. As séries de retornos, nos quais, os primeiros 9 atrasos foram todos significativamente diferentes de zero, mostraram ser melhor ajustados mediante os modelos compostos de média e variância;
3. Pelas características apresentadas pelos dois conjuntos de modelos de variâncias ajustados neste trabalho (puros e compostos), conclui-se que os modelos compostos têm melhor ajuste quando comparados com o MMSE de Monte Carlo;
4. Em relação as previsões da volatilidade, Brasil (BVSP) apresentou a maior dispersão dentre os índices analisados, indicando que o preço diário de fechamento desse índice é muito variante em períodos curtos de tempo, e portanto, maior o risco de ganhar ou perder dinheiro ao investir nessa bolsa de valores. Por outro lado, Malásia (KLSE), mostrou ter a menor dispersão dentre os índices analisados, indicando que o preço diário de fechamento desse índice não é muito variante em períodos curtos de tempo, e portanto, assim como não existe muito risco de perder, também não existe muito risco de ter ganhos significativos ao investir nessa bolsa.

As características dos índices financeiros agrupados mediante seus respectivos retornos observados, são diferentes das características dos agrupamentos feitos com as previsões (retornos, variâncias e volatilidades) obtidas mediante os modelos de variância condicional ajustados. Das 28 combinações feitas para cada série (retornos observados, previsões de retornos, de variâncias e de volatilidades) em relação à análise de agrupamento, observou-se que:

- A medida de distância “Euclidiana” combinada com o método de agrupamento “k-means” resultou ajustar melhor o agrupamento dos retornos observados; por sua vez, os índices de cada grupo foram caracterizados em relação à localização geográfica;
- A medida de distância “Canberra” combinada com o método de agrupamento “k-means” resultou ajustar melhor as previsões dos retornos e das variâncias. No agrupamento das previsões dos retornos, os índices de cada grupo foram caracterizados em relação ao modelo de variância condicional ajustado (puros e compostos);

- A medida de distância “Manhattan” combinada com o método de agrupamento “k-means” resultou ajustar melhor o agrupamento das previsões da volatilidade. Os índices financeiros de cada grupo foram caracterizados em relação à proximidade do risco que apresentam.

6.1 Trabalhos futuros

Embora a contribuição de um trabalho seja significativa, sempre haverá maneiras de se melhorar, seja da mesma perspectiva ou de outros pontos de vista. Como medida no melhoramento da modelagem realizada neste trabalho, sugere-se:

- Testar outros modelos econométricos de variâncias condicional puros e compostos, por exemplo, LGARCH, MGARCH, IGARCH TS-GARCH;
- Pensar no desenvolvimento de outros modelos econométricos, por exemplo, modelos de curtose (modelos não lineares de quarta ordem);
- Testar outras funções de distribuição de probabilidade (além da Gaussiana e da t de Student) para as inovações (resíduos);
- Levar a teoria da análise de agrupamento da volatilidade prevista mediante os modelos ajustados à teoria de construção de portfólios.

Referências Bibliográficas

- ALI, G. EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH, AVGARCH, NGARCH, IGARCH and APARCH models for pathogens at marine recreational sites. **Journal of Statistical and Econometric Methods**, SCIENPRESS Ltd, v.2, n.3, 2013.
- ANDREOU, E.; PITTIS, N.; SPANOS, A. On modelling speculative prices: the empirical literature. **Journal of economic surveys**, Wiley Online Library, v. 15, n. 2, p. 187–220, 2001.
- ARANGO, F.O. Pronostico de precios de petróleo: una comparación entre modelos GARCH y redes neuronales diferenciales. **Investigación económica**, Elsevier, v. 76, n. 300, p. 105–126, 2017.
- BACHELIER, L. **Théorie de la spéculation**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1900.
- BOLFARINE, H.; CARNEIRO, M. **Introdução à inferência estatística**. [s.n.], 2001. ISBN 8585818131,9788585818135. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=0146E890DD83BAD0FF1638DEE235B31A>>.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of econometrics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.
- BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F. Common persistence in conditional variances. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 167–186, 1993.
- BORDA, R. de A. 20 años de modelos ARCH: una visión de conjunto de las distintas variantes de la familia. **Estudios de economía aplicada**, Asociación Española de Economía Aplicada, ASEPELT, v.22, n.1, p. 157–158, 2004.
- BOX, G.E.; JENKINS, G.M.; REINSEL, G.C. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. 4th. ed. Wiley, 2008. ISBN 9780470272848, 0470272848. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=9fa5414b790ea57bebc0125d13ba3c86>>.
- BOX, G.E.; JENKINS, G.M.; REINSEL, G.C. **Time series analysis: Forecasting and control**. 3rd. ed. Prentice Hall, 1994. ISBN 0130607746,9780130607744. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=1A51C13D3B90AD6E4D03802E5EFD8559>>.
- BUSSAB, W. d. O.; MIAZAKI, É.; ANDRADE, D. Introdução à análise de agrupamentos: In: Simpósio brasileiro de probabilidade e estatística, 9. **São Paulo. Resumos... São Paulo**, 1990.
- CORVI, D. Evidencia de volatilidad agrupada en el mercado accionario ecuatoriano: aplicación de un modelo IGARCH para el índice ecuindex. **Revista Economía y Política**, Universidad de Cuenca, n. 25, p. 87–99, 2017.

COWLES, A. Can stock market forecasters forecast? **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 309–324, 1933.

COWLES, A.; JONES, H. E. Some a posteriori probabilities in stock market action. **Econometrica, Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 280–294, 1937.

CRUZ, F.N.; FRANÇOSO, M.S. Análise da volatilidade dos preços da indústria canavieira: uma aplicação dos modelos da família ARCH. **Revista Economia Ensaios**, v. 32, n. 1, 2017.

DING, Z.; GRANGER, C. W.; ENGLE, R. F. A long memory property of stock market returns and a new model. **Journal of empirical finance**, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 83–106, 1993.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 987–1007, 1982.

FAMA, E.F. The behavior of stock-market prices. **The journal of Business**, JSTOR, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965.

FRANCO, C.; ZAKOIAN, J.M. Inconsistency of the MLE and inference based on weighted LS for LARCG models. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 159, n. 1, p. 151–165, 2010.

FRANCO, C.; ZAKOIAN, J.M. **GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications**. Wiley, 2010. ISBN 0470683910,9780470683910. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=D9DD17BAC5C8B9BC550D154E4849E2B9>>.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 1779–1801, 1993.

JENKINS, G.M.; WATTS, D.G. **Spectral Analysis and its applications**. Holden-Day, 1968. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=923c4b8c1518fed7fb307c02826a97c7>>.

GRAS, J. A. **Diseños de series temporales: técnicas de análisis**. [S.l.]: Edicions Universitat Barcelona, 2001. v. 46.

GUO, Z.Y. Empirical performance of GARCH models with heavy-tailed innovations. Kiel und Hamburg: ZBW-Deutsche Zentralbibliothek für Wirtschaftswissenschaften, Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft, 2017.

GUO, Z.Y. GARCH models with fat-tailed distributions and the hong kong stock market returns. **International Journal of Business and Management**, v. 12, n. 9, p. 28, 2017.

HAMILTON, J.D. **Time series analysis**. 1. ed. Princeton University Press, 1994. ISBN 0691042896,9780691042893. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=46573EE323BFCECAD694F61564CA8E1C>>.

- HURST, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. **Trans. Amer. Soc. Civil Eng.**, v. 116, p. 770–799, 1951.
- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. A test for normality of observations and regression residuals. **International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique**, JSTOR, p. 163–172, 1987.
- KENDALL, M. G.; HILL, A. B. The analysis of economic time-series-part i: Prices. **Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)**, JSTOR, v. 116, n. 1, p. 11–34, 1953.
- KWIATKOWSKI, D. et al. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? **Journal of econometrics**, Elsevier, v. 54, n. 1-3, p. 159–178, 1992.
- LIDDLE, A. R. Information criteria for astrophysical model selection. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 377, n. 1, p. L74–L78, 2007.
- LORENZO, A.; RUIZ, A. Los rendimientos cambiarios latinoamericanos y la (a)simetría de los shocks informacionales: un análisis econométrico. **Ensayos Revista de Economía**, v. 21, n. 2, p. 87–113, 2012.
- MALHOTRA, N.K. et al. Pesquisa de marketing: uma orientação aplicada. Tradução de nivaldo montingelli jr. e alfredo alves de farias. **Porto Alegre: Bookman**, 2001.
- MANDELBROT, B. New methods in statistical economics. **Journal of political economy**, The University of Chicago Press, v. 71, n. 5, p. 421–440, 1963.
- MANDELBROT, B. B. **La geometria fractal de la naturaleza**. [S.l.]: Tusquets, 1997.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 347–370, 1991.
- REYES, N. J.; VENEGAS, F.; CRUZ, S. A comparative analysis among MGARCH, EGARCH and PJ-RS-SV (poisson jumps-regime switching-stochastic volatility) approach to model the mexican stock index. 2018.
- SARKAR, A.; ALMGREN, R.; MENKVELD, A.J.; WU, L.; SCHWARTZ, R.A.; BYRNE, J.A.; COLANINNO, A. **Volatility: Risk and Uncertainty in Financial Markets**. 1. ed. Springer US, 2011. (Zicklin School of Business Financial Markets Series). ISBN 1441914730,9781441914736,9781441914743. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=6B590855A805888300FA87C12D57969C>>.
- SCHWARZ, G. et al. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SENTANA, E. Quadratic ARCH models. **The Review of Economic Studies**, Wiley-Blackwell, v. 62, n. 4, p. 639–661, 1995.

SHIMIZU, K. **Bootstrapping Stationary ARMA-GARCH Models**. 2010. ed. Vieweg + Teubner, 2010. ISBN 9783834809926. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=6C0090608ABF2F1E7DEC48B30E251B79>>.

SKOGLUND, J.; CHEN, W. **Financial Risk Management: Applications in Market, Credit, Asset and Liability Management and Firmwide Risk**. 1. ed. Wiley, 2015. (Wiley Finance). ISBN 1119135516,9781119135517. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=2538b44dc50b245bd4ab11fac8562731>>.

SOSA, M.; ORTIZ, E.; CABELLO, A. Crisis financiera global y su impacto en la dinámica bursátil europea y americana. **Revista Mexicana de Economía y Finanzas**, v. 12, n. 3, p. 1–27, 2017.

TOBIN, J. Liquidity preference as behavior towards risk. **The review of economic studies**, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 65–86, 1958.

TSAY, R. S. **Analysis of Financial Time Series (Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section Series)**. 3. ed. John Wiley and Sons, 2010. ISBN 0470414359,9780470644553,9780470414354,0470644559. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=39A0AC4FE0740A743815B7914985B673>>.

WOLD, H. **A study in the analysis of stationary time series**. Tese (Doutorado) — Almqvist & Wiksell, 1938.

WORKING, H. A random-difference series for use in the analysis of time series. **journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 29, n. 185, p. 11–24, 1934.

ZAKOIAN, J.M. Threshold heteroskedastic models. **Journal of Economic Dynamics and control**, Elsevier, v. 18, n. 5, p. 931–955, 1994.

Apêndices

APÊNDICE A – Estimativa dos parâmetros dos 5 modelos de variância para cada índice

Tabela 32 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Brasil (BVSP).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
GARCH(1,1) (a)	Constante	0,0000	0,0000	7,5791
	GARCH(1)	0,8686	0,0084	103,4670
	ARCH(1)	0,1096	0,0060	18,1804
EGARCH(2,2) (b)	Constante	-0,0213	0,0056	-3,8113
	GARCH(1)	1,8038	0,0249	72,3053
	GARCH(2)	-0,8067	0,0245	-32,9682
	ARCH(1)	0,1306	0,0178	7,3510
	ARCH(2)	-0,1033	0,0188	-5,5048
	Alavancagem(1)	-0,2096	0,0114	-18,3980
	Alavancagem(2)	0,2039	0,0110	18,5721
AR(4)+EGARCH(2,2) (c)	Constante	0,0006	0,0003	1,6671
	AR(4)	-0,0368	0,0180	-2,0414
	Constante	-0,0221	0,0058	-3,8374
	GARCH(1)	1,7980	0,0257	69,9708
	GARCH(2)	-0,8010	0,0252	-31,7621
	ARCH(1)	0,1289	0,0182	7,0830
	ARCH(2)	-0,1003	0,0193	-5,2015
	Alavancagem(1)	-0,2108	0,0116	-18,1741
MA(4)+EGARCH(2,2) (d)	Constante	0,0006	0,0003	1,6909
	MA(4)	-0,0357	0,0180	-1,9901
	Constante	-0,0219	0,0058	-3,8012
	GARCH(1)	1,7970	0,0260	69,0707
	GARCH(2)	-0,8000	0,0255	-31,3231
	ARCH(1)	0,1302	0,0183	7,1291
	ARCH(2)	-0,1015	0,0193	-5,2597
	Alavancagem(1)	-0,2107	0,0117	-18,0713
	Alavancagem(2)	0,2052	0,0112	18,2793
ARMA(4,4)+EGARCH(2,2) (e)	Constante	0,0008	0,0005	1,5321
	AR(4)	-0,5596	0,2121	-2,6381
	MA(4)	0,5248	0,2190	2,3959
	Constante	-0,0221	0,0058	-3,8277
	GARCH(1)	1,7995	0,0256	70,3963
	GARCH(2)	-0,8025	0,0251	-31,9927
	ARCH(1)	0,1282	0,0183	7,0010
	ARCH(2)	-0,0994	0,0195	-5,1124
	Alavancagem(1)	-0,2097	0,0117	-17,9969
	Alavancagem(2)	0,2041	0,0112	18,1883

Tabela 33 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série México (MXX).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	5,0371
		GARCH(1)	0,8960	0,0063	142,0770
		ARCH(1)	0,0938	0,0053	17,7451
EGARCH(3,3)	(b)	Constante	-0,0200	0,0076	-2,6323
		GARCH(1)	1,3103	0,1420	9,2302
		GARCH(2)	0,1064	0,2657	0,4003
		GARCH(3)	-0,4192	0,1292	-3,2450
		ARCH(1)	0,0733	0,0297	2,4644
		ARCH(2)	0,1378	0,0447	3,0844
		ARCH(3)	-0,1814	0,0268	-6,7685
		Alavancagem(1)	-0,1345	0,0190	-7,0896
		Alavancagem(2)	-0,0034	0,0370	-0,0927
		Alavancagem(3)	0,1270	0,0260	4,8846
AR(3)+EGARCH(4,4)	(c)	Constante	0,0011	0,0002	4,4506
		AR(3)	-0,0420	0,0179	-2,3429
		Constante	-0,0464	0,0184	-2,5200
		GARCH(1)	0,0458	0,0361	1,2676
		GARCH(2)	1,4798	0,0324	45,7105
		GARCH(3)	0,2811	0,0302	9,3177
		GARCH(4)	-0,8126	0,0365	-22,2518
		ARCH(1)	0,1430	0,0197	7,2433
		ARCH(2)	0,1918	0,0185	10,3618
		ARCH(3)	-0,0993	0,0211	-4,6990
		ARCH(4)	-0,1560	0,0208	-7,5038
		Alavancagem(1)	-0,1513	0,0157	-9,6686
		Alavancagem(2)	-0,1519	0,0132	-11,4964
		Alavancagem(3)	0,1051	0,0132	7,9617
Alavancagem(4)	0,1738	0,0113	15,4155		
MA(1)+EGARCH(2,3)	(d)	Constante	0,0007	0,0003	2,5799
		MA(1)	0,0767	0,0188	4,0721
		Constante	-0,0187	0,0071	-2,6549
		GARCH(1)	1,7769	0,0474	37,4877
		GARCH(2)	-0,7793	0,0467	-16,6943
		ARCH(1)	0,1035	0,0300	3,4521
		ARCH(2)	0,0034	0,0558	0,0605
		ARCH(3)	-0,0803	0,0283	-2,8375
		Alavancagem(1)	-0,1341	0,0200	-6,6913
		Alavancagem(2)	0,0602	0,0394	1,5282
Alavancagem(3)	0,0632	0,0216	2,9332		
ARMA(1,1)+EGARCH(2,3)	(e)	Constante	0,0006	0,0003	1,9279
		AR(1)	0,0623	0,2432	0,2560
		MA(1)	0,0153	0,2443	0,0625
		Constante	-0,0184	0,0070	-2,6335
		GARCH(1)	1,7797	0,0473	37,6432
		GARCH(2)	-0,7820	0,0466	-16,7949
		ARCH(1)	0,1036	0,0301	3,4430
		ARCH(2)	0,0016	0,0559	0,0293
		ARCH(3)	-0,0791	0,0285	-2,7755
		Alavancagem(1)	-0,1350	0,0201	-6,7215
		Alavancagem(2)	0,0627	0,0395	1,5868
		Alavancagem(3)	0,0617	0,0216	2,8570

Tabela 34 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (IXIC).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
GARCH(1,1) (a)	Constante	0,0000	0,0000	4,0408
	GARCH(1)	0,9114	0,0064	141,5210
	ARCH(1)	0,0821	0,0065	12,6025
EGARCH(2,2) (b)	Constante	-0,0116	0,0037	-3,1598
	GARCH(1)	1,8168	0,0315	57,6795
	GARCH(2)	-0,8183	0,0312	-26,2321
	ARCH(1)	0,0920	0,0180	5,1195
	ARCH(2)	-0,0726	0,0183	-3,9631
	Alavancagem(1)	-0,1817	0,0142	-12,7520
	Alavancagem(2)	0,1756	0,0135	13,0526
AR(4)+EGARCH(2,2) (c)	Constante	0,0003	0,0003	1,2460
	AR(4)	-0,0212	0,0175	-1,2098
	Constante	-0,0128	0,0040	-3,2151
	GARCH(1)	1,8050	0,0336	53,7462
	GARCH(2)	-0,8067	0,0333	-24,2527
	ARCH(1)	0,0883	0,0180	4,9083
	ARCH(2)	-0,0665	0,0184	-3,6077
	Alavancagem(1)	-0,1820	0,0143	-12,7096
Alavancagem(2)	0,1753	0,0135	13,0013	
MA(4)+EGARCH(2,2) (d)	Constante	0,0003	0,0002	1,2493
	MA(4)	-0,0213	0,0175	-1,2219
	Constante	-0,0132	0,0041	-3,2133
	GARCH(1)	1,8044	0,0342	52,8356
	GARCH(2)	-0,8060	0,0338	-23,8359
	ARCH(1)	0,0909	0,0181	5,0245
	ARCH(2)	-0,0688	0,0186	-3,7074
	Alavancagem(1)	-0,1797	0,0144	-12,5028
Alavancagem(2)	0,1731	0,0135	12,8014	
ARMA(3,3)+EGARCH(2,3) (e)	Constante	0,0001	0,0001	1,5126
	AR(3)	0,7681	0,1024	7,5029
	MA(3)	-0,7983	0,0961	-8,3082
	Constante	-0,0121	0,0042	-2,8794
	GARCH(1)	1,7834	0,0417	42,7243
	GARCH(2)	-0,7849	0,0414	-18,9636
	ARCH(1)	-0,0163	0,0293	-0,5553
	ARCH(2)	0,1771	0,0574	3,0878
	ARCH(3)	-0,1387	0,0325	-4,2630
	Alavancagem(1)	-0,1654	0,0209	-7,8998
	Alavancagem(2)	0,1372	0,0460	2,9803
Alavancagem(3)	0,0219	0,0277	0,7898	

Tabela 35 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (GSPC).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,2)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	3,8451
		GARCH(1)	0,8846	0,0086	103,3440
		ARCH(1)	0,0341	0,0110	3,1134
		ARCH(2)	0,0700	0,0120	5,8298
EGARCH(2,3)	(b)	Constante	-0,0145	0,0046	-3,1286
		GARCH(1)	1,8327	0,0355	51,6783
		GARCH(2)	-0,8344	0,0350	-23,8423
		ARCH(1)	-0,0489	0,0297	-1,6489
		ARCH(2)	0,1847	0,0542	3,4076
		ARCH(3)	-0,1205	0,0290	-4,1516
		Alavancagem(1)	-0,1900	0,0203	-9,3378
		Alavancagem(2)	0,1448	0,0439	3,2954
		Alavancagem(3)	0,0356	0,0255	1,3943
AR(4)+EGARCH(2,3)	(c)	Constante	0,0000	0,0002	0,1433
		AR(4)	-0,0240	0,0175	-1,3747
		Constante	-0,0152	0,0048	-3,1246
		GARCH(1)	1,8231	0,0385	47,4012
		GARCH(2)	-0,8249	0,0380	-21,7252
		ARCH(1)	-0,0522	0,0300	-1,7415
		ARCH(2)	0,1969	0,0549	3,5888
		ARCH(3)	-0,1289	0,0297	-4,3448
		Alavancagem(1)	-0,1897	0,0205	-9,2461
		Alavancagem(2)	0,1437	0,0447	3,2152
MA(3)+EGARCH(2,2)	(d)	Constante	0,0001	0,0002	0,2949
		MA(3)	-0,0410	0,0167	-2,4478
		Constante	-0,0177	0,0040	-4,3783
		GARCH(1)	1,8294	0,0268	68,2284
		GARCH(2)	-0,8315	0,0265	-31,4147
		ARCH(1)	0,0502	0,0187	2,6848
		ARCH(2)	-0,0327	0,0195	-1,6760
		Alavancagem(1)	-0,2202	0,0143	-15,4180
		Alavancagem(2)	0,2098	0,0134	15,6063
ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	(e)	Constante	0,0000	0,0000	1,0616
		AR(1)	0,7437	0,1083	6,8659
		MA(1)	-0,7842	0,1001	-7,8353
		Constante	-0,0177	0,0040	-4,4215
		GARCH(1)	1,8199	0,0278	65,3626
		GARCH(2)	-0,8219	0,0275	-29,8676
		ARCH(1)	0,0483	0,0185	2,6057
		ARCH(2)	-0,0296	0,0193	-1,5345
		Alavancagem(1)	-0,2134	0,0138	-15,4395
Alavancagem(2)	0,2037	0,0131	15,5635		

Tabela 36 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (DJI).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	3,9225
		GARCH(1)	0,8926	0,0072	123,7100
		ARCH(1)	0,0972	0,0068	14,3669
EGARCH(2,3)	(b)	Constante	-0,1569	0,0365	-4,2934
		GARCH(1)	1,0104	0,1657	6,0987
		GARCH(2)	-0,0285	0,1621	-0,1756
		ARCH(1)	0,0608	0,0265	2,2986
		ARCH(2)	0,0307	0,0345	0,8902
		ARCH(3)	0,0150	0,0323	0,4631
		Alavancagem(1)	-0,1783	0,0178	-10,0028
		Alavancagem(2)	-0,0594	0,0418	-1,4194
		Alavancagem(3)	0,1280	0,0234	5,4665
AR(1)+EGARCH(3,3)	(c)	Constante	0,0001	0,0002	0,4029
		AR(1)	-0,0293	0,0194	-1,5092
		Constante	-0,0260	0,0090	-2,8925
		GARCH(1)	1,1431	0,1571	7,2759
		GARCH(2)	0,4288	0,2965	1,4464
		GARCH(3)	-0,5749	0,1464	-3,9275
		ARCH(1)	0,0989	0,0260	3,8004
		ARCH(2)	-0,0286	0,0408	-0,7005
		ARCH(3)	-0,0470	0,0298	-1,5775
		Alavancagem(1)	-0,1534	0,0179	-8,5741
		Alavancagem(2)	-0,0416	0,0293	-1,4197
		Alavancagem(3)	0,1758	0,0247	7,1173
MA(1)+EGARCH(3,3)	(d)	Constante	0,0001	0,0002	0,5022
		MA(1)	-0,0285	0,0194	-1,4647
		Constante	-0,0261	0,0090	-2,8941
		GARCH(1)	1,1339	0,1507	7,5247
		GARCH(2)	0,4530	0,2847	1,5911
		GARCH(3)	-0,5899	0,1410	-4,1848
		ARCH(1)	0,0982	0,0260	3,7715
		ARCH(2)	-0,0303	0,0405	-0,7481
		ARCH(3)	-0,0452	0,0294	-1,5385
		Alavancagem(1)	-0,1546	0,0179	-8,6330
		Alavancagem(2)	-0,0420	0,0285	-1,4718
		Alavancagem(3)	0,1778	0,0238	7,4592
ARMA(1,3)+EGARCH(2,3)	(e)	Constante	0,0001	0,0002	0,7485
		AR(1)	-0,0357	0,0188	-1,8937
		MA(3)	-0,0320	0,0175	-1,8269
		Constante	-0,1418	0,0343	-4,1407
		GARCH(1)	1,0617	0,1670	6,3575
		GARCH(2)	-0,0779	0,1637	-0,4761
		ARCH(1)	0,0520	0,0266	1,9561
		ARCH(2)	0,0392	0,0352	1,1163
		ARCH(3)	0,0085	0,0327	0,2594
		Alavancagem(1)	-0,1768	0,0181	-9,7660
		Alavancagem(2)	-0,0473	0,0441	-1,0710
		Alavancagem(3)	0,1282	0,0247	5,1884

Tabela 37 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Canadá (GSPTSE).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
GARCH(1,1) (a)	Constante	0,0000	0,0000	4,0868
	GARCH(1)	0,9195	0,0061	150,6320
	ARCH(1)	0,0672	0,0054	12,3589
EGARCH(2,2) (b)	Constante	-0,0287	0,0086	-3,3215
	GARCH(1)	1,7388	0,0591	29,4384
	GARCH(2)	-0,7421	0,0582	-12,7457
	ARCH(1)	0,0833	0,0227	3,6618
	ARCH(2)	-0,0532	0,0262	-2,0311
	Alavancagem(1)	-0,1627	0,0161	-10,1182
	Alavancagem(2)	0,1509	0,0143	10,5263
AR(3)+EGARCH(2,2) (c)	Constante	0,0004	0,0002	2,2996
	AR(3)	-0,0269	0,0187	-1,4371
	Constante	-0,0269	0,0083	-3,2296
	GARCH(1)	1,7452	0,0587	29,7237
	GARCH(2)	-0,7483	0,0579	-12,9196
	ARCH(1)	0,0865	0,0223	3,8717
	ARCH(2)	-0,0569	0,0259	-2,2008
	Alavancagem(1)	-0,1592	0,0166	-9,6149
MA(3)+EGARCH(2,2) (d)	Constante	0,0004	0,0002	2,3527
	MA(3)	-0,0266	0,0187	-1,4211
	Constante	-0,0277	0,0086	-3,2398
	GARCH(1)	1,7359	0,0612	28,3813
	GARCH(2)	-0,7391	0,0604	-12,2469
	ARCH(1)	0,0872	0,0225	3,8691
	ARCH(2)	-0,0564	0,0262	-2,1553
	Alavancagem(1)	-0,1604	0,0167	-9,5843
ARMA(4,3)+EGARCH(2,2) (e)	Constante	0,0004	0,0002	2,4057
	AR(4)	-0,0402	0,0181	-2,2196
	MA(3)	-0,0310	0,0189	-1,6414
	Constante	-0,0281	0,0086	-3,2718
	GARCH(1)	1,7423	0,0584	29,8366
	GARCH(2)	-0,7455	0,0576	-12,9477
	ARCH(1)	0,0893	0,0225	3,9663
	ARCH(2)	-0,0593	0,0262	-2,2638
	Alavancagem(1)	-0,1591	0,0167	-9,5460
Alavancagem(2)	0,1488	0,0149	9,9569	

Tabela 38 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Austrália (AORD).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
GARCH(1,1) (a)	Constante	0,0000	0,0000	4,6076
	GARCH(1)	0,8730	0,0097	89,5904
	ARCH(1)	0,1182	0,0088	13,3936
EGARCH(7,5) (b)	Constante	-0,0309	0,0116	-2,6596
	GARCH(1)	0,3604	0,0820	4,3978
	GARCH(2)	0,4075	0,0736	5,5350
	GARCH(3)	0,7345	0,0664	11,0640
	GARCH(4)	0,2346	0,1200	1,9558
	GARCH(5)	-0,4231	0,0629	-6,7264
	GARCH(6)	-0,5943	0,0608	-9,7714
	GARCH(7)	0,2769	0,0784	3,5333
	ARCH(1)	0,1562	0,0266	5,8829
	ARCH(2)	0,0677	0,0279	2,4284
	ARCH(3)	-0,0310	0,0207	-1,4944
	ARCH(4)	-0,0577	0,0280	-2,0614
	ARCH(5)	-0,0958	0,0277	-3,4552
	Alavancagem(1)	-0,2225	0,0202	-11,0170
	Alavancagem(2)	-0,0664	0,0243	-2,7331
Alavancagem(3)	-0,0285	0,0145	-1,9673	
Alavancagem(4)	0,1105	0,0171	6,4703	
Alavancagem(5)	0,1870	0,0291	6,4190	
AR(4)+EGARCH(2,2) (c)	Constante	0,0003	0,0002	2,1568
	AR(4)	0,0002	0,0177	0,0102
	Constante	-0,6655	0,0724	-9,1918
	GARCH(1)	0,0185	0,0390	0,4754
	GARCH(2)	0,9090	0,0366	24,8427
	ARCH(1)	0,2048	0,0206	9,9270
	ARCH(2)	0,1419	0,0258	5,5078
	Alavancagem(1)	-0,1590	0,0094	-16,9472
Alavancagem(2)	-0,1548	0,0122	-12,6509	

Continua na próxima página

Tabela 38 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
MA(1)+EGARCH(2,2)	(d)	Constante	0,0003	0,0001	2,0166
		MA1	0,0020	0,0180	0,1110
		Constante	-0,0136	0,0035	-3,9181
		GARCH(1)	1,8142	0,0253	71,7780
		GARCH(2)	-0,8157	0,0250	-32,6109
		ARCH(1)	0,1134	0,0219	5,1781
		ARCH(2)	-0,0992	0,0219	-4,5316
		Alavancagem(1)	-0,2478	0,0130	-19,0633
		Alavancagem(2)	0,2380	0,0121	19,6422
ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	(e)	Constante	0,0004	0,0002	2,2945
		AR(4)	-0,0250	0,0181	-1,3806
		MA(3)	0,0009	0,0174	0,0509
		Constante	-0,0136	0,0034	-3,9578
		GARCH(1)	1,8107	0,0251	72,0915
		GARCH(2)	-0,8122	0,0249	-32,6615
		ARCH(1)	0,1162	0,0221	5,2671
		ARCH(2)	-0,1019	0,0221	-4,6093
		Alavancagem(1)	-0,2497	0,0132	-18,8544
Alavancagem(2)	0,2399	0,0124	19,4083		

Tabela 39 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Malásia (KLSE).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	1,7462
		GARCH(1)	0,9512	0,0016	587,1920
		ARCH(1)	0,0488	0,0023	21,0170
EGARCH(6,7)	(b)	Constante	-0,1019	0,0290	-3,5173
		GARCH(1)	0,8009	0,1273	6,2902
		GARCH(2)	-0,5773	0,0953	-6,0571
		GARCH(3)	0,6232	0,0671	9,2887
		GARCH(4)	-0,7743	0,0719	-10,7686
		GARCH(5)	1,0000	0,0962	10,3948

Continua na próxima página

Tabela 39 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
	GARCH(6)	-0,0873	0,1208	-0,7224
	ARCH(1)	0,2738	0,0301	9,1086
	ARCH(2)	0,0161	0,0445	0,3615
	ARCH(3)	0,1412	0,0253	5,5928
	ARCH(4)	0,0247	0,0367	0,6732
	ARCH(5)	0,1836	0,0277	6,6367
	ARCH(6)	-0,1437	0,0419	-3,4297
	ARCH(7)	-0,1272	0,0333	-3,8137
	Alavancagem(1)	-0,0127	0,0192	-0,6635
	Alavancagem(2)	-0,1251	0,0243	-5,1561
	Alavancagem(3)	0,0542	0,0194	2,7910
	Alavancagem(4)	-0,0510	0,0162	-3,1433
	Alavancagem(5)	0,0300	0,0191	1,5660
	Alavancagem(6)	-0,1006	0,0247	-4,0752
	Alavancagem(7)	0,0951	0,0181	5,2558
	Constante	0,0003	0,0002	1,8586
	AR(1)	0,1107	0,0208	5,3136
AR(1)+EGARCH(2,3) (c)	Constante	-0,0014	0,0015	-0,9319
	GARCH(1)	1,6876	0,0434	38,9096
	GARCH(2)	-0,6880	0,0433	-15,8962
	ARCH(1)	0,2970	0,0257	11,5471
	ARCH(2)	-0,2875	0,0483	-5,9552
	ARCH(3)	0,0146	0,0294	0,4968
	Alavancagem(1)	0,0255	0,0166	1,5347
	Alavancagem(2)	-0,1762	0,0291	-6,0471
	Alavancagem(3)	0,1461	0,0163	8,9565
		Constante	0,0003	0,0002
	MA(1)	0,0966	0,0206	4,6876
MA(1)+EGARCH(3,4) (d)	Constante	-0,0006	0,0016	-0,4078
	GARCH(1)	1,1465	0,2323	4,9357
	GARCH(2)	0,3537	0,4261	0,8300
	GARCH(3)	-0,5005	0,1977	-2,5311
	ARCH(1)	0,2952	0,0265	11,1438
	ARCH(2)	-0,1296	0,0787	-1,6470
	ARCH(3)	-0,1828	0,0735	-2,4889
	ARCH(4)	0,0418	0,0288	1,4524
	Alavancagem(1)	0,0229	0,0164	1,3952

Continua na próxima página

Tabela 39 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
ARMA(2,1)+EGARCH(4,4) (e)	Alavancagem(2)	-0,1255	0,0225	-5,5878
	Alavancagem(3)	-0,0256	0,0332	-0,7712
	Alavancagem(4)	0,1244	0,0283	4,3980
	Constant	0,0003	0,0002	1,4792
	AR(2)	0,0613	0,0184	3,3219
	MA(1)	0,1031	0,0206	5,0049
	Constante	-0,0013	0,0018	-0,7491
	GARCH(1)	1,2054	0,1254	9,6098
	GARCH(2)	-0,0263	0,2548	-0,1032
	GARCH(3)	0,0672	0,2254	0,2982
	GARCH(4)	-0,2467	0,0941	-2,6227
	ARCH(1)	0,2900	0,0256	11,3174
	ARCH(2)	-0,1111	0,0533	-2,0842
	ARCH(3)	-0,1572	0,0585	-2,6867
	ARCH(4)	0,0050	0,0403	0,1249
	Alavancagem(1)	0,0187	0,0161	1,1582
	Alavancagem(2)	-0,1167	0,0251	-4,6446
Alavancagem(3)	-0,0340	0,0346	-0,9823	
Alavancagem(4)	0,1273	0,0237	5,3782	

Tabela 40 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (HSI).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
GARCH(1,2) (a)	Constante	0,0000	0,0000	3,1179
	GARCH(1)	0,9091	0,0072	126,0920
	ARCH(1)	0,0229	0,0107	2,1421
	ARCH(2)	0,0646	0,0141	4,5811
EGARCH(2,3) (b)	Constante	-0,0176	0,0049	-3,5654
	GARCH(1)	1,7685	0,0327	54,0775
	GARCH(2)	-0,7708	0,0323	-23,8379
	ARCH(1)	-0,0662	0,0269	-2,4601
	ARCH(2)	0,2499	0,0518	4,8235
	ARCH(3)	-0,1522	0,0306	-4,9686
	Alavancagem(1)	-0,0976	0,0194	-5,0259

Continua na próxima página

Tabela 40 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
AR(1)+EGARCH(2,3)	(c)	Alavancagem(2)	0,0029	0,0405	0,0718
		Alavancagem(3)	0,0895	0,0238	3,7669
		Constante	0,0004	0,0002	1,5560
	(c)	AR(1)	0,0245	0,0160	1,5276
		Constante	-0,0152	0,0045	-3,4158
		GARCH(1)	1,7838	0,0312	57,1885
		GARCH(2)	-0,7858	0,0309	-25,4585
		ARCH(1)	-0,0680	0,0268	-2,5406
		ARCH(2)	0,2585	0,0518	4,9943
		ARCH(3)	-0,1618	0,0304	-5,3211
		Alavancagem(1)	-0,1004	0,0194	-5,1844
		Alavancagem(2)	0,0098	0,0405	0,2422
		Alavancagem(3)	0,0867	0,0239	3,6301
MA(1)+EGARCH(2,3)	(d)	Constante	0,0004	0,0003	1,6264
		MA(1)	0,0243	0,0160	1,5199
		Constante	-0,0162	0,0046	-3,4989
	(d)	GARCH(1)	1,7766	0,0319	55,7241
		GARCH(2)	-0,7787	0,0315	-24,6840
		ARCH(1)	-0,0687	0,0266	-2,5857
		ARCH(2)	0,2567	0,0512	5,0096
		ARCH(3)	-0,1576	0,0303	-5,2055
		Alavancagem(1)	-0,1045	0,0192	-5,4318
		Alavancagem(2)	0,0156	0,0403	0,3879
Alavancagem(3)	0,0845	0,0239	3,5419		
ARMA(3,1)+EGARCH(2,3)	(e)	Constante	0,0004	0,0003	1,5303
		AR(3)	0,0167	0,0170	0,9778
		MA(1)	0,0246	0,0161	1,5298
	(e)	Constante	-0,0158	0,0045	-3,4689
		GARCH(1)	1,7820	0,0314	56,6648
		GARCH(2)	-0,7840	0,0311	-25,1991
		ARCH(1)	-0,0712	0,0267	-2,6695
		ARCH(2)	0,2618	0,0516	5,0697
		ARCH(3)	-0,1611	0,0304	-5,3003
		Alavancagem(1)	-0,1053	0,0192	-5,4871
Alavancagem(2)	0,0173	0,0401	0,4326		
Alavancagem(3)	0,0837	0,0237	3,5348		

Tabela 41 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (SSE).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	5,9140
		GARCH(1)	0,9178	0,0050	184,4780
		ARCH(1)	0,0701	0,0050	13,9941
EGARCH(2,2)	(b)	Constante	-0,0375	0,0098	-3,8108
		GARCH(1)	1,7475	0,0561	31,1290
		GARCH(2)	-0,7524	0,0550	-13,6743
		ARCH(1)	0,1418	0,0138	10,2534
		ARCH(2)	-0,1037	0,0153	-6,7936
		Alavancagem(1)	-0,1148	0,0142	-8,0826
		Alavancagem(2)	0,1144	0,0137	8,3803
AR(3)+EGARCH(2,2)	(c)	Constante	0,0002	0,0003	0,9705
		AR(3)	0,0289	0,0172	1,6768
		Constante	-0,0350	0,0093	-3,7684
		GARCH(1)	1,7615	0,0531	33,1932
		GARCH(2)	-0,7661	0,0520	-14,7265
		ARCH(1)	0,1467	0,0143	10,2709
		ARCH(2)	-0,1102	0,0156	-7,0563
		Alavancagem(1)	-0,1140	0,0140	-8,1378
MA(3)+EGARCH(2,2)	(d)	Constante	0,0002	0,0003	0,9469
		MA(3)	0,0290	0,0173	1,6745
		Constante	-0,0363	0,0097	-3,7248
		GARCH(1)	1,7538	0,0555	31,6003
		GARCH(2)	-0,7586	0,0544	-13,9449
		ARCH(1)	0,1464	0,0146	10,0604
		ARCH(2)	-0,1090	0,0159	-6,8411
		Alavancagem(1)	-0,1149	0,0143	-8,0661
ARMA(3,2)+EGARCH(2,2)	(e)	Constante	0,0002	0,0003	0,6513
		AR(3)	0,0297	0,0172	1,7261
		MA(2)	0,0298	0,0175	1,6975
		Constante	-0,0356	0,0095	-3,7417
		GARCH(1)	1,7600	0,0540	32,5743
		GARCH(2)	-0,7647	0,0530	-14,4406
		ARCH(1)	0,1454	0,0144	10,0879
		ARCH(2)	-0,1089	0,0158	-6,9087
	Alavancagem(1)	-0,1163	0,0142	-8,1931	
	Alavancagem(2)	0,1160	0,0137	8,4959	

Tabela 42 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Japão (N225).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
GARCH(1,1) (a)	Constante	0,0000	0,0000	7,3092
	GARCH(1)	0,8754	0,0105	83,4913
	ARCH(1)	0,0981	0,0080	12,2625
EGARCH(2,2) (b)	Constante	-0,0748	0,0245	-3,0502
	GARCH(1)	1,7301	0,0723	23,9202
	GARCH(2)	-0,7392	0,0697	-10,6038
	ARCH(1)	0,0921	0,0238	3,8685
	ARCH(2)	-0,0421	0,0327	-1,2879
	Alavancagem(1)	-0,1503	0,0154	-9,7424
	Alavancagem(2)	0,1319	0,0132	9,9738
AR(1)+EGARCH(2,2) (c)	Constante	0,0000	0,0003	-0,1606
	AR(1)	-0,0205	0,0186	-1,0966
	Constante	-0,0820	0,0271	-3,0298
	GARCH(1)	1,7047	0,0806	21,1559
	GARCH(2)	-0,7146	0,0777	-9,2009
	ARCH(1)	0,0897	0,0243	3,6904
	ARCH(2)	-0,0355	0,0341	-1,0417
	Alavancagem(1)	-0,1513	0,0157	-9,6276
MA(1)+EGARCH(2,2) (d)	Constante	0,0000	0,0002	-0,1797
	MA(1)	-0,0198	0,0186	-1,0598
	Constante	-0,0863	0,0283	-3,0494
	GARCH(1)	1,6877	0,0849	19,8750
	GARCH(2)	-0,6982	0,0819	-8,5275
	ARCH(1)	0,0875	0,0245	3,5676
	ARCH(2)	-0,0305	0,0347	-0,8772
	Alavancagem(1)	-0,1540	0,0160	-9,6224
ARMA(4,4)+EGARCH(2,2) (e)	Constante	-0,0002	0,0004	-0,4173
	AR(4)	-0,6921	0,2006	-3,4507
	MA(4)	0,7128	0,1952	3,6518
	Constante	-0,0704	0,0232	-3,0394
	GARCH(1)	1,7560	0,0666	26,3486
	GARCH(2)	-0,7646	0,0641	-11,9185
	ARCH(1)	0,0933	0,0236	3,9491
	ARCH(2)	-0,0473	0,0320	-1,4776
	Alavancagem(1)	-0,1444	0,0149	-9,6909
Alavancagem(2)	0,1270	0,0129	9,8446	

Tabela 43 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série França (FCHI).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t
GARCH(1,1) (a)	Constante	0,0000	0,0000	3,7088
	GARCH(1)	0,9071	0,0074	122,7300
	ARCH(1)	0,0834	0,0064	12,9957
EGARCH(3,3) (b)	Constante	-0,0242	0,0081	-2,9744
	GARCH(1)	1,3565	0,2190	6,1945
	GARCH(2)	0,0234	0,3978	0,0588
	GARCH(3)	-0,3828	0,1811	-2,1139
	ARCH(1)	-0,0529	0,0356	-1,4850
	ARCH(2)	0,1422	0,0630	2,2568
	ARCH(3)	-0,0538	0,0379	-1,4191
	Alavancagem(1)	-0,1744	0,0210	-8,3183
	Alavancagem(2)	0,0103	0,0527	0,1954
	Alavancagem(3)	0,1511	0,0443	3,4133
AR(1)+EGARCH(3,3) (c)	Constante	0,0000	0,0002	-0,2047
	AR(1)	-0,0297	0,0167	-1,7747
	Constante	-0,0255	0,0084	-3,0328
	GARCH(1)	1,2615	0,1977	6,3800
	GARCH(2)	0,2007	0,3560	0,5636
	GARCH(3)	-0,4653	0,1609	-2,8920
	ARCH(1)	-0,0649	0,0353	-1,8359
	ARCH(2)	0,1650	0,0628	2,6258
	ARCH(3)	-0,0628	0,0393	-1,5966
	Alavancagem(1)	-0,1824	0,0204	-8,9296
MA(2)+EGARCH(3,3) (d)	Constante	0,0000	0,0002	-0,1240
	MA(2)	-0,0223	0,0176	-1,2690
	Constant	-0,0274	0,0085	-3,2086
	GARCH(1)	1,1955	0,1771	6,7495
	GARCH(2)	0,3111	0,3213	0,9683
	GARCH(3)	-0,5099	0,1473	-3,4621
	ARCH(1)	-0,0363	0,0343	-1,0574
	ARCH(2)	0,1107	0,0560	1,9759
	ARCH(3)	-0,0346	0,0342	-1,0136
	Alavancagem(1)	-0,1733	0,0210	-8,2488
ARMA(1,1)+EGARCH(3,3) (e)	Constante	0,0000	0,0000	0,6626
	AR(1)	0,7846	0,0997	7,8721
	MA(1)	-0,8175	0,0922	-8,8685
	Constante	-0,0261	0,0083	-3,1509
	GARCH(1)	1,2026	0,1688	7,1247
	GARCH(2)	0,2864	0,3045	0,9406
	GARCH(3)	-0,4922	0,1390	-3,5402
	ARCH(1)	-0,0471	0,0345	-1,3657
	ARCH(2)	0,1410	0,0589	2,3927
	ARCH(3)	-0,0525	0,0362	-1,4522
Alavancagem(1)	-0,1685	0,0205	-8,2319	
Alavancagem(2)	-0,0200	0,0410	-0,4887	
Alavancagem(3)	0,1763	0,0335	5,2679	

Tabela 44 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Suíça (SSMI).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	4,7979
		GARCH(1)	0,8602	0,0102	84,1883
		ARCH(1)	0,1226	0,0089	13,8442
EGARCH(5,4)	(b)	Constante	-0,3966	0,1700	-2,3330
		GARCH(1)	-0,0077	0,1974	-0,0390
		GARCH(2)	0,9624	0,1395	6,8996
		GARCH(3)	0,4585	0,1858	2,4675
		GARCH(4)	-0,5761	0,1671	-3,4469
		GARCH(5)	0,1176	0,1319	0,8912
		ARCH(1)	0,1176	0,0282	4,1698
		ARCH(2)	0,1439	0,0357	4,0279
		ARCH(3)	0,0372	0,0679	0,5480
		ARCH(4)	0,0155	0,0508	0,3059
		Alavancagem(1)	-0,1823	0,0182	-9,9962
		Alavancagem(2)	-0,1690	0,0304	-5,5641
		Alavancagem(3)	0,0423	0,0426	0,9928
Alavancagem(4)	0,1035	0,0301	3,4423		
AR(2)+EGARCH(4,4)	(c)	Constant	0,0001	0,0002	0,4818
		AR(2)	-0,0285	0,0175	-1,6309
		Constante	-0,0348	0,0130	-2,6824
		GARCH(1)	0,2100	0,0195	10,7889
		GARCH(2)	1,3504	0,0171	79,1951
		GARCH(3)	0,3116	0,0157	19,7934
		GARCH(4)	-0,8760	0,0196	-44,7912
		ARCH(1)	0,1243	0,0197	6,3009
		ARCH(2)	0,0649	0,0173	3,7574
		ARCH(3)	-0,0627	0,0173	-3,6249
		ARCH(4)	-0,0794	0,0229	-3,4739
		Alavancagem(1)	-0,1831	0,0147	-12,4505
		Alavancagem(2)	-0,1660	0,0130	-12,7365
		Alavancagem(3)	0,1558	0,0129	12,0415
		Alavancagem(4)	0,1777	0,0152	11,7262

Continua na próxima página

Tabela 44 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
MA(2)+EGARCH(4,4)	(d)	Constante	0,0001	0,0002	0,4830
		MA(2)	-0,0306	0,0174	-1,7605
		Constante	-0,0351	0,0130	-2,6958
		GARCH(1)	0,2097	0,0195	10,7570
		GARCH(2)	1,3501	0,0171	78,9939
		GARCH(3)	0,3117	0,0158	19,7677
		GARCH(4)	-0,8755	0,0196	-44,7055
		ARCH(1)	0,1238	0,0198	6,2597
		ARCH(2)	0,0646	0,0173	3,7379
		ARCH(3)	-0,0622	0,0174	-3,5844
		ARCH(4)	-0,0788	0,0229	-3,4423
		Alavancagem(1)	-0,1829	0,0147	-12,4319
		Alavancagem(2)	-0,1661	0,0130	-12,7368
		Alavancagem(3)	0,1557	0,0130	12,0111
		Alavancagem(4)	0,1777	0,0151	11,7274
		ARMA(4,4)+EGARCH(4,4)	(e)	Constante	0,0000
AR(4)	0,9489			0,0032	299,8160
MA(4)	-0,9918			0,0008	-1167,3600
Constante	-0,8333			0,0331	-25,1400
GARCH(1)	0,9000			0,0397	22,6920
ARCH(1)	0,2000			0,0395	5,0691
Alavancagem(1)	-0,0500			0,0236	-2,1205

Tabela 45 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Alemanha (GDAX).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constant	0,0000	0,0000	4,7083
		GARCH(1)	0,9036	0,0081	111,5620
		ARCH(1)	0,0833	0,0068	12,1728

Continua na próxima página

Tabela 45 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
EGARCH(2,2)	(b)	Constante	-0,0222	0,0057	-3,9015
		GARCH(1)	1,8145	0,0236	76,8694
		GARCH(2)	-0,8172	0,0232	-35,2771
		ARCH(1)	0,0672	0,0156	4,3183
		ARCH(2)	-0,0407	0,0168	-2,4268
		Alavancagem(1)	-0,1962	0,0114	-17,1950
		Alavancagem(2)	0,1890	0,0119	15,8160
AR(4)+EGARCH(2,2)	(c)	Constante	0,0003	0,0002	1,1480
		AR(4)	-0,0353	0,0176	-2,0077
		Constante	-0,0220	0,0056	-3,9209
		GARCH(1)	1,8146	0,0235	77,2450
		GARCH(2)	-0,8173	0,0231	-35,4156
		ARCH(1)	0,0674	0,0154	4,3807
		ARCH(2)	-0,0406	0,0165	-2,4591
		Alavancagem(2)	0,1868	0,0120	15,6339
MA(4)+EGARCH(2,2)	(d)	Constante	0,0002	0,0002	1,0540
		MA(4)	-0,0339	0,0177	-1,9220
		Constante	-0,0213	0,0054	-3,9450
		GARCH(1)	1,8206	0,0223	81,4656
		GARCH(2)	-0,8232	0,0220	-37,4914
		ARCH(1)	0,0647	0,0153	4,2326
		ARCH(2)	-0,0385	0,0165	-2,3348
		Alavancagem(2)	0,1862	0,0118	15,7206
ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	(e)	Constante	0,0004	0,0004	0,9410
		AR(4)	-0,8433	0,0580	-14,5473
		MA(4)	0,8182	0,0631	12,9730
		Constante	-0,0222	0,0057	-3,9050
		GARCH(1)	1,8136	0,0241	75,2107
		GARCH(2)	-0,8164	0,0237	-34,4689
		ARCH(1)	0,0678	0,0158	4,2993
		ARCH(2)	-0,0408	0,0169	-2,4109
		Alavancagem(1)	-0,1929	0,0116	-16,5675
		Alavancagem(2)	0,1858	0,0121	15,3432

Tabela 46 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Áustria (ATX).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	6,2104
		GARCH(1)	0,9053	0,0063	144,1120
		ARCH(1)	0,0780	0,0047	16,5649
EGARCH(5,5)	(b)	Constante	-0,0318	0,0247	-1,2892
		GARCH(1)	0,2008	0,8906	0,2254
		GARCH(2)	1,3532	0,5034	2,6879
		GARCH(3)	-0,0286	1,0100	-0,0283
		GARCH(4)	-0,4573	0,3481	-1,3138
		GARCH(5)	-0,0721	0,3044	-0,2369
		ARCH(1)	0,0815	0,0302	2,6945
		ARCH(2)	0,1500	0,0891	1,6843
		ARCH(3)	0,0527	0,1203	0,4379
		ARCH(4)	-0,1704	0,0437	-3,9013
		ARCH(5)	-0,0761	0,1629	-0,4669
		Alavancagem(1)	-0,1484	0,0206	-7,1893
		Alavancagem(2)	-0,1433	0,1271	-1,1275
		Alavancagem(3)	0,1315	0,0945	1,3916
		Alavancagem(4)	0,1374	0,1183	1,1612
Alavancagem(5)	0,0045	0,0859	0,0518		
AR(1)+EGARCH(2,2)	(c)	Constante	0,0006	0,0002	2,7733
		AR(1)	0,0256	0,0195	1,3146
		Constante	-0,0131	0,0038	-3,4124
		GARCH(1)	1,7823	0,0349	51,0255
		GARCH(2)	-0,7839	0,0346	-22,6800
		ARCH(1)	0,1647	0,0207	7,9585
		ARCH(2)	-0,1495	0,0210	-7,1291
		Alavancagem(1)	-0,1798	0,0172	-10,4520
Alavancagem(2)	0,1724	0,0161	10,6943		
MA(1)+EGARCH(2,2)	(d)	Constant	0,0006	0,0002	2,8033
		MA(1)	0,0248	0,0192	1,2924
		Constante	-0,0140	0,0041	-3,4184
		GARCH(1)	1,7942	0,0342	52,5036
		GARCH(2)	-0,7959	0,0338	-23,5701
		ARCH(1)	0,1620	0,0199	8,1409
		ARCH(2)	-0,1476	0,0202	-7,2944
		Alavancagem(1)	-0,1760	0,0166	-10,5992
Alavancagem(2)	0,1686	0,0155	10,8927		

Continua na próxima página

Tabela 46 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
ARMA(4,1)+EGARCH(2,2)	(e)	Constante	0,0007	0,0002	3,1426
		AR(4)	-0,0308	0,0178	-1,7315
		MA(1)	0,0226	0,0194	1,1670
	Constante	-0,0119	0,0036	-3,3515	
	GARCH(1)	1,7911	0,0329	54,3978	
	GARCH(2)	-0,7926	0,0326	-24,3206	
	ARCH(1)	0,1701	0,0204	8,3258	
	ARCH(2)	-0,1557	0,0206	-7,5768	
	Alavancagem(1)	-0,1780	0,0169	-10,5277	
	Alavancagem(2)	0,1712	0,0159	10,7719	

Tabela 47 – Estimativa dos parâmetros dos cinco modelos de variância condicional selecionados para a série de retornos logarítmicos com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Bélgica (BFX).

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
GARCH(1,1)	(a)	Constante	0,0000	0,0000	5,8679
		GARCH(1)	0,8739	0,0074	118,2450
		ARCH(1)	0,1101	0,0062	17,7403
EGARCH(2,2)	(b)	Constante	-0,5367	0,0889	-6,0367
		GARCH(1)	0,1970	0,2846	0,6923
		GARCH(2)	0,7398	0,2757	2,6831
		ARCH(1)	0,1723	0,0191	9,0286
		ARCH(2)	0,1388	0,0537	2,5831
		Alavancagem(1)	-0,1016	0,0150	-6,7568
		Alavancagem(2)	-0,1131	0,0248	-4,5577
AR(1)+EGARCH(1,1)	(c)	Constante	0,0003	0,0002	1,8166
		AR(1)	0,0454	0,0182	2,4925
		Constante	-0,2859	0,0266	-10,7506
		GARCH(1)	0,9667	0,0030	317,0150
		ARCH(1)	0,1742	0,0119	14,6026
		Alavancagem(1)	-0,1212	0,0078	-15,5631

Continua na próxima página

Tabela 47 – Continuação da página anterior

Modelo	Parâmetro	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t	
MA(1)+EGARCH(1,1)	(d)	Constante	0,0004	0,0002	1,8492
		MA(1)	0,0439	0,0183	2,3999
		Constante	-0,2861	0,0266	-10,7634
		GARCH(1)	0,9667	0,0030	317,2080
		ARCH(1)	0,1744	0,0119	14,6420
		Alavancagem(1)	-0,1209	0,0078	-15,5660
ARMA(3,4)+EGARCH(2,2)	(e)	Constante	0,0004	0,0002	2,0034
		AR(3)	-0,0174	0,0176	-0,9896
		MA(4)	-0,0215	0,0175	-1,2308
		Constante	-0,5243	0,0945	-5,5489
		GARCH(1)	0,1952	0,3089	0,6319
		GARCH(2)	0,7437	0,2995	2,4830
		ARCH(1)	0,1777	0,0192	9,2458
		ARCH(2)	0,1394	0,0593	2,3500
		Alavancagem(1)	-0,0979	0,0154	-6,3644
		Alavancagem(2)	-0,1072	0,0257	-4,1660

APÊNDICE B – Testes Q_{PB} , LM e JB aplicados aos resíduos padronizados dos modelos ajustados com função de inovação gaussiana.

Tabela 48 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Brasil (BVSP).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	$Q_{PB}^{(a)}$	v.c. ^(b)	$LM^{(c)}$	v.c	$JB^{(d)}$	v.c
(a) GARCH(1,1)	27,6421	31,4104	0,0136	3,8415	1102,5571	5,9739
(b) EGARCH(2,2)	27,5247	31,4104	0,1469	3,8415	511,8494	5,9739
(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	26,7006	31,4104	0,1703	3,8415	513,3997	5,9739
(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	26,6918	31,4104	0,1872	3,8415	514,5819	5,9739
(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	26,7711	31,4104	0,1554	3,8415	498,8186	5,9739

^(a) Teste de autocorrelação, ^(b) Valor crítico, ^(c) Teste de heterocedasticidade, ^(d) Teste de normalidade.

Tabela 49 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série México (MXX).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	39,1696	31,4104	0,2024	3,8415	1476,7706	5,9739
(b) EGARCH(3,3)	43,0738	31,4104	0,8132	3,8415	487,0248	5,9739
(c) AR(3)+EGARCH(4,4)	36,3389	31,4104	0,0056	3,8415	435,8109	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(2,3)	20,0155	31,4104	0,2704	3,8415	515,1078	5,9739
(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,3)	19,8160	31,4104	0,2684	3,8415	512,6657	5,9739

Tabela 50 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (IXIC).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	21,9397	31,4104	1,2996	3,8415	360,3560	5,9739
(b) EGARCH(2,2)	22,7210	31,4104	1,5220	3,8415	276,8554	5,9739
(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	21,0902	31,4104	1,2235	3,8415	278,4930	5,9739
(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	21,0797	31,4104	1,3476	3,8415	277,7518	5,9739
(e) ARMA(3,3)+EGARCH(2,3)	25,5822	31,4104	1,4936	3,8415	234,7131	5,9739

Tabela 51 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (GSPC).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,2)	33,1295	31,4104	0,5526	3,8415	435,4194	5,9739
(b) EGARCH(2,3)	31,7793	31,4104	0,1752	3,8415	409,9807	5,9739
(c) AR(4)+EGARCH(2,3)	31,4415	31,4104	0,2257	3,8415	418,5007	5,9739
(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	26,0517	31,4104	2,7050	3,8415	408,2778	5,9739
(e) ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	23,1089	31,4104	2,6234	3,8415	428,7251	5,9739

Tabela 52 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série EUA (DJI).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	27,0585	31,4104	0,4643	3,8415	527,3402	5,9739
(b) EGARCH(2,3)	27,5724	31,4104	0,1079	3,8415	348,3832	5,9739
(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	23,1894	31,4104	0,0909	3,8415	311,8754	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(3,3)	23,3905	31,4104	0,0885	3,8415	308,6665	5,9739
(e) ARMA(1,3)+EGARCH(2,3)	19,3647	31,4104	0,1076	3,8415	359,6821	5,9739

Tabela 53 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Canadá (GSPTSE).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	25,5934	31,4104	0,0091	3,8415	1185,332	5,9739
(b) EGARCH(2,2)	27,1519	31,4104	0,2825	3,8415	681,1107	5,9739
(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	24,3295	31,4104	0,325	3,8415	677,6572	5,9739
(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	24,2353	31,4104	0,3453	3,8415	678,7734	5,9739
(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	22,5679	31,4104	0,2987	3,8415	668,2501	5,9739

Tabela 54 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Austrália (AORD).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	16,3399	31,4104	0,2839	3,8415	11302,4803	5,9739
(b) EGARCH(7,5)	18,6631	31,4104	0,2227	3,8415	357,2519	5,9739
(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	15,5754	31,4104	0,0909	3,8415	1203,3264	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	16,7003	31,4104	0,1838	3,8415	1269,3110	5,9739
(e) ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	18,0307	31,4104	0,1665	3,8415	1268,1179	5,9739

Tabela 55 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Malásia (KLSE).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	78,5898	31,4104	0,3763	3,8415	14541,1247	5,9739
(b) EGARCH(6,7)	78,9491	31,4104	0,2484	3,8415	3383,6912	5,9739
(c) AR(1)+EGARCH(2,3)	27,5941	31,4104	0,1046	3,8415	13562,5238	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(3,4)	33,0756	31,4104	0,1207	3,8415	13462,1202	5,9739
(e) ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)	23,2603	31,4104	0,0776	3,8415	14303,9232	5,9739

Tabela 56 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (HSI).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,2)	21,2087	31,4104	0,1447	3,8415	560,6742	5,9739
(b) EGARCH(2,3)	22,7728	31,4104	0,0106	3,8415	310,9799	5,9739
(c) AR(1)+EGARCH(2,3)	19,4753	31,4104	0,0473	3,8415	303,7318	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(2,3)	19,4188	31,4104	0,0477	3,8415	309,9754	5,9739
(e) ARMA(3,1)+EGARCH(2,3)	16,9242	31,4104	0,0508	3,8415	308,5930	5,9739

Tabela 57 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série China (SSE).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	51,1226	31,4104	0,0139	3,8415	1237,1573	5,9739
(b) EGARCH(2,2)	60,5940	31,4104	0,0219	3,8415	1056,9733	5,9739
(c) AR(3)+EGARCH(2,2)	56,6108	31,4104	0,0179	3,8415	1047,9398	5,9739
(d) MA(3)+EGARCH(2,2)	56,6821	31,4104	0,0193	3,8415	1046,2364	5,9739
(e) ARMA(3,2)+EGARCH(2,2)	50,3984	31,4104	0,0293	3,8415	1041,1402	5,9739

Tabela 58 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Japão (N225).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	34,4665	31,4104	0,1044	3,8415	273,3833	5,9739
(b) EGARCH(2,2)	34,6963	31,4104	0,0260	3,8415	154,6502	5,9739
(c) AR(1)+EGARCH(2,2)	33,4165	31,4104	0,0562	3,8415	160,1913	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	33,4180	31,4104	0,0646	3,8415	162,0409	5,9739
(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	31,0910	31,4104	0,0409	3,8415	156,2190	5,9739

Tabela 59 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série França (FCHI).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	23,2745	31,4104	1,1824	3,8415	208,5331	5,9739
(b) EGARCH(3,3)	23,4856	31,4104	0,0009	3,8415	73,4444	5,9739
(c) AR(1)+EGARCH(3,3)	24,3486	31,4104	0,0232	3,8415	75,0823	5,9739
(d) MA(2)+EGARCH(3,3)	20,9495	31,4104	0,1253	3,8415	74,0457	5,9739
(e) ARMA(1,1)+EGARCH(3,3)	21,3601	31,4104	0,0032	3,8415	76,6049	5,9739

Tabela 60 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Suíça (SSMI).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	20,3659	31,4104	0,2792	3,8415	345,9463	5,9739
(b) EGARCH(5,4)	21,8170	31,4104	0,0440	3,8415	96,9412	5,9739
(c) AR(2)+EGARCH(4,4)	15,6775	31,4104	0,7724	3,8415	145,5651	5,9739
(d) MA(2)+EGARCH(4,4)	15,5892	31,4104	0,7759	3,8415	145,6612	5,9739
(e) ARMA(4,4)+EGARCH(4,4)	584,2991	31,4104	0,2282	3,8415	231,7614	5,9739

Tabela 61 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Alemanha (GDAX).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	16,7084	31,4104	2,3704	3,8415	363,6094	5,9739
(b) EGARCH(2,2)	14,0516	31,4104	4,8890	3,8415	253,0828	5,9739
(c) AR(4)+EGARCH(2,2)	12,3979	31,4104	5,2275	3,8415	255,1090	5,9739
(d) MA(4)+EGARCH(2,2)	12,4413	31,4104	5,0056	3,8415	251,1448	5,9739
(e) ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	10,2602	31,4104	4,7545	3,8415	244,0179	5,9739

Tabela 62 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Áustria (ATX).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	25,4569	31,4104	0,1019	3,8415	1967,0037	5,9739
(b) EGARCH(5,5)	30,2694	31,4104	0,0074	3,8415	560,6119	5,9739
(c) AR(1)+EGARCH(2,2)	19,6164	31,4104	1,7863	3,8415	668,6577	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(2,2)	19,5985	31,4104	1,7447	3,8415	659,3920	5,9739
(e) ARMA(4,1)+EGARCH(2,2)	20,7780	31,4104	1,9745	3,8415	652,8316	5,9739

Tabela 63 – Testes de não autocorrelação (Q_{PB}), de não heterocedasticidade (LM) e de normalidade (JB) aplicados aos resíduos padronizados dos cinco modelos de variância condicional com função de inovação Gaussiana para as inovações: série Bélgica (BFX).

Modelo	Autocorrelação		Heterocedasticidade		Normalidade	
	Q_{PB}	v.c	LM	v.c	JB	v.c
(a) GARCH(1,1)	33,7963	31,4104	10,3200	3,8415	649,6572	5,9739
(b) EGARCH(2,2)	31,6521	31,4104	4,7408	3,8415	497,9344	5,9739
(c) AR(1)+EGARCH(1,1)	17,3905	31,4104	2,5076	3,8415	490,3319	5,9739
(d) MA(1)+EGARCH(1,1)	17,7611	31,4104	2,5299	3,8415	491,2133	5,9739
(e) ARMA(3,4)+EGARCH(2,2)	27,2868	31,4104	4,5219	3,8415	505,7002	5,9739

APÊNDICE C – Quantis empíricos dos resíduos padronizados (pontos na cor azul) versus os quantis da distribuição normal padrão (linha na cor vermelha).

Figura 30 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Brasil (BVSP).

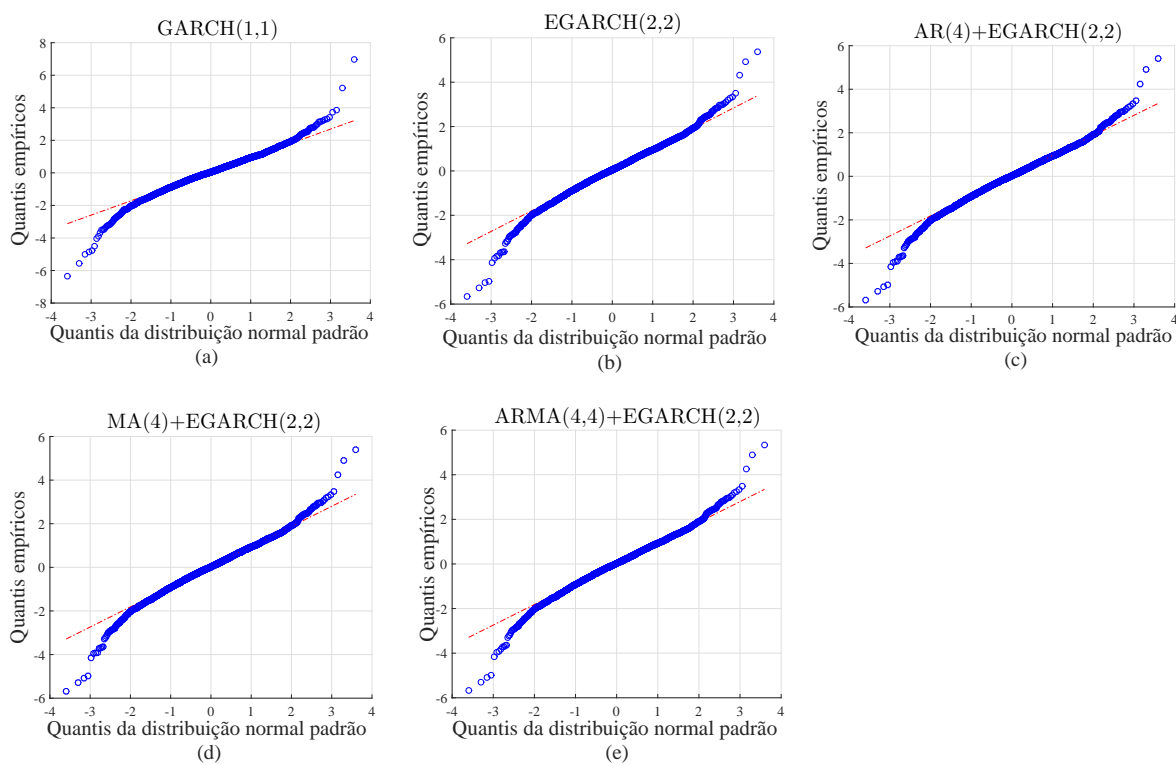


Figura 31 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para México (MXX).

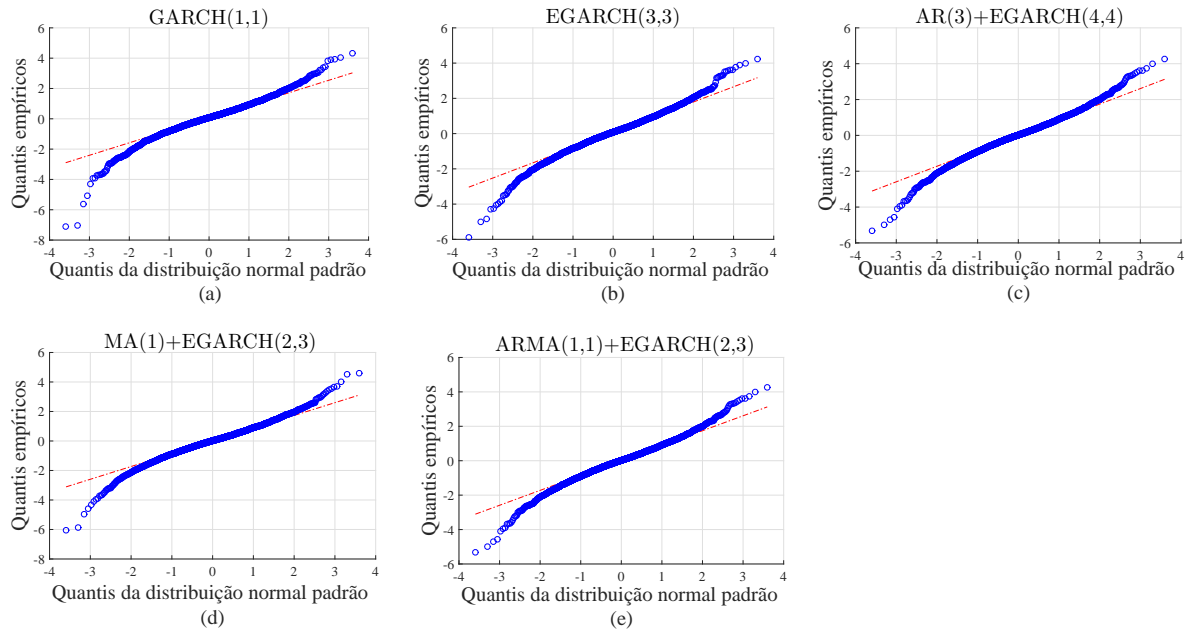


Figura 32 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para EUA (IXIC).

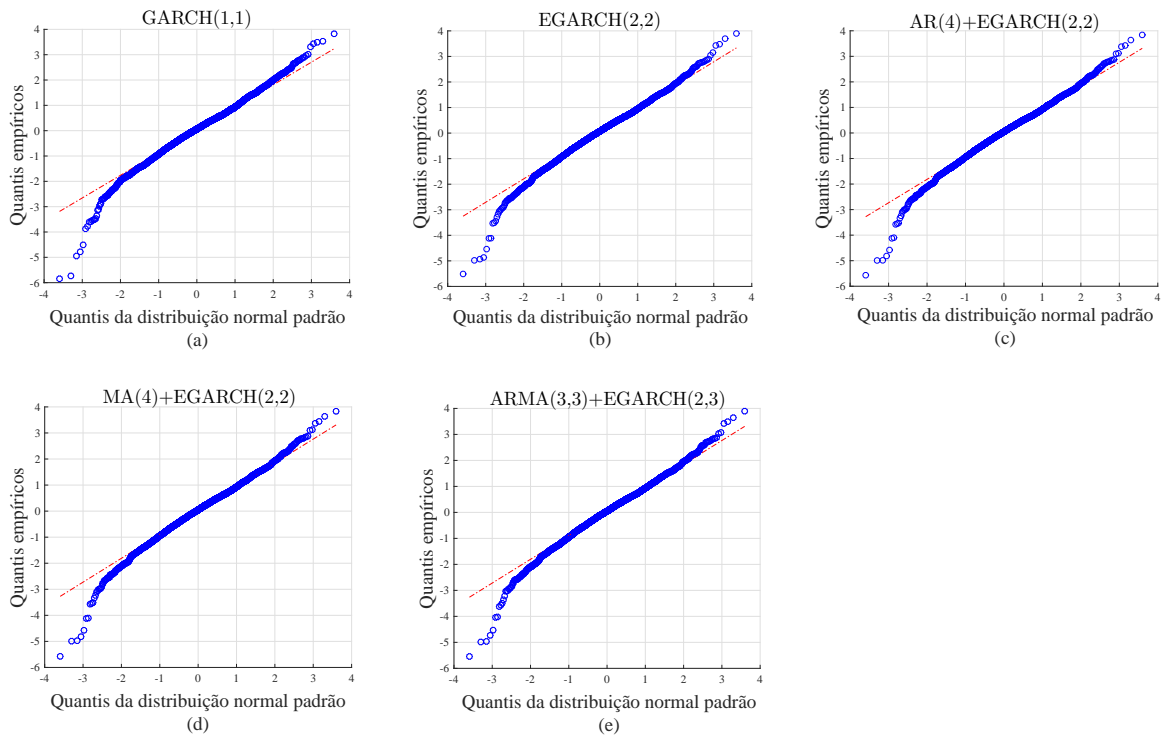


Figura 33 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para EUA (GSPC).

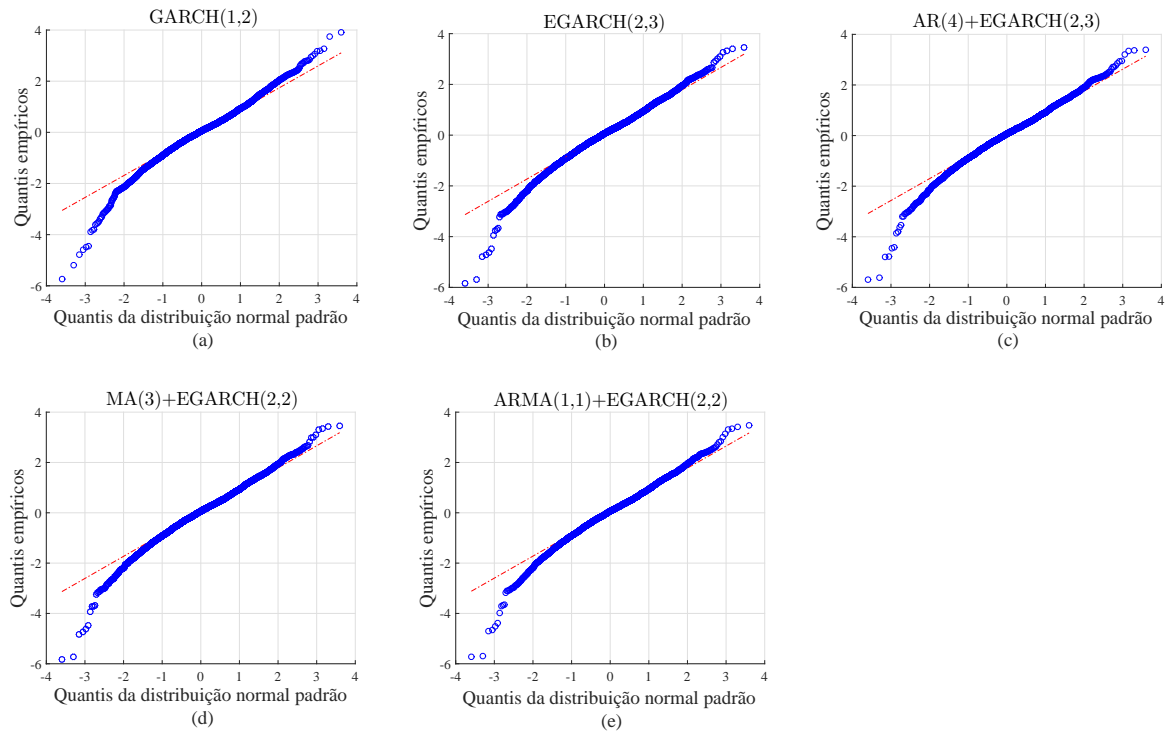


Figura 34 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para EUA (DJI).

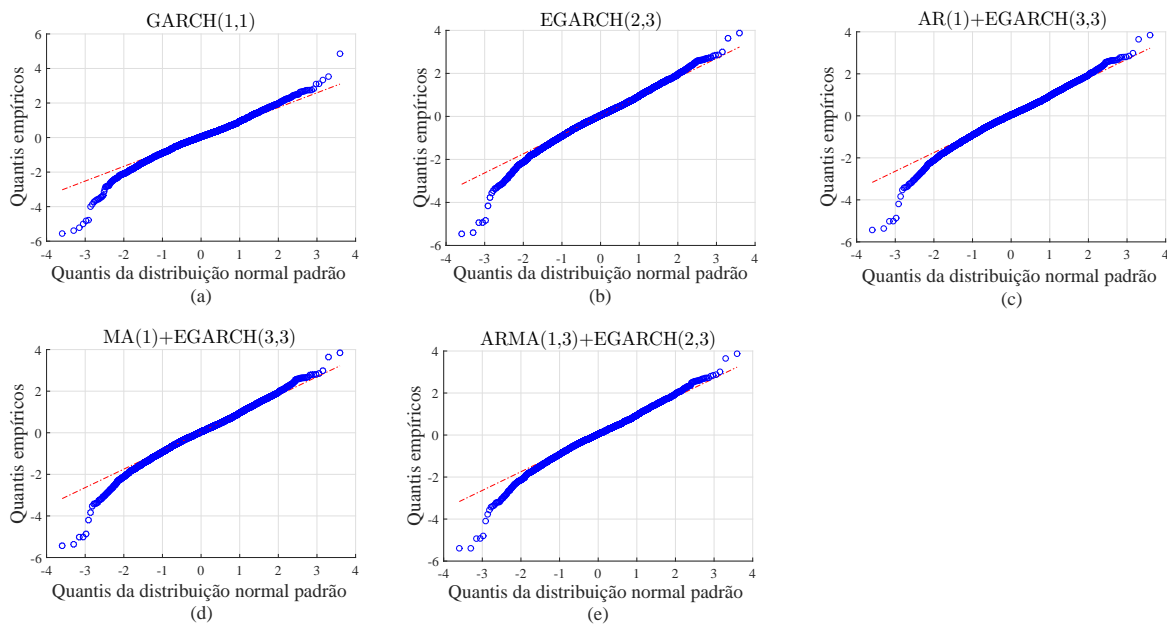


Figura 35 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Canadá (GSPTSE).

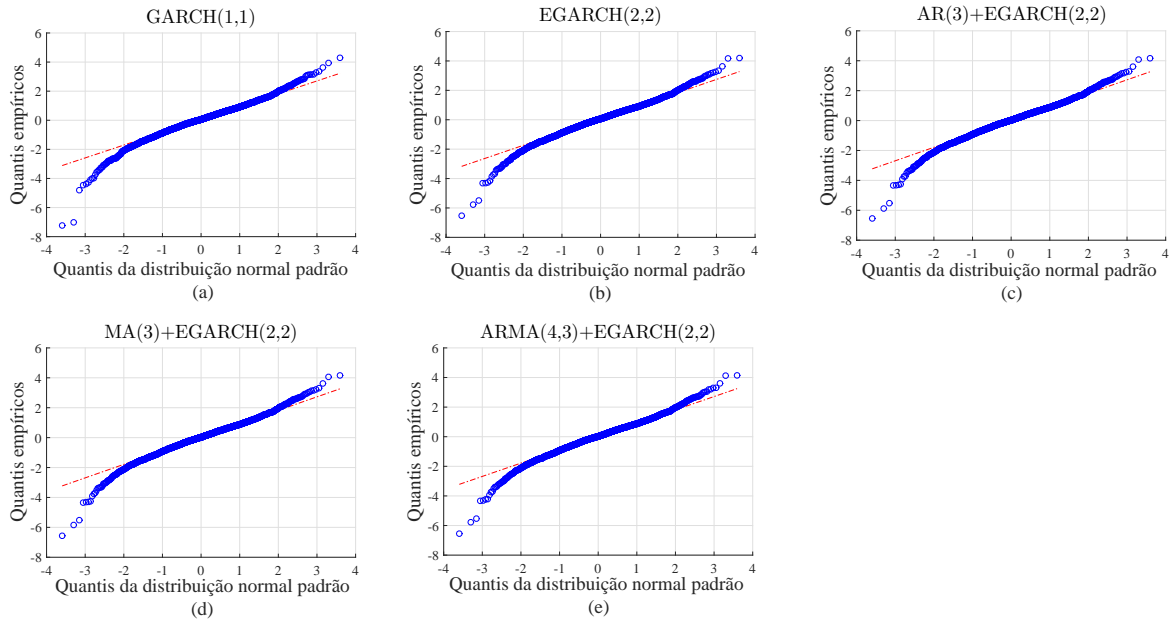


Figura 36 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Austrália (AORD).

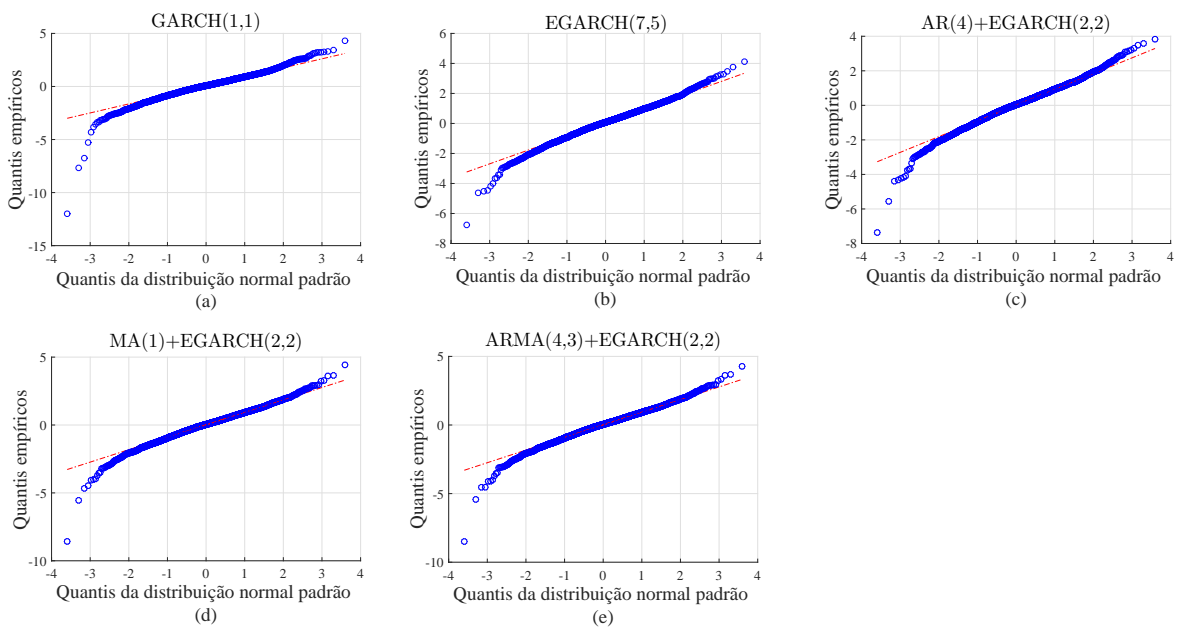


Figura 37 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Malásia (KLSE).

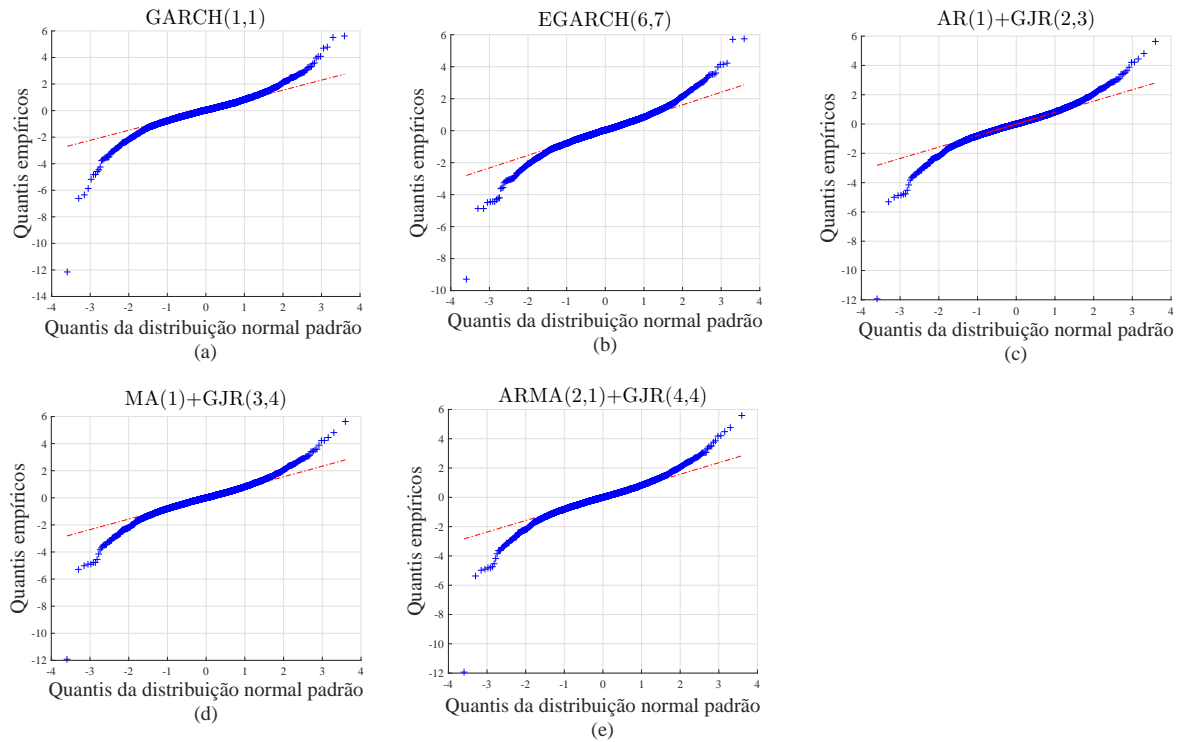


Figura 38 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para China (HSI).

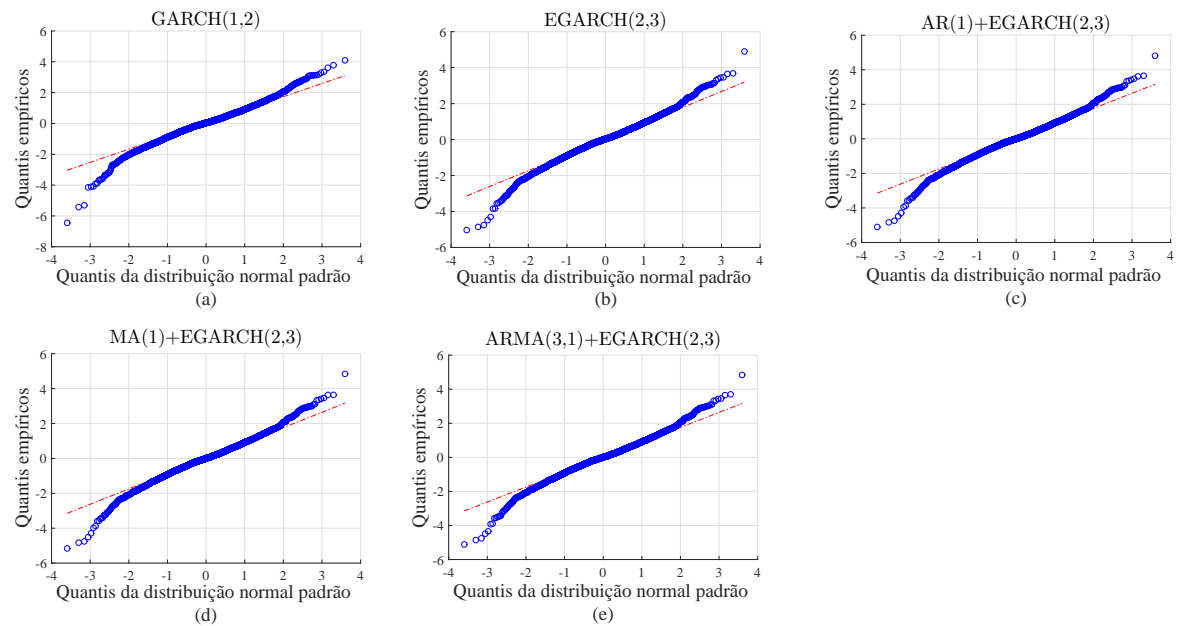


Figura 39 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para China (SSE).

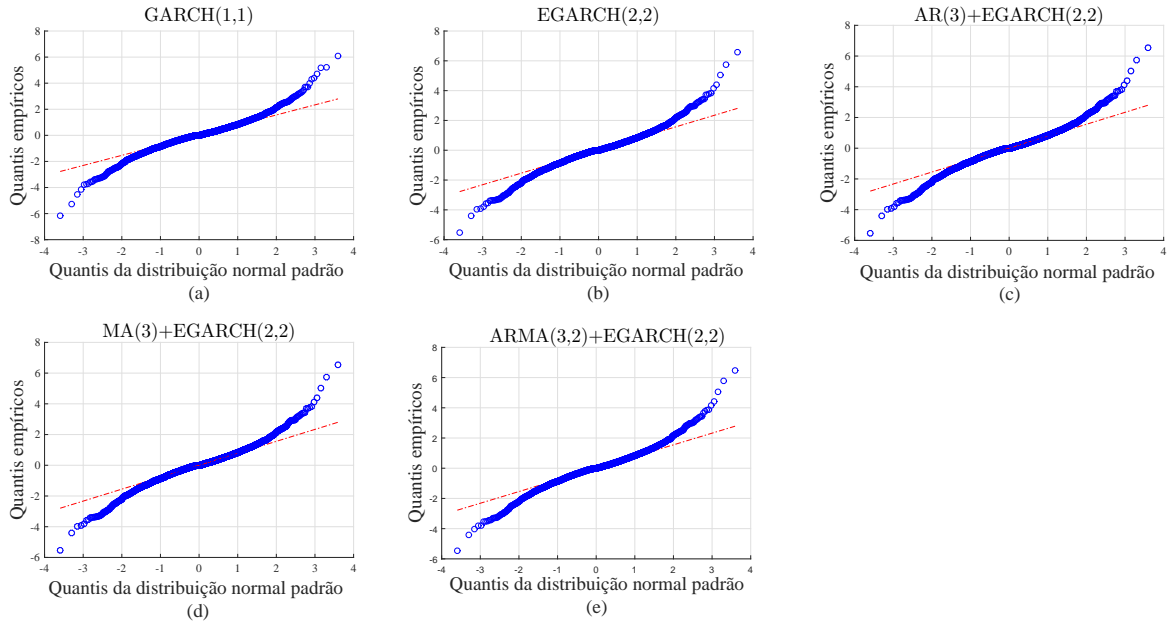


Figura 40 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Japão (N225).

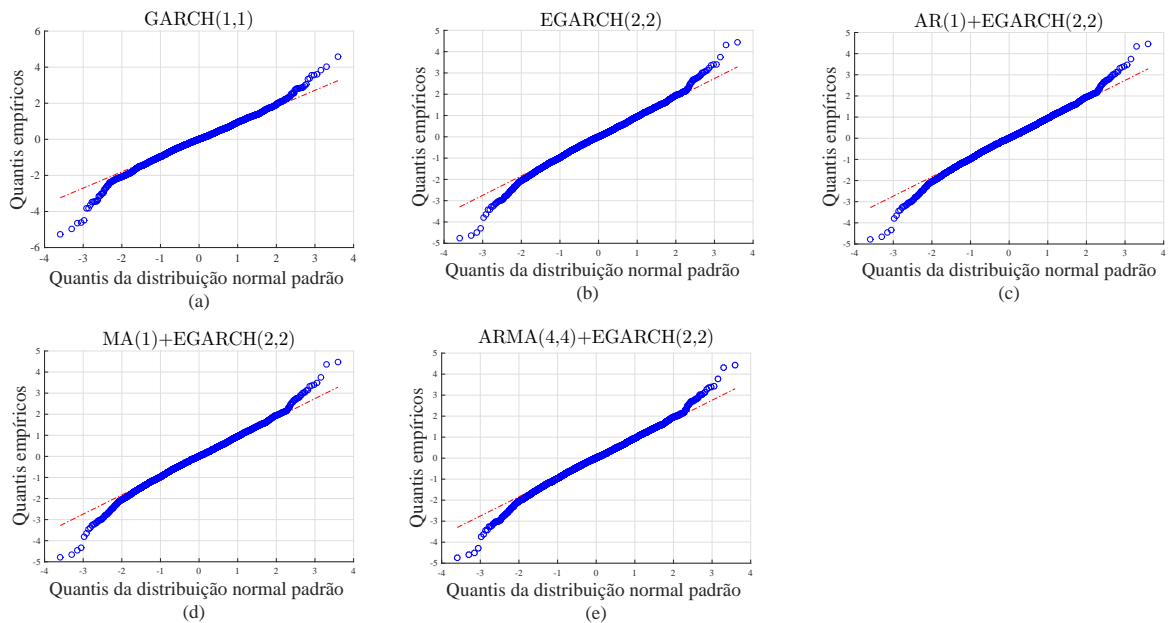


Figura 41 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para França (FCHI).

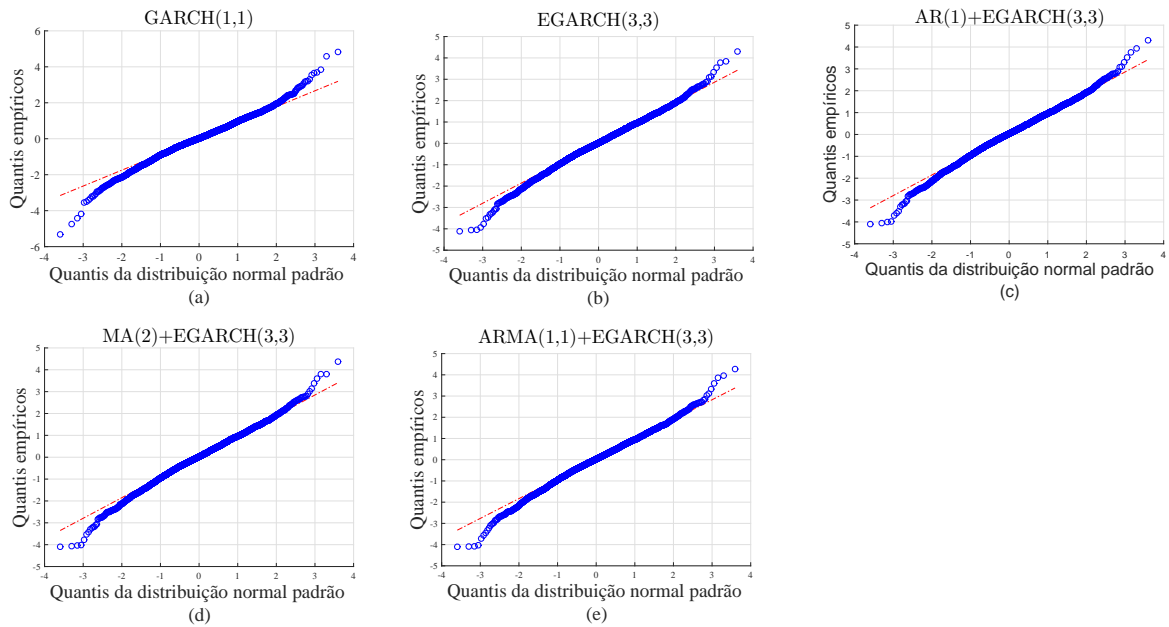


Figura 42 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Suíça (SSMI).

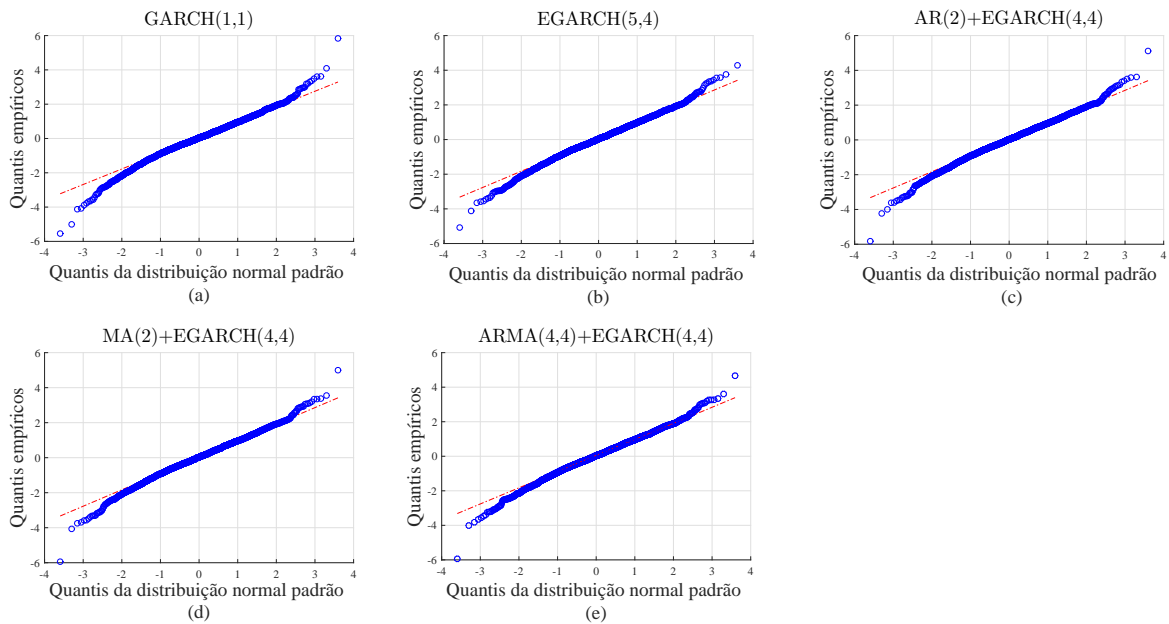


Figura 43 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Alemanha (GDAX).

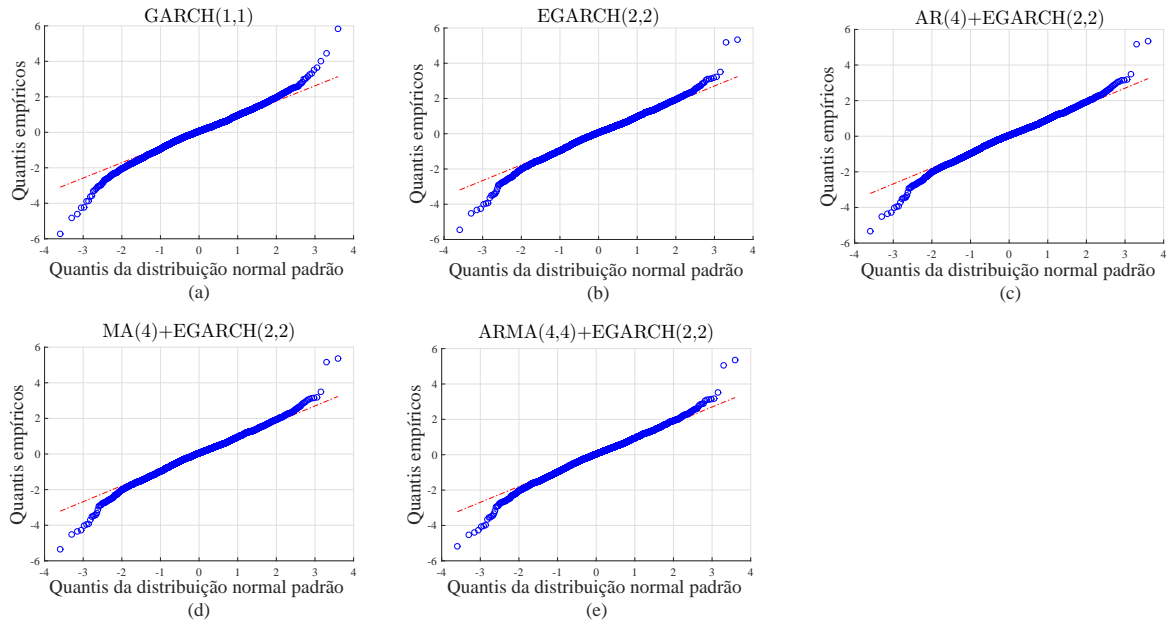


Figura 44 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Áustria (ATX).

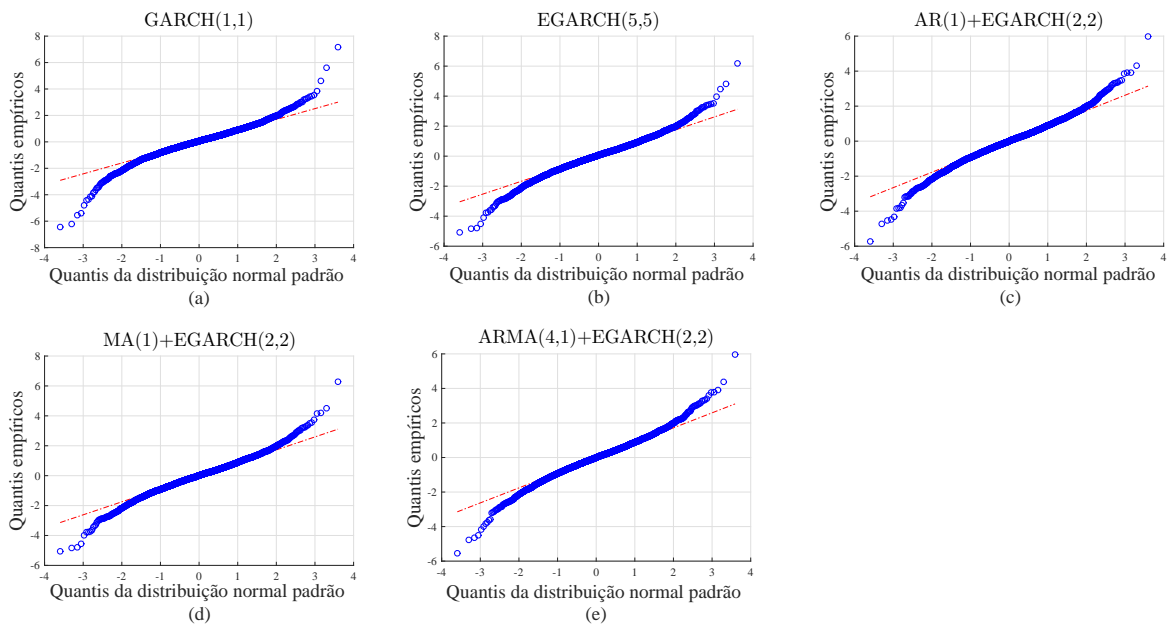
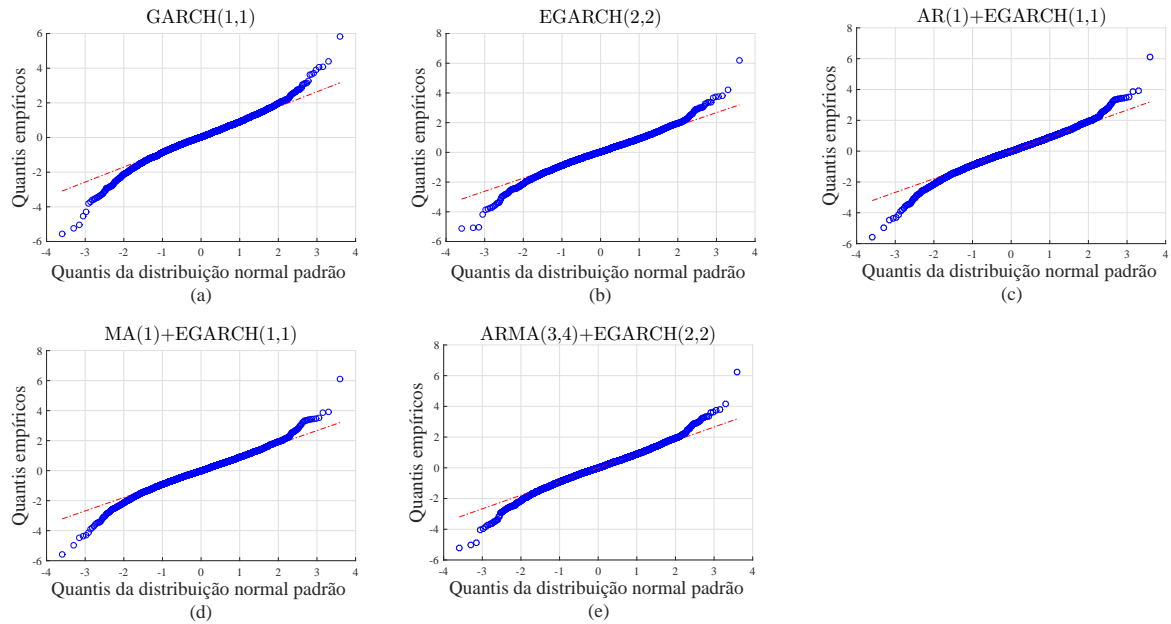


Figura 45 – Quantis empíricos dos resíduos padronizados versus os quantis da distribuição normal padrão dos cinco modelos de variância condicional para Bélgica (BFX).



APÊNDICE D – Desempenho preditivo dos modelos estimados utilizando os retornos observados e os simulados

Tabela 64 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Brasil (BVSP).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-1,9048e+04	0,0008	0,0287
(b)	EGARCH(2,2)	-1,9209e+04	0,0010	0,0318
(c)	AR(4)+EGARCH(2,2)	-1,9196e+04	0,0010	0,0312
(d)	MA(4)+EGARCH(2,2)	-1,9196e+04	0,0010	0,0312
(e)	ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	-1,9191e+04	0,0010	0,0312

Tabela 65 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série México (MXX).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(d)	MA(1)+EGARCH(2,3)	-2,2101e+04	0,0005	0,0221
(e)	ARMA(1,1)+EGARCH(2,3)	-2,2096e+04	0,0005	0,0220

Tabela 66 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série EUA (IXIC).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,1499e+04	0,0004	0,0192
(b)	EGARCH(2,2)	-2,1661e+04	0,0005	0,0217
(c)	AR(4)+EGARCH(2,2)	-2,1650e+04	0,0005	0,0214
(d)	MA(4)+EGARCH(2,2)	-2,1652e+04	0,0005	0,0212
(e)	ARMA(3,3)+EGARCH(2,3)	-2,1648e+04	0,0004	0,0206

Tabela 67 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série EUA (GSPC).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(d)	MA(3)+EGARCH(2,2)	-2,3659e+04	0,0003	0,0175
(e)	ARMA(1,1)+EGARCH(2,2)	-2,3660e+04	0,0003	0,0173

Tabela 68 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série EUA (DJI).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,3822e+04	0,0002	0,0152
(b)	EGARCH(2,3)	-2,4023e+04	0,0003	0,0172
(c)	AR(1)+EGARCH(3,3)	-2,4014e+04	0,0003	0,0167
(d)	MA(1)+EGARCH(3,3)	-2,4014e+04	0,0003	0,0167
(e)	ARMA(1,3)+EGARCH(2,3)	-2,4009e+04	0,0003	0,0169

Tabela 69 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Canadá (GSPTSE).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,4229e+04	0,0002	0,0142
(b)	EGARCH(2,2)	-2,4373e+04	0,0003	0,0164
(c)	AR(3)+EGARCH(2,2)	-2,4368e+04	0,0002	0,0158
(d)	MA(3)+EGARCH(2,2)	-2,4368e+04	0,0002	0,0158
(e)	ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	-2,4363e+04	0,0002	0,0157

Tabela 70 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Austrália (AORD).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,4895e+04	0,0002	0,01515
(b)	EGARCH(7,5)	-2,5162e+04	0,0003	0,01585
(c)	AR(4)+EGARCH(2,2)	-2,5166e+04	0,0002	0,01510
(d)	MA(1)+EGARCH(2,2)	-2,5165e+04	0,0002	0,01512
(e)	ARMA(4,3)+EGARCH(2,2)	-2,5158E+04	0,0002	0,01506

Tabela 71 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Malásia (KLSE).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(c)	AR(1)+EGARCH(2,3)	-2,4622e+04	0,0005	0,0231
(e)	ARMA(2,1)+EGARCH(4,4)	-2,4671e+04	0,0005	0,0212

Tabela 72 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série China (HSI).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,2)	-2,1147e+04	0,0004	0,0209
(b)	EGARCH(2,3)	-2,1248e+04	0,0006	0,0249
(c)	AR(1)+EGARCH(2,3)	-2,1235e+04	0,0006	0,0246
(d)	MA(1)+EGARCH(2,3)	-2,1235e+04	0,0006	0,0245
(e)	ARMA(3,1)+EGARCH(2,3)	-2,1228e+04	0,0006	0,0245

Tabela 73 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série China (SSE).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,0737e+04	0,0007	0,0257

Tabela 74 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Japão (N225).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(e)	ARMA(4,4)+EGARCH(2,2)	-2,1204e+04	0,0006	0,0252

Tabela 75 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série França (FCHI).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,1555e+04	0,0004	0,0210
(b)	EGARCH(3,3)	-2,1772e+04	0,0005	0,0225
(c)	AR(1)+EGARCH(3,3)	-2,1760e+04	0,0005	0,0227
(d)	MA(2)+EGARCH(3,3)	-2,1757e+04	0,0005	0,0226
(e)	ARMA(1,1)+EGARCH(3,3)	-2,1761e+04	0,0005	0,0224

Tabela 76 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Suíça (SSMI).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,3193e+04	0,0003	0,0179
(b)	EGARCH(5,4)	-2,3426e+04	0,0004	0,0188
(c)	AR(2)+EGARCH(4,4)	-2,3411e+04	0,0003	0,0186
(d)	MA(2)+EGARCH(4,4)	-2,3411e+04	0,0003	0,0186

Tabela 77 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Alemanha (GDAX).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,1288e+04	0,0004	0,0212

Tabela 78 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Áustria (ATX).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(a)	GARCH(1,1)	-2,1956e+04	0,0004	0,0203
(b)	EGARCH(5,5)	-2,2135e+04	0,0005	0,0234
(c)	AR(1)+EGARCH(2,2)	-2,2131e+04	0,0005	0,0223
(d)	MA(1)+EGARCH(2,2)	-2,2129e+04	0,0005	0,0219
(e)	ARMA(4,1)+EGARCH(2,2)	-2,2125e+04	0,0005	0,0222

Tabela 79 – Erro quadrático médio (EQM) do ou dos modelos considerados apropriados para a etapa de previsão: série Bélgica (BFX).

	Modelo	BIC	Desempenho preditivo	
			EQM	REQM
(c)	AR(1)+EGARCH(1,1)	-2,2951e+04	0,0004	0,019612
(d)	MA(1)+EGARCH(1,1)	-2,2951e+04	0,0004	0,019607

APÊNDICE E – Simulação de retornos, variâncias e preços diários de fechamento.

Figura 46 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Brasil (BVSP).

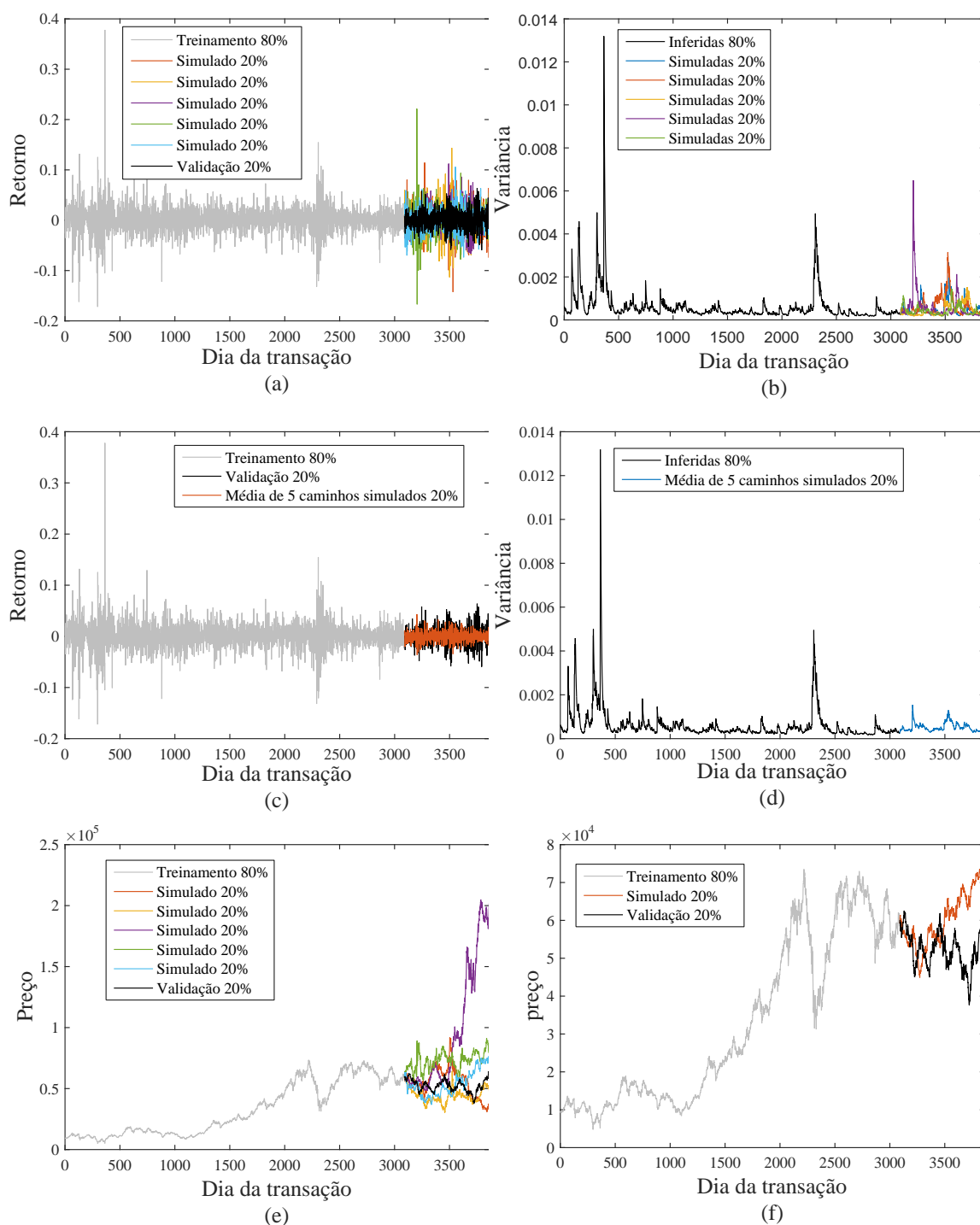


Figura 47 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,3), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: México (MXX).

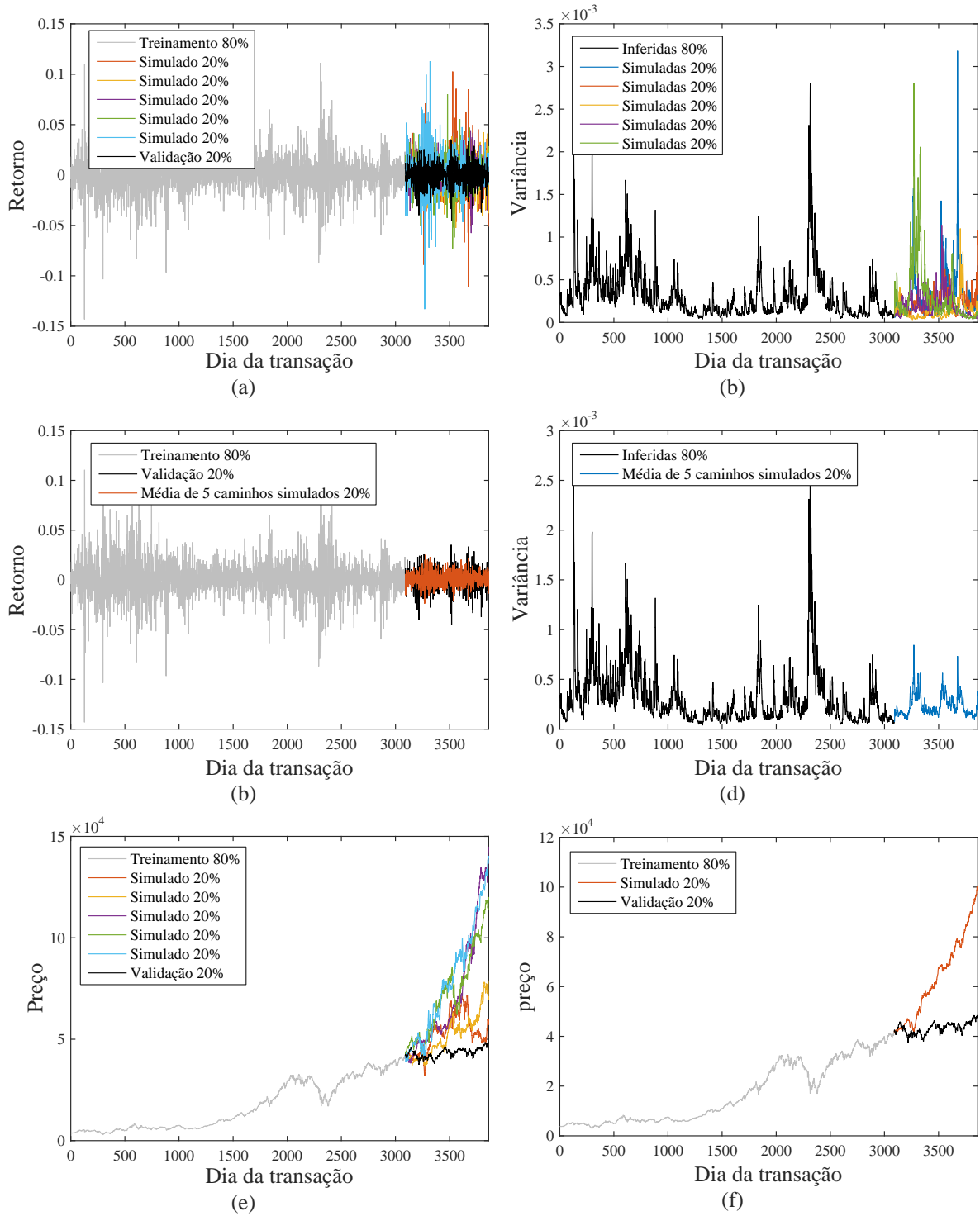


Figura 48 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (IXIC).

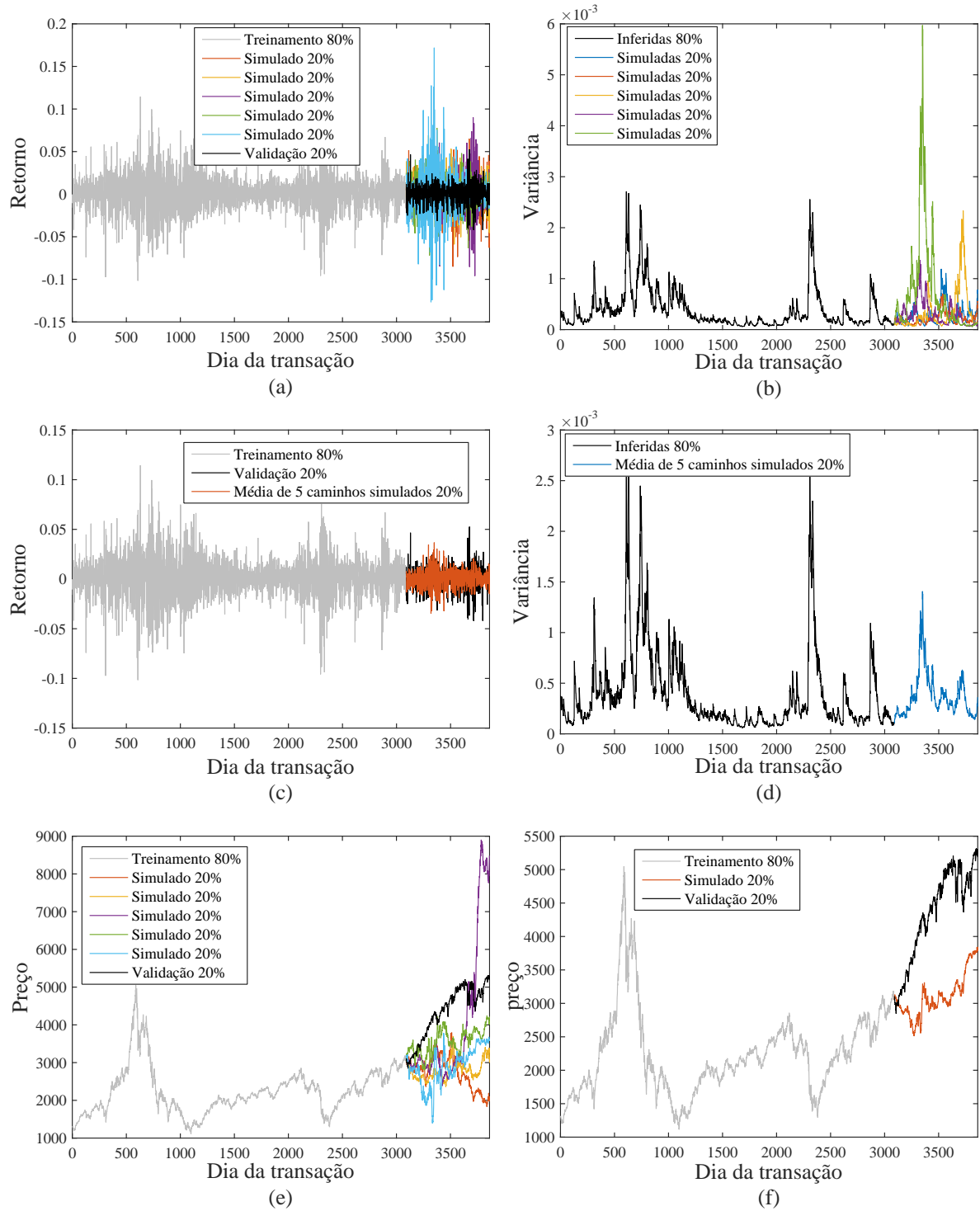


Figura 49 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(1,1)+EGARCH(2,2), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (GSPC).

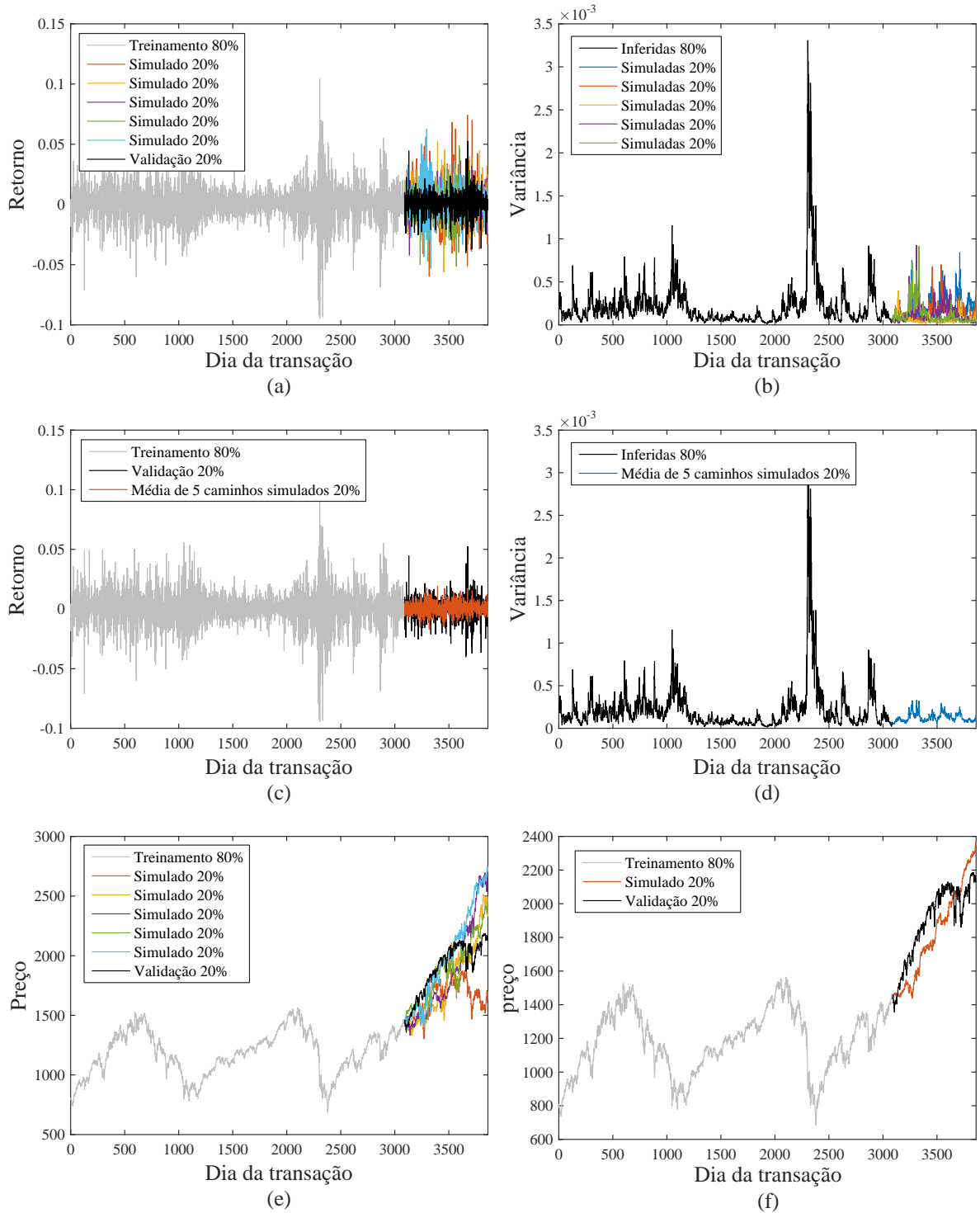


Figura 50 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: EUA (DJI).

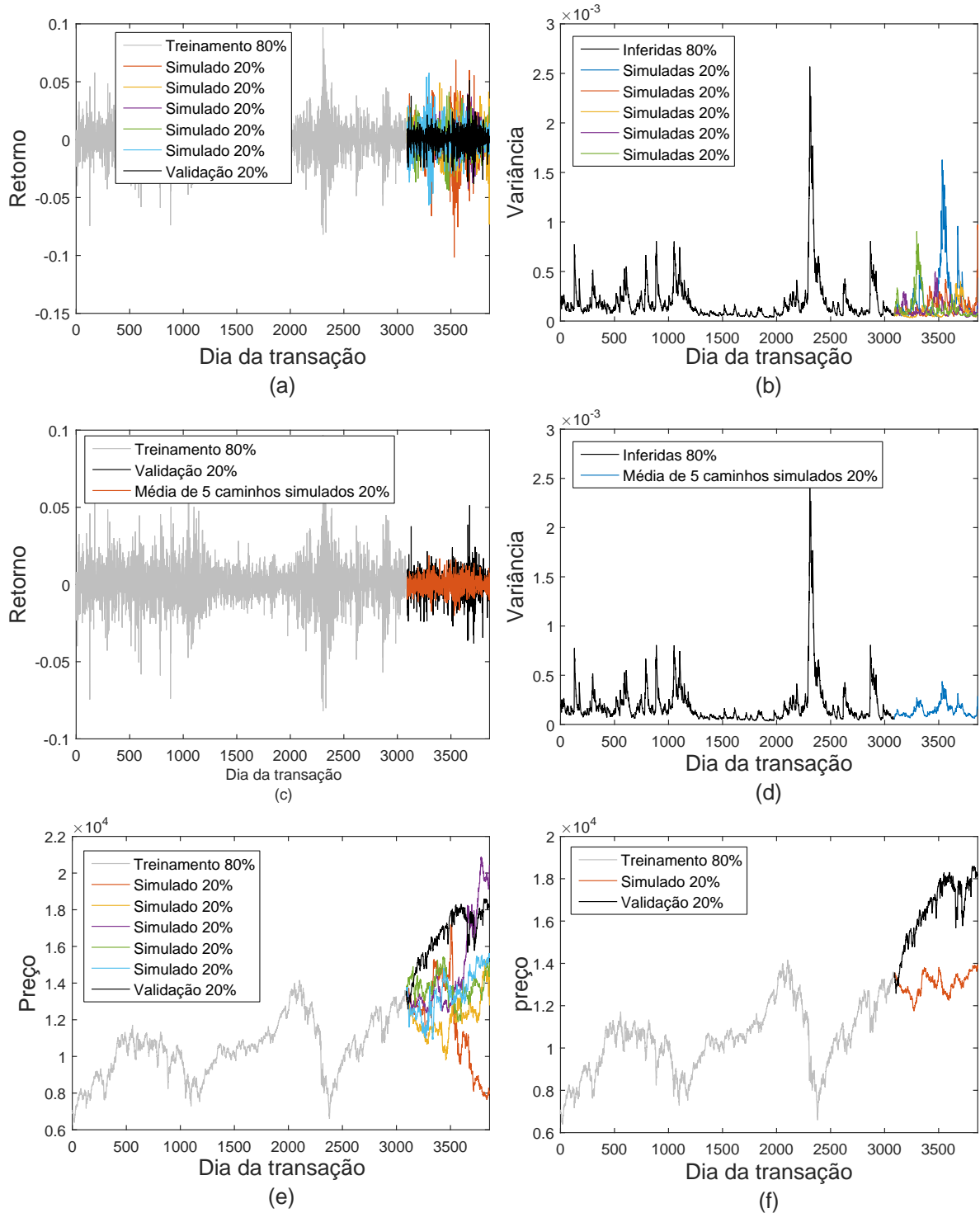


Figura 51 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Canadá (GSPTSE).

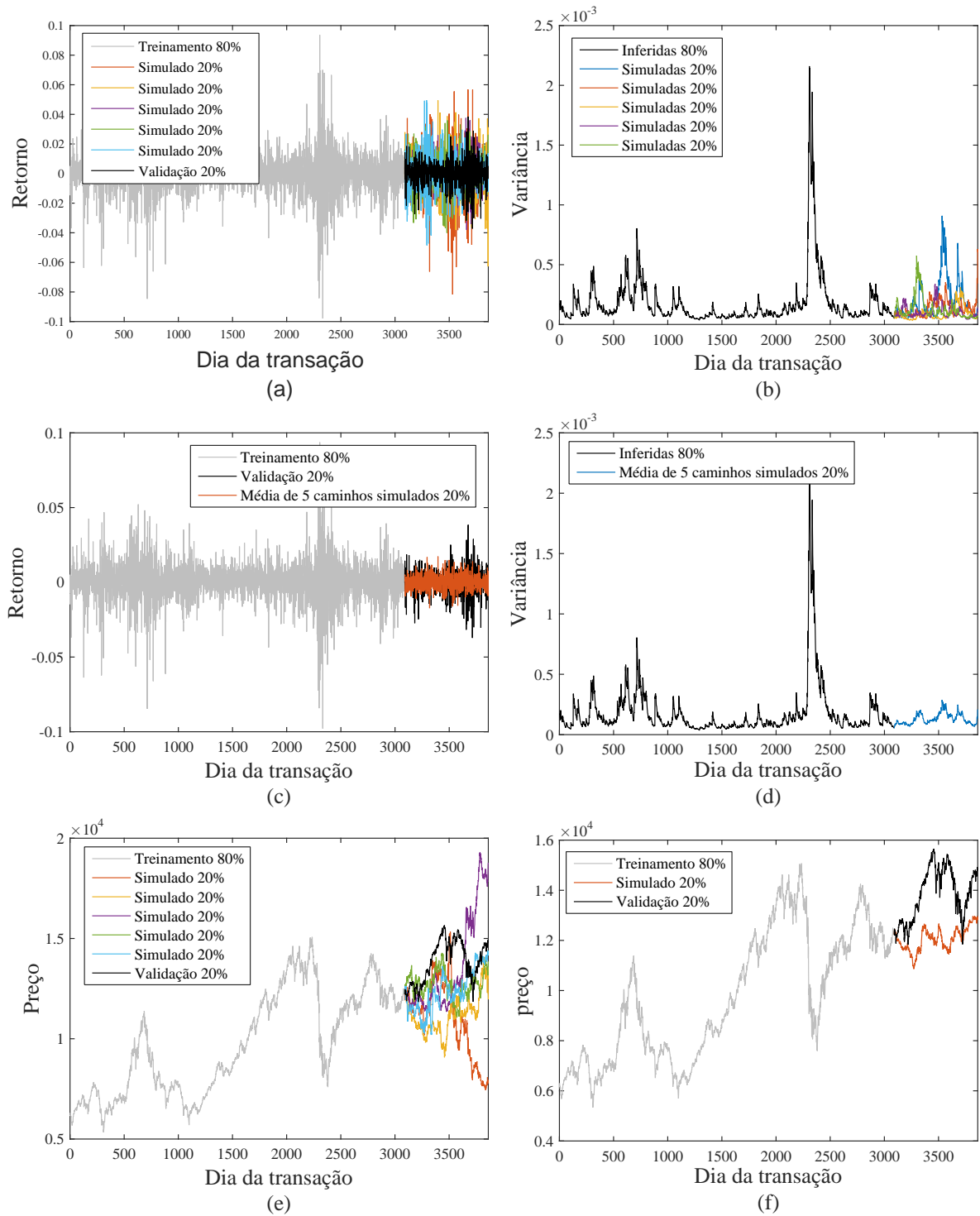


Figura 52 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(4,3)+EGARCH(2,2), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Austrália (AORD).

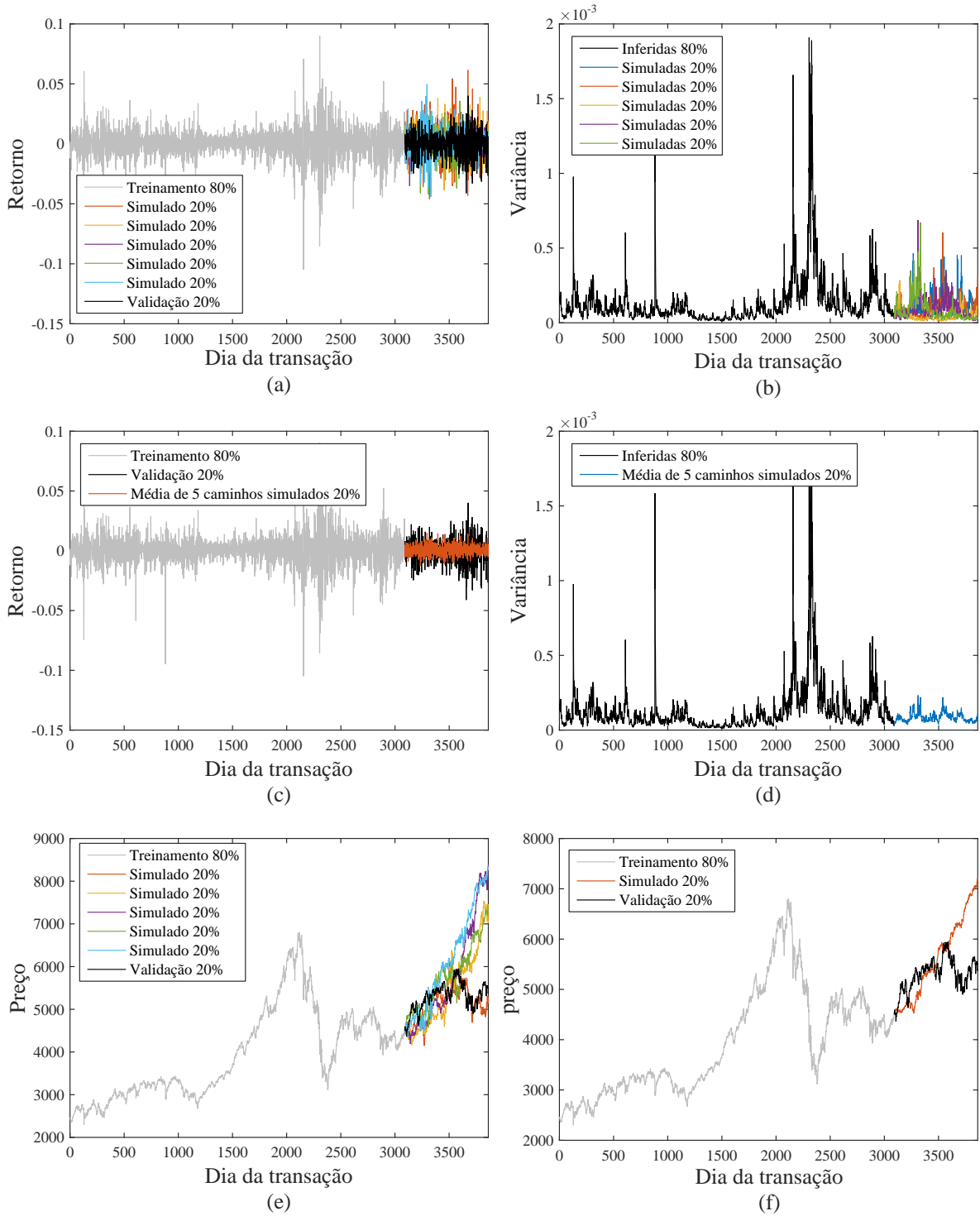


Figura 53 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(2,1)+EGARCH(4,4), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Malásia (KLSE).

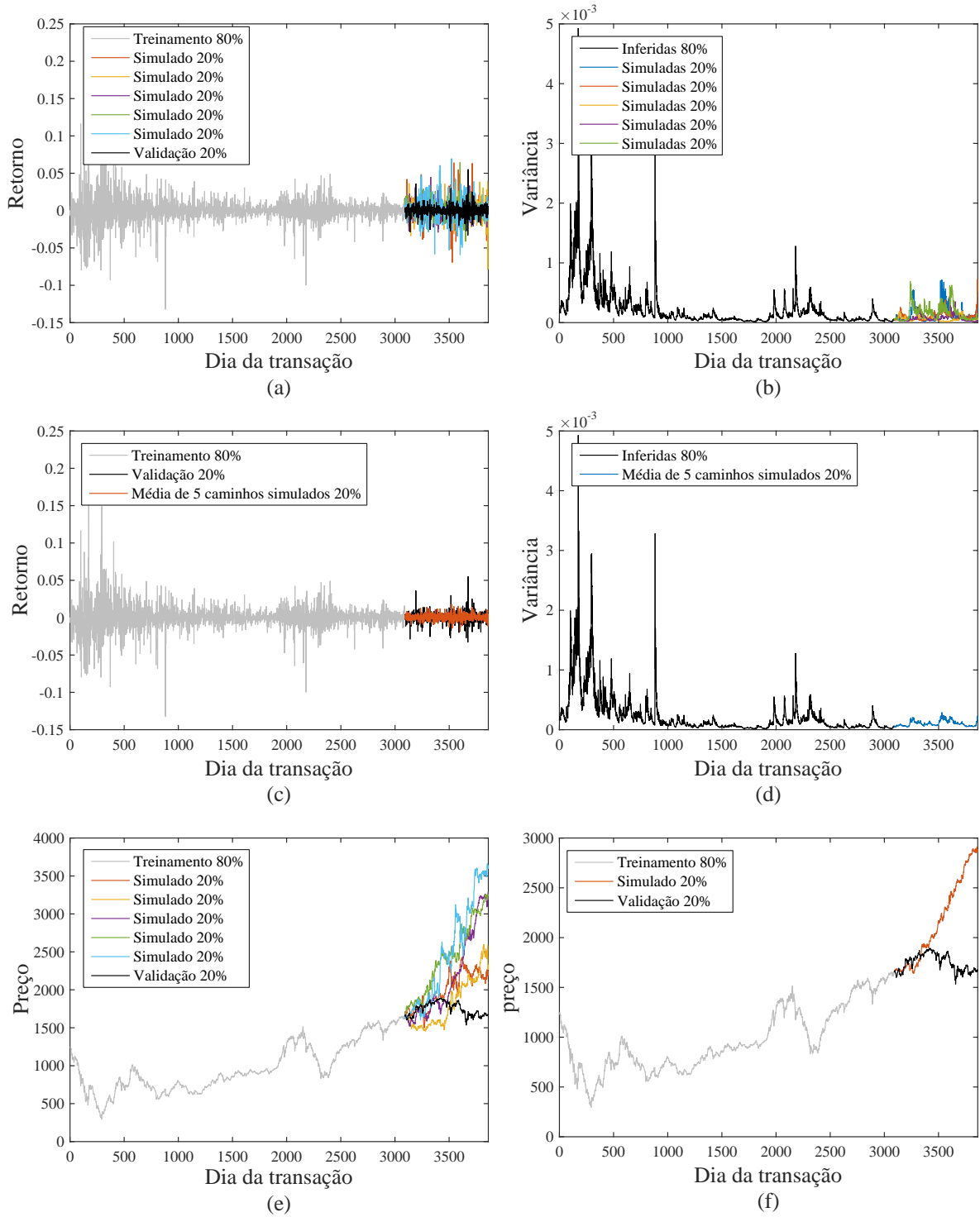


Figura 54 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (HSI).

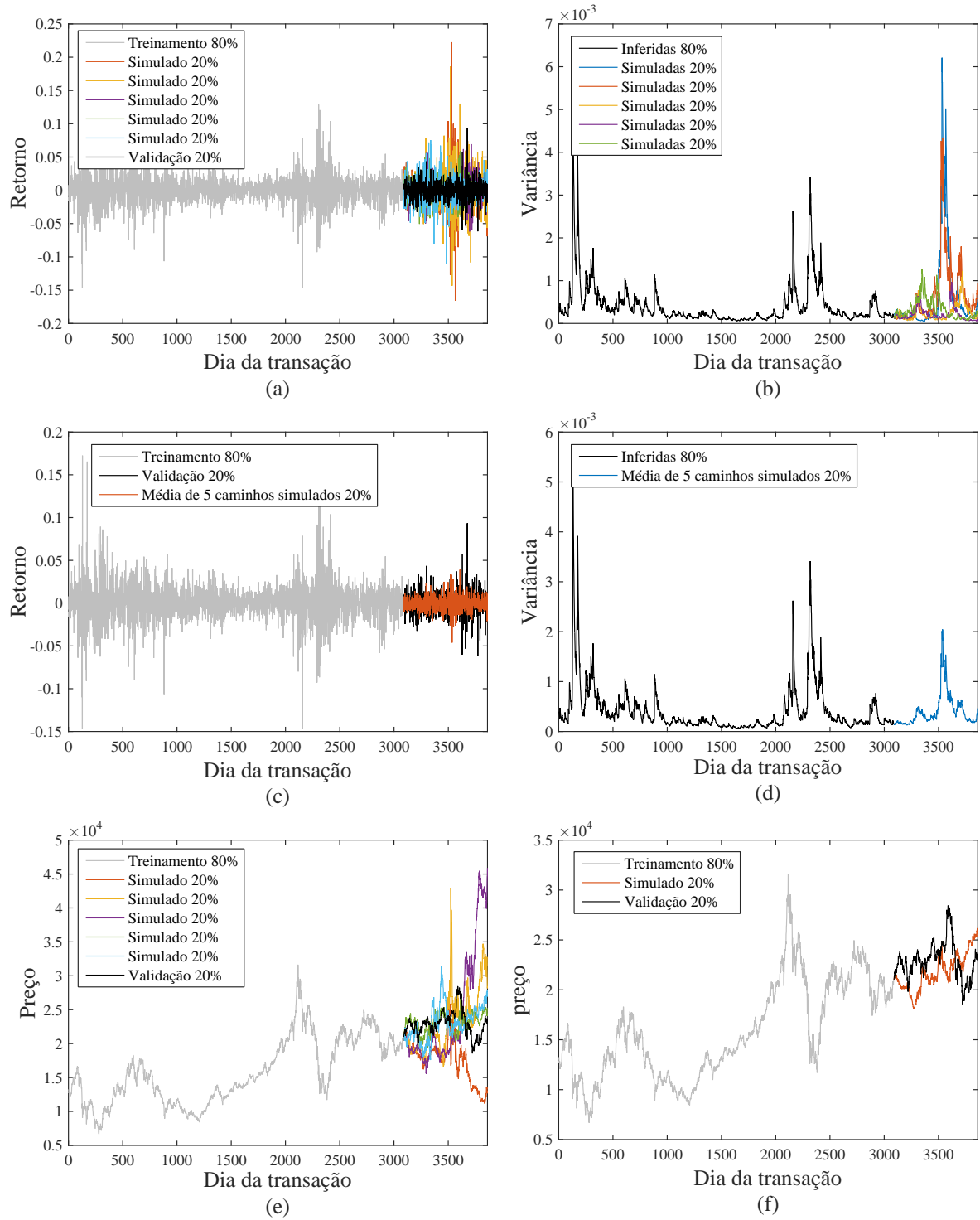


Figura 55 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: China (SSE).

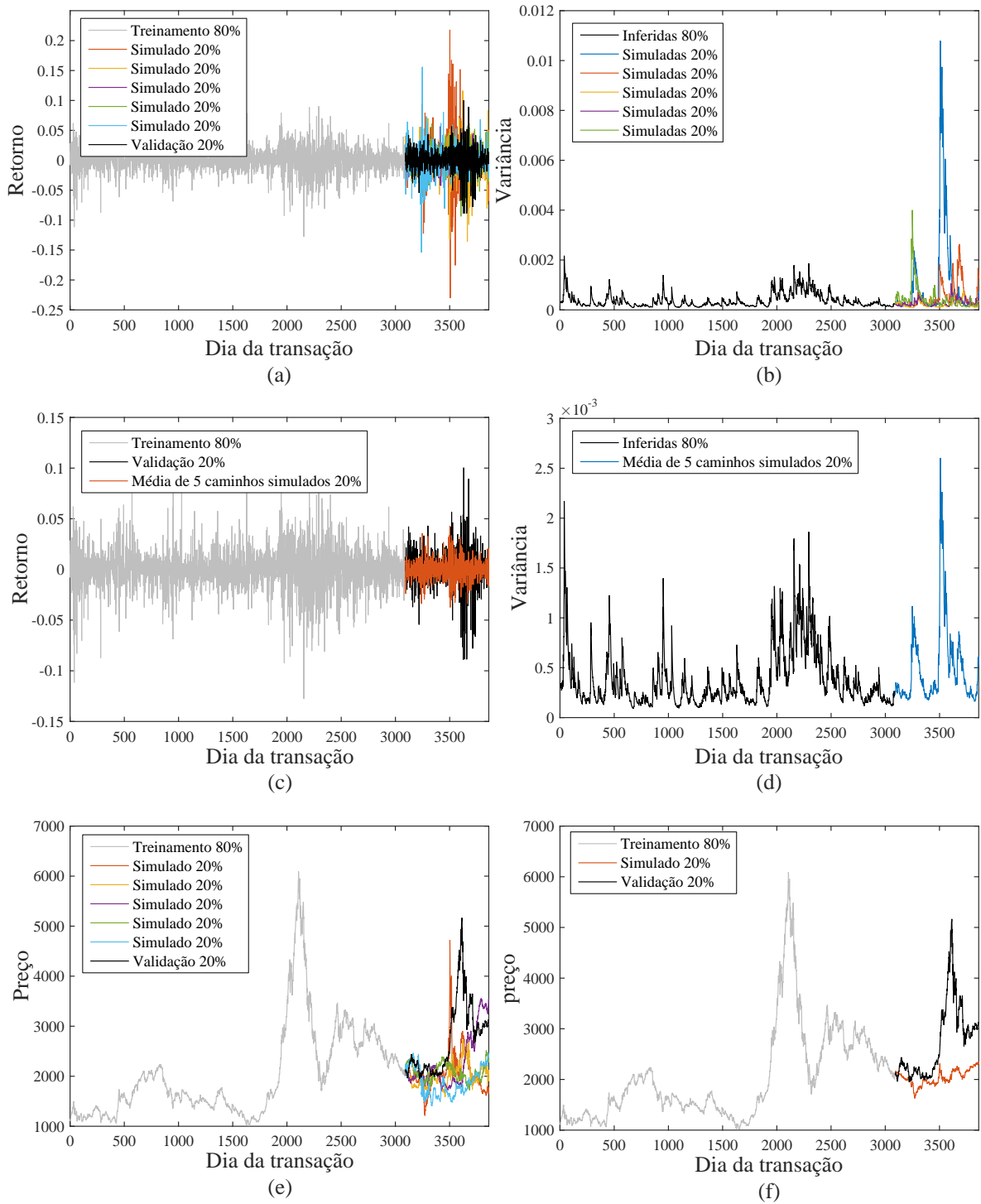


Figura 56 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo ARMA(4,4)+GARCH(2,2), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Japão (N225).

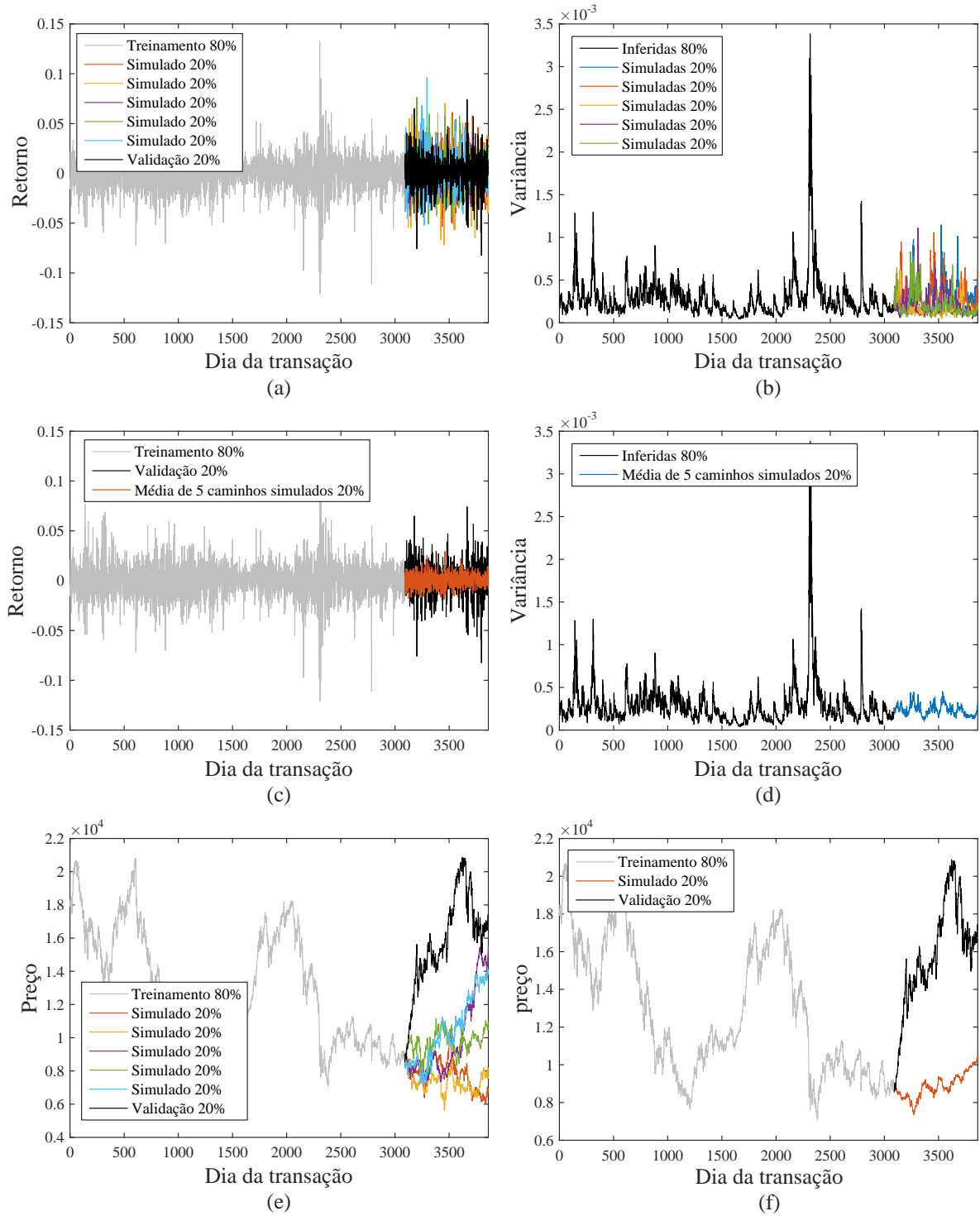


Figura 57 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: França (FCHI).

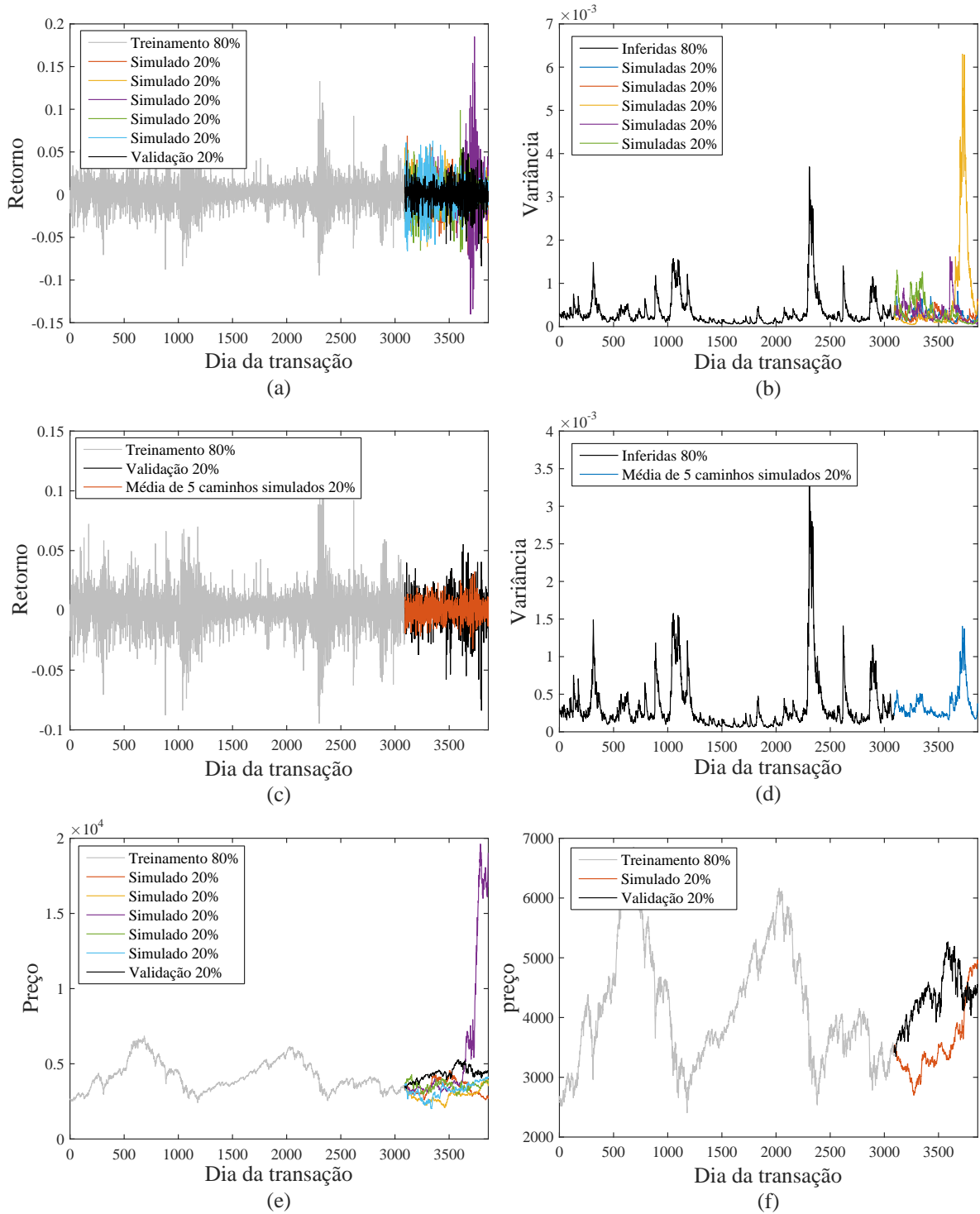


Figura 58 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Suíça (SSMI).

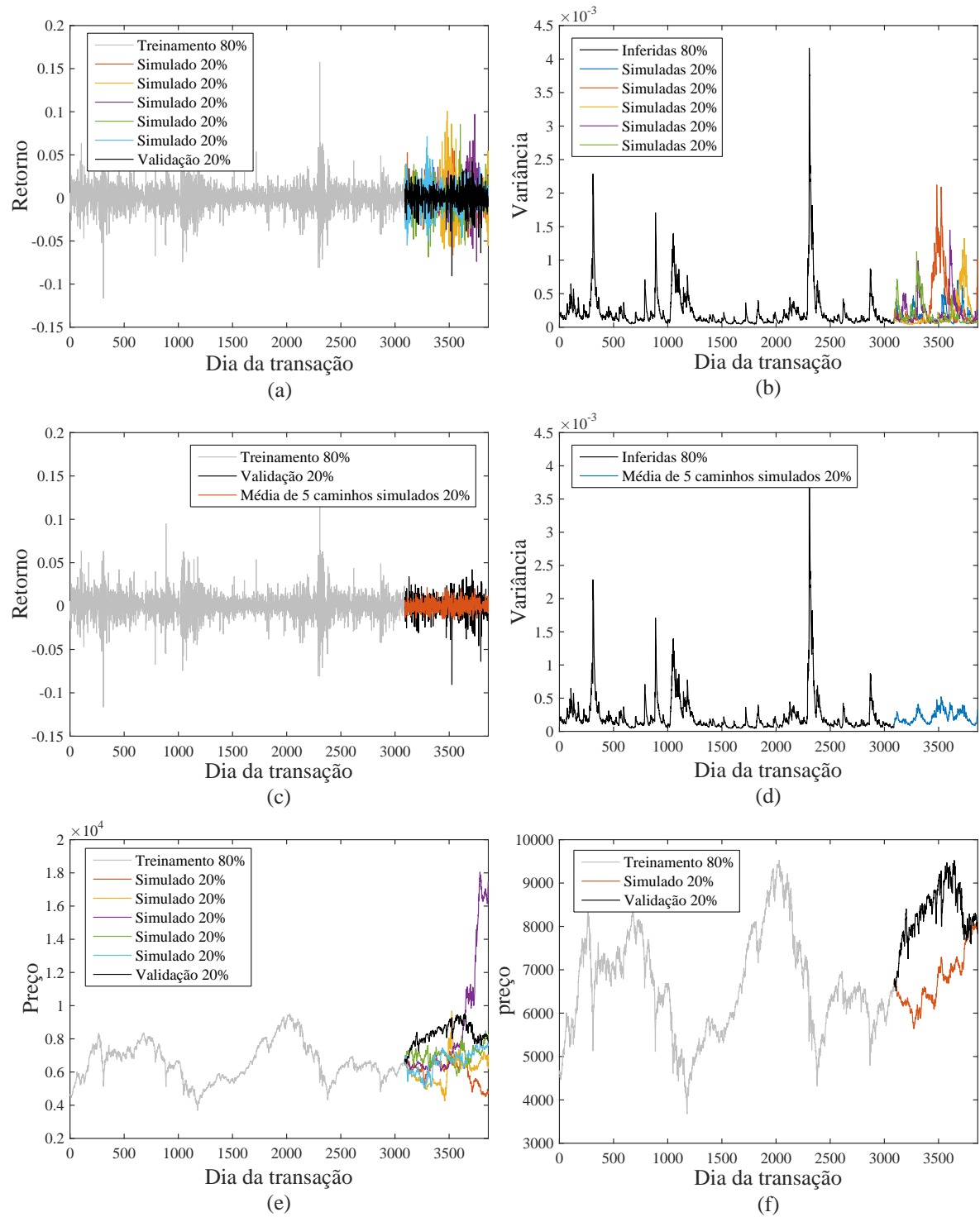


Figura 59 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Alemanha (GDAX).

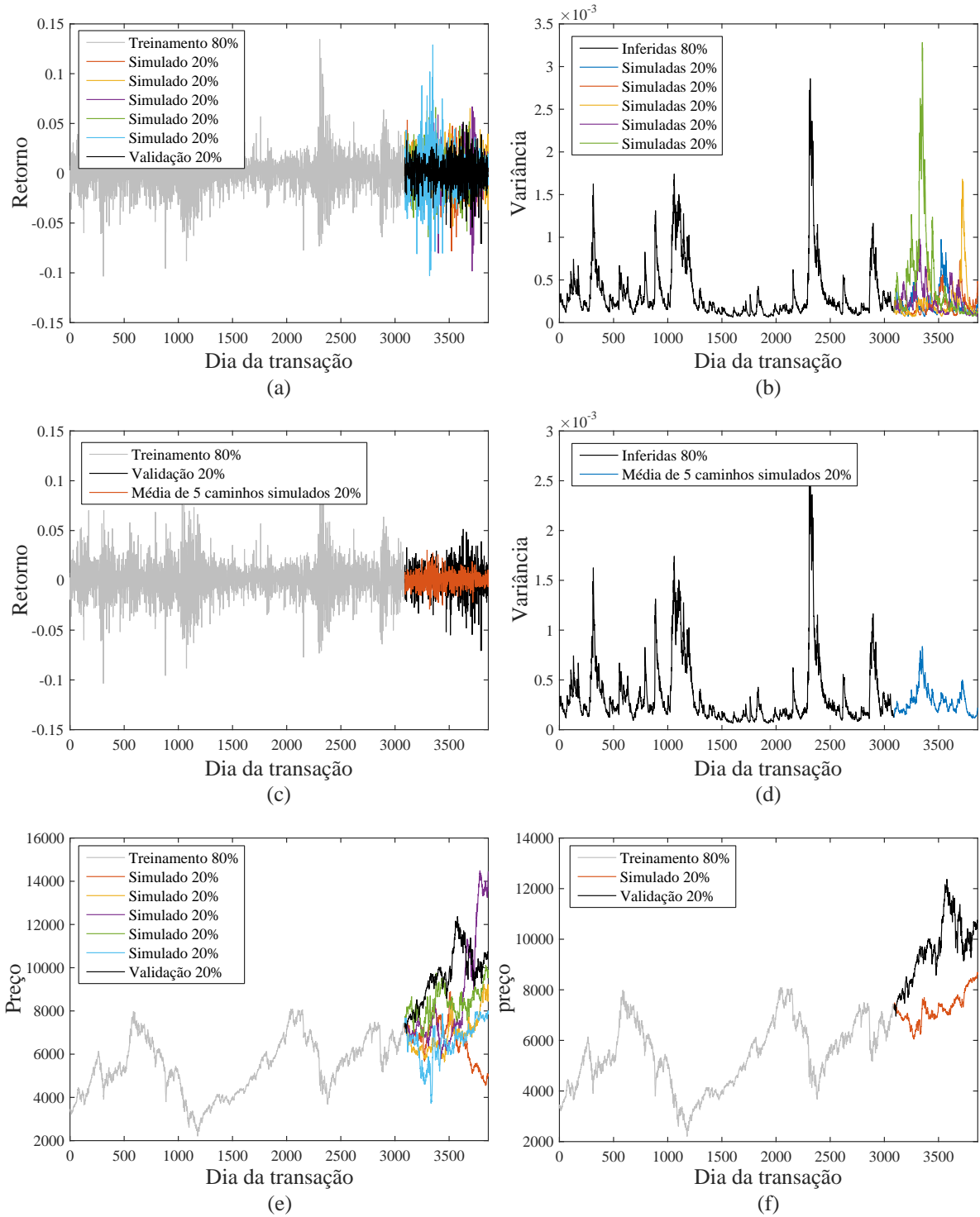


Figura 60 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo GARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Áustria (ATX).

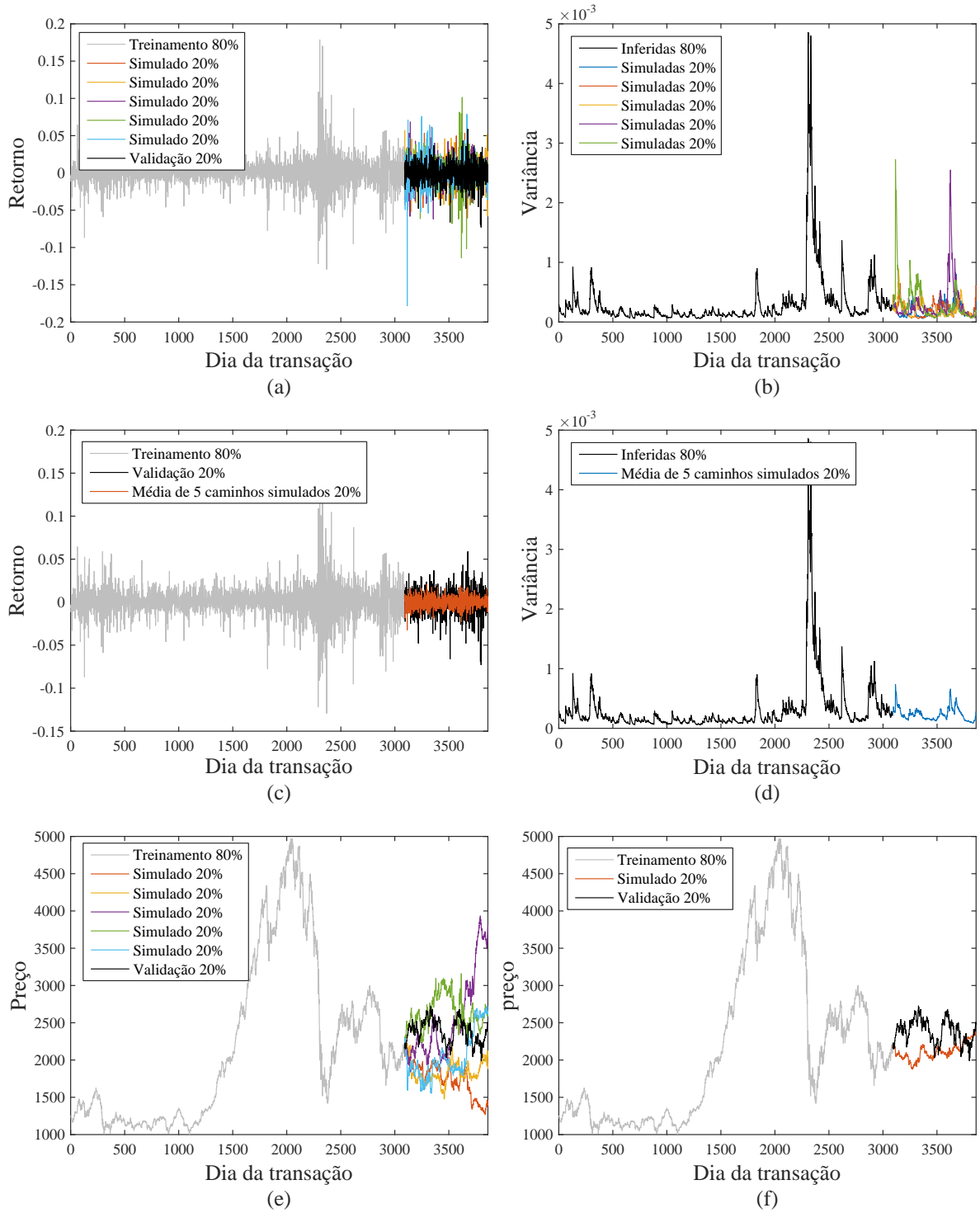


Figura 61 – Simulações de 20% dos retornos, variâncias e preços diários de fechamento com o modelo MA(1)+EGARCH(1,1), sob a suposição de que as inovações seguem uma distribuição t de Student. Série: Bélgica (BFX).

