

JOÃO SILVA ROCHA

**Métodos construtores de classes de distribuições probabilísticas via
composições de funções**

TESE DE DOUTORADO

**RECIFE - PE
AGOSTO – 2023**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Métodos construtores de classes de distribuições probabilísticas via
composições de funções**

Tese apresentada à Universidade Federal Rural de Pernambuco, para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, Área de Concentração: Modelagem e estatística aplicada.

Estudante: João Silva Rocha

Orientador: Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho

Coorientador: Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito

Recife, agosto de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R672m ROCHA, JOAO SILVA
Métodos construtores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções / JOAO SILVA ROCHA. - 2023.
223 f. : il.

Orientador: Moacyr Cunha Filho.
Coorientador: Cicero Carlos Ramos de Brito.
Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Recife, 2023.

1. baseline. 2. função monotônica. 3. estatística. 4. probabilidade . I. Filho, Moacyr Cunha, orient. II. Brito, Cicero Carlos Ramos de, coorient. III. Título

CDD 519.5

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA
APLICADA**

**Métodos construtores de classes de distribuições probabilísticas via
composições de funções**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho
Orientador (PPGBEA - UFRPE)

Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito
Coorientador (DM – UFPE)

Prof. Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros
(PPGBEA - UFRPE)

Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Júnior
Orientador (PPGBEA - UFRPE)

Prof. Dr. José Araújo dos Santos Júnior
(PROTEN – DEN – CTG (EEP) – UFPE)

Aos meus filhos João Victor Barros Rocha e João Miguel Barros Rocha, minha esposa Michelle Barros da Silva, minha mãe Jacira da Silva Rocha e, a meu pai Ivaldo Figueredo Rocha (*in memoriam*).

Dedico.

Agradecimentos

Ao meu bom Deus, por estar sempre presente nos momentos de alegrias e dificuldades.

À minha família, pois, sem ela não teria conseguido vencer mais esta batalha, em especial a minha esposa Michelle Barros da Silva e nossos filhos João Victor Barros Rocha e João Miguel Barros Rocha.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, em especial ao Departamento de Estatística e Informática, por ter dado todas as condições necessárias para a realização do presente trabalho, bem como aos órgãos de fomento Capes, Cnpq e Facepe.

Ao Professor Doutor Moacyr Cunha Filho pela dedicação, ensinamentos, confiança, amizade e paciência sempre concedida e ao Doutor Cícero Carlos Ramos de Brito, pelas orientações que nos fizeram enxergar e facilitar a escrita do trabalho aqui apresentado.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, por ter dado todas as condições necessárias para o desenvolvimento do curso e a todos os Professores deste Programa que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para o meu sucesso e, em especial, ao Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros.

Aos amigos de trabalho da rede de Jaboatão pelo grande apoio e as nossas amigas Aldeci Sedeci de Santana, Luciana Francisca do Amaral, Lidiane Valéria de Jesus Silva e Adriana Lúcia do Amaral.

Aos amigos de estudo Dr. Eduardo Silva, Dr. Henrique Santos, Dr. Domingos Aguiar, Dr. Filipe Lima, Ma. Natalia Cordeiro, Me. Lucas Amaral, Me. Edvaldo Nunes, Ma. Marília Gabriela, Me. Augusto Oliveira, Dra. Camila Ribeiro e Ma. Maria Marciele pelos incentivos e participação ativa nas lutas travadas durante todo o curso.

Ao Professor Me. José de Arimatéa Rocha, que sempre me incentivou na pesquisa científica, orientando na especialização e, sendo grande exemplo para meu crescimento nos estudos.

Ao nosso amigo de estudos e persistência, o Dr. Edvaldo José da Silva.

A nossa amiga, Eliane Pinto de Moraes que, desde a graduação, já dizia que chegaríamos ao doutorado e... aqui estamos.

Resumo

O estudo dos construtores de classes de distribuições probabilísticas via composição de funções tem como objetivo apresentar quatro métodos que generalizam e geram distribuições de probabilidades a partir da composição de funções. Os métodos propostos permitem a construção de classes de distribuições, utilizando-se funções monotônicas de distribuições predefinidas. Com esses métodos é possível encontrar novas distribuições probabilísticas, classes de distribuições probabilísticas e, também, famílias de distribuições de probabilidade, inclusive algumas já presentes na literatura. Proposições são apresentadas para a construção dos métodos com exposição de dados tabelares e pares de funções contínuas ordenadas, incluindo as derivadas para alimentar as expressões dos métodos construtores, gerando alguns subcasos desses métodos. Inicialmente, são apresentados os métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas, via composições de funções de distribuições acumuladas – fda, em que serão utilizadas misturas de *baselines* a partir da construção de funções de ligações, conjuntamente com os métodos construtores de distribuições. A seguir, são apresentados os métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composição de função de distribuição de probabilidade – fdp, a partir da construção de funções de ligações com misturas de *baselines*. Também foram desenvolvidos os estudos dos suportes dos funcionais geradores de distribuições probabilísticas e a identificabilidade das classes geradas pelos métodos propostos. São explicitadas algumas aplicações dos métodos em dados simulados ou reais. Para as classes e distribuições geradas pelos modelos funcionais da fda e da fdp há o desenvolvimento das expansões da fda e da fdp, a função de risco, expansões para os momentos de ordem m , e para função geradora de momentos, bem como para a função característica, as expansões de momentos centrais m e para o coeficiente geral, para o desvio-médio e desvio quantílico, as derivadas da função log-verossimilhança e, as entropias de Shannon e Renyi. Como resultados aplicados foram desenvolvidos um estudo de um caso dos métodos e aplicações fazendo uso de dados simulados e/ou em dados reais, apontando assim a viabilidade e a generalização que servem de ancoradouro para outras pesquisas nos diversos ramos das ciências agrárias.

Palavras-chave: *baseline*; função monotônica; estatística; probabilidade.

Abstract

The study of class constructors of probabilistic distributions via function composition aims to present four methods that generalize and generate probability distributions from function composition. The proposed methods allow the construction of classes of distributions, using monotonic functions of predefined distributions. With these methods it is possible to find new probabilistic distributions, classes of probabilistic distributions and also families of probability distributions, including some already present in the literature. Propositions are presented for the construction of methods with exposure of tabular data and pairs of ordered continuous functions, including derivatives to feed the expressions of the constructor methods, generating some subcases of these methods. Initially, the methods that generate classes of probabilistic distributions are presented, via compositions of cumulative distribution functions – cdf, in which mixtures of baselines will be used from the construction of connection functions, together with the distribution construction methods. Next, the methods that generate classes of probabilistic distributions are presented via the composition of a probability density function – pdf, based on the construction of link functions with mixtures of baselines. Studies of the support of the functionals that generate probabilistic distributions and the identifiability of the classes generated by the proposed methods were also developed. Some applications of the methods in simulated or real data are explained. For the classes and distributions generated by the cdf and pdf functional models, there is the development of the cdf and pdf expansions, the risk function, expansions for moments of order m , and for the moment generating function, as well as for the function characteristic, the expansions of central moments m and for the general coefficient, for the mean deviation and quantile deviation, the derivatives of the log-likelihood function and the Shannon and Renyi entropies. As applied results, a case study of methods and applications was developed using simulated data and/or real data, thus pointing out the feasibility and generalization that serve as an anchor for other research in the various branches of agricultural sciences.

Keywords: baseline; monotonic function; statistics; probability.

Lista de figuras

Figura 2.1 -	Esquema do método Bootstrap.....	43
Figura 2.2 -	Algoritmo Genético.....	47
Figura 01 -	Histograma 1.....	119
Figura 02 -	Histograma 2.....	119
Figura 03-	Histograma 3.....	120
Figura 04 -	Histograma 4.....	120
Figura 05 -	Histograma 5.....	121
Figura 06 -	Histograma 6.....	121
Figura 07 -	Histograma 7.....	122
Figura 08 -	Histograma 8.....	122
Figura 09 -	Histograma 9.....	123
Figura 10-	Histograma 10.....	123
Figura 11 -	Comparação entre distribuições.....	141
Figura 12 -	Gráfico comparativo entre distribuições.....	171
Figura A1 -	fda para $\theta = 0.2$	116
Figura A2 -	fda para $\theta = 0.4$	116
Figura A3 -	fda para $\theta = 0.5$	116
Figura A4 -	fda para $\theta = 0.6$	116
Figura A5 -	fda para $\theta = 0.8$	117
Figura B1 -	fda para $\theta = 0.2$	203
Figura B2 -	fda para $\theta = 0.4$	203
Figura B3 -	fda para $\theta = 0.5$	204
Figura B4 -	fda para $\theta = 0.6$	204
Figura B5 -	fda para $\theta = 0.8$	204

Figura C1 - fda para $\theta = 0.2$	204
Figura C2 - fda para $\theta = 0.4$	205
Figura C3 - fda para $\theta = 0.5$	206
Figura C4 - fda para $\theta = 0.6$	206
Figura C5 - fda para $\theta = 0.8$	206
Figura D1 - fda para $\theta = 0.2$	150
Figura D2 - fda para $\theta = 0.4$	150
Figura D3 - fda para $\theta = 0.5$	151
Figura D4 - fda para $\theta = 0.6$	151
Figura D5 - fda para $\theta = 0.8$	151
Figura E1 - fda para $\theta = 0.2$	209
Figura E2 - fda para $\theta = 0.4$	209
Figura E3 - fda para $\theta = 0.5$	210
Figura E4 - fda para $\theta = 0.6$	210
Figura E5 - fda para $\theta = 0.8$	210
Figura F1 - fda para $\theta = 0.2$	211
Figura F2 - fda para $\theta = 0.4$	211
Figura F3 - fda para $\theta = 0.5$	212
Figura F4 - fda para $\theta = 0.6$	212
Figura F5 - fda para $\theta = 0.8$	212
Figura G1- fdp para $\theta = 0.2$	113
Figura G2- fdp para $\theta = 0.4$	113
Figura G3- fdp para $\theta = 0.5$	113
Figura G4- fdp para $\theta = 0.6$	114
Figura G5- fdp para $\theta = 0.8$	114

Figura H1 - fdp para $\theta = 0.2$	216
Figura H2 - fdp para $\theta = 0.4$	216
Figura H3 - fdp para $\theta = 0.5$	217
Figura H4 - fdp para $\theta = 0.6$	217
Figura H5 - fdp para $\theta = 0.8$	218
Figura I1 - fdp para $\theta = 0.2$	219
Figura I2 - fdp para $\theta = 0.4$	219
Figura I3 - fdp para $\theta = 0.5$	220
Figura I4 - fdp para $\theta = 0.6$	220
Figura I5 - fdp para $\theta = 0.8$	221
Figura J1 - fdp para $\theta = 0.2$	152
Figura J2 - fdp para $\theta = 0.4$	152
Figura J3 - fdp para $\theta = 0.5$	153
Figura J4 - fdp para $\theta = 0.6$	153
Figura J5 - fdp para $\theta = 0.8$	154
Figura K1 - fdp para $\theta = 0.2$	225
Figura K2 - fdp para $\theta = 0.4$	225
Figura K3 - fdp para $\theta = 0.5$	226
Figura K4 - fdp para $\theta = 0.6$	226
Figura K5 - fdp para $\theta = 0.8$	227
Figura L1 - fdp para $\theta = 0.2$	228
Figura L2 - fdp para $\theta = 0.4$	228
Figura L3 - fdp para $\theta = 0.5$	229
Figura L4 - fdp para $\theta = 0.6$	229
Figura L5 - fdp para $\theta = 0.8$	230

Figura M1-	gráficos da fdp da classe beta Gama - γ	231
Figura M2-	gráficos da fdp da classe beta Exponencial - γ	193
Figura M3-	gráficos da fdp da classe beta Cauchy - γ	232
Figura M4-	Gráficos da fdp da classe beta Beta - γ	155
Figura M5-	gráficos da fdp da classe beta Uniforme - γ,.,,.....	155

Lista de tabelas

Tabela 2.1 -	Classes de distribuições.....	26
Tabela 3.1 -	Alguns subcasos gerados pelo método MGM-fda 1.....	53
Tabela 3.2 -	Alguns subcasos gerados pelo método MGM-fda 2.....	60
Tabela 3.3 -	Alguns subcasos gerados pelo método MGM-fdp 1.....	70
Tabela 3.4 -	Alguns subcasos gerados pelo método MGM-fdp 2.....	78
Tabela 4.1 -	Aplicação do método MGM-fda.....	90
Tabela 4.2 -	Aplicação do método MGM-fdp.....	92
Tabela 4.3 -	Valores da simulação por reamostragem ponderada.....	118
Tabela 4.4 -	Valores estimados para distribuições.....	142
Tabela 4.5 -	Critérios de escolha para distribuições.....	142
Tabela 4.6 -	AIC para escolha de distribuição a partir de dados simulados.....	170
Tabela A1 -	Dados reais aplicados para a distribuição Seno– G_1 , G_2	223

Lista de apêndice

	Página
Apêndice.....	183
Apêndice A: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	183
Apêndice B: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2, \dots	184
Apêndice C: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	186
Apêndice D: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	188
Apêndice E: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	189
Apêndice F: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	191
Apêndice G: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	193
Apêndice H: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	194
Apêndice I: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	197
Apêndice J: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	200
Apêndice K: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	201
Apêndice L: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	204
Apêndice M: Gráficos das fdp's para a classe beta $G - \gamma$	207
Apêndice N: Códigos do R para construção de gráficos e tabelas.....	209

Sumário

1. Introdução	19
2. Revisão de literatura	21
2.1 Introdução.....	21
2.2 Modelagens	22
2.3 Classes e famílias de distribuições de probabilidade e, distribuições de probabilidade	23
2.3.1 Método T-X	28
2.3.2 Distribuição beta.....	28
2.3.3 Distribuição gama.....	30
2.3.4 Distribuição normal.....	30
2.3.5 Distribuições Trigonométricas	31
2.4 Método de Máxima Verossimilhança	33
2.5 Critérios de seleção de modelos.....	35
2.5.1 Critério de Akaike – AIC	36
2.5.2 Critério de Akaike Corrigido - AICc.....	37
2.5.3 Critério de informação bayesiano - BIC.....	37
2.5.4 Critério de informação de Hannan-Quinn - HQIC.....	38
2.6 Teste de Cramér Von Mises e Anderson-Darling	39
2.6.1 Teste de Anderson-Darling	39
2.6.2 Teste de Cramér Von Mises.....	39
2.7 Entropia	40
2.7.1 Entropia de Rényi.....	41
2.8 Métodos de reamostragens	41
2.8.1 <i>Bootstrap</i>	42
2.8.2 Reamostragem ponderada.....	45
2.9 Algoritmos Genéticos.....	46
3. Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções	49
3.1 Introdução.....	49
3.2 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas	50
3.2.1 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas com misturas de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas – tipo 1	51

3.2.1.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)	53
3.2.2 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas com misturas de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas – tipo 2	58
3.2.2.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)	59
3.3 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades – fdp's	64
3.3.1 Métodos Geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades a partir da construção de funções bijetoras de ligações com Misturas de baseline a partir da construção de funções de ligações monotônicas tipo 1 (MGM-fdp 1)	65
3.3.1.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)	70
3.3.2 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades a partir da construção de funções bijetoras de ligações com Mistura de baseline a partir da construção de funções de ligações monotônicas – tipo 2 (MGM-fdp 2)	76
3.3.2.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)	78
3.4. Suportes para as Classes de Distribuições Probabilísticas.	84
3.4.1 Estudo do suporte e do comportamento dos métodos	84
3.5. Identificabilidade das classes geradas pelos métodos	86
4. Aplicações	89
4.1 Introdução	89
4.2 Geração de algumas classes e distribuições existentes na literatura	89
4.2.1 Geração de algumas classes e distribuições existentes na literatura via composições de fda's	90
4.2.2 Geração de algumas classes e distribuições existentes na literatura via composições de fdp	92
4.3 Classe proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fda e suas propriedades de caracterização ...	95
4.3.1 Modelo funcional da fda da classe seno - G_1, G_2	95
4.3.2 Modelo funcional da fdp da classe seno - G_1, G_2	95
4.3.3 Expansões da função de distribuição acumulada da classe seno - G_1, G_2 ...	96
4.3.4 Expansões da função de distribuição de probabilidade da classe seno - G_1, G_2	98
4.3.5 Função risco usando a classe seno - G_1, G_2	99
4.3.6 Expansão para os momentos de ordem m para a classe seno - G_1, G_2	100
4.3.7 Expansão para a função geradora de momentos para a classe seno - G_1, G_2	102
4.3.8 Expansão para a função característica para a classe seno - G_1, G_2	104
4.3.9 Expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe seno - G_1, G_2	107

4.3.10	Expansão para o coeficiente geral para a classe seno - G_1, G_2	108
4.4.11	Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe seno - G_1, G_2	109
4.3.12	Entropia de Rényi usando a classe seno - G_1, G_2	111
4.3.13	Estudo do comportamento da classe seno - G_1, G_2 através de gráficos gerados por algumas bi-baselines	112
4.3.14	Estudo do comportamento da classe seno - G_1, G_2 através de aplicação em dados simulados com algumas bi-baselines	115
4.3.15	Aplicação em dados simulados da classe seno – G_1, G_2	117
4.4	Distribuição proposta pela classe seno - G_1, G_2 e suas propriedades de caracterização	124
4.4.1	Modelo funcional da fda da distribuição seno - Gama, Beta	124
4.4.2	Modelo funcional da fdp da distribuição seno - Gama, Beta	126
4.4.3	Expansões da função de distribuição acumulada da distribuição seno - Gama, Beta	127
4.4.4	Expansões da função de distribuição de probabilidade da distribuição seno - Gama, Beta.....	127
4.4.5	Função risco usando a distribuição seno - Gama, Beta	128
4.4.6	Expansão para os momentos de ordem m para a distribuição seno - Gama, Beta	129
4.4.7	Expansão para a função geradora de momentos para a distribuição seno - Gama, Beta	131
4.4.8	Expansão para a função característica para a distribuição seno - Gama, Beta.....	133
4.4.9	Expansão para os momentos centrais de ordem m para a distribuição seno - Gama, Beta.....	134
4.4.10	Expansão para o coeficiente geral para a distribuição seno - Gama, Beta.....	136
4.4.11	Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição seno - Gama, Beta.....	138
4.4.12	Entropia de Rényi usando a distribuição seno - Gama, Beta	139
4.4.13	Aplicação em dados reais da distribuição seno - Gama, Beta	140
4.5	Classe proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp e suas propriedades de caracterização .	143
4.5.1	Modelo funcional da fdp da classe beta $G - \gamma$	143
4.5.2	Modelo funcional da fda da classe beta $G - \gamma$	144
4.5.3	Expansões da função de distribuição de probabilidade da classe beta $G - \gamma$	144
4.5.4	Expansões da função de distribuição acumulada da classe beta $G - \gamma$	145
4.5.5	Função risco usando a classe beta $G - \gamma$	146
4.5.6	Expansão para os momentos de ordem m para a classe beta $G - \gamma$	147
4.5.7	Expansão para a função geradora de momentos para a classe beta $G - \gamma$..	148

4.5.8	Expansão para a função característica para a classe beta $G - \gamma$	149
4.5.9	Expansão para os momentos centrais de ordem m para a Classe beta $G - \gamma$	150
4.5.10	Expansão para o coeficiente geral para a classe beta $G - \gamma$	151
4.5.11	Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe beta $G - \gamma$	152
4.5.12	Entropia de Rényi usando a classe beta $G - \gamma$	153
4.5.13	Estudo do comportamento da classe beta $G - \gamma$ através de gráficos para alguns valores dos parâmetros	154
4.6	Distribuição proposta pela classe beta $G - \gamma$ e suas propriedades de caracterização	156
4.6.1	Modelo funcional da fdp da distribuição beta Exponencial - γ	156
4.6.2	Modelo funcional da fda da distribuição beta Exponencial - γ	157
4.6.3	Expansões da função de distribuição de probabilidade da distribuição beta Exponencial - γ	158
4.6.4	Expansões da função de distribuição acumulada da distribuição beta Exponencial - γ	159
4.6.5	Função risco usando a distribuição beta Exponencial - γ	159
4.6.6	Expansão para os momentos de ordem m para a distribuição beta Exponencial - γ	160
4.6.7	Expansão para a função geradora de momentos para a distribuição beta Exponencial - γ	162
4.6.8	Expansão para a função característica para a distribuição beta Exponencial - γ	163
4.6.9	Expansão para os momentos centrais de ordem m para a distribuição beta Exponencial - γ	164
4.6.10	Expansão para o coeficiente geral para a distribuição beta Exponencial - γ	165
4.6.11	Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição beta Exponencial - γ	167
4.6.12	Entropia de Rényi usando a distribuição beta Exponencial - γ	168
4.5.13	Aplicação em dados simulados da distribuição beta Exponencial - γ através de gráficos para alguns valores dos parâmetros	169
5.	Conclusões	172
	REFERÊNCIAS.....	174
	APÊNDICE.....	183
	Apêndice A: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	183
	Apêndice B: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	184
	Apêndice C: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	186
	Apêndice D: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	188

Apêndice E: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	189
Apêndice F: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2	191
Apêndice G: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	193
Apêndice H: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	194
Apêndice I: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	197
Apêndice J: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	200
Apêndice K: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	201
Apêndice L: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2	204
Apêndice M: Gráficos das fdp's para a classe beta $G - \gamma$	207
Apêndice N: Códigos do R para construção de gráficos e tabelas	209
ANEXOS	223
Anexo A: Tabela com dados reais aplicados para a distribuição seno – G_1, G_2 ..	223

1. Introdução

Em estudos sobre fenômenos e experimentos, de modo geral, há comportamentos cujas modelagens são requeridas para a estimativa de parâmetros de variáveis, dados populacionais e a definição de modelos.

Generalizações e extensões de distribuições simétricas e assimétricas, discretas e contínuas são propostas na literatura em uma boa quantidade e, algumas delas, são expostas nos trabalhos de Arslan (2004), Cysneiros, Paula e Galea (2005), Rootzén e Tajvidi (2006), Barros (2010), Cordeiro e Castro (2011), Kundu, Balakrishnan e Jamalizadeh (2013), Adamski, Human e Bekker (2012), Lin e Li (2014) e Adamski *et al* (2013). São modelos relevantes dadas às sensibilidades dos dados a serem modelados

Com o avanço dos estudos na área computacional e, conseqüentemente a constante evolução de programas mais eficientes, como o R que é uma linguagem de programação direcionada à manipulação, visualização e análise de dados, torna-se possível utilizar técnicas matemáticas para desenvolver diferentes modelos aplicados aos estudos de diversos fenômenos.

Nota-se que hipóteses básicas utilizadas geram modelos que, alterando os valores de certos coeficientes, as equações resultantes podem modelar muito bem o fenômeno estudado conforme a área em questão.

Deste modo, o objetivo geral deste trabalho foi propor métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas. Para a proposta distribuição foram feitas aplicações a dados simulados e reais para verificar o ajuste do modelo proposto.

Como objetivos específicos têm-se: apresentar quatro métodos que generalizam e constroem distribuições de probabilidades partindo da composição de funções; relacionar alguns subcasos dos métodos propostos; desenvolver as proposições dos métodos geradores de distribuições probabilísticas via composições de fda; demonstrar as proposições dos métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas por meio da composição de fdp e fazer aplicações em dados simulados e reais distribuições geradas pelos métodos propostos.

Para atingir os objetivos propostos, foram criadas classes de distribuições utilizando funções monotônicas de distribuições predefinidas, gerando modelos a partir das técnicas matemáticas e estatísticas propostas, derivando as suas propriedades estatísticas, como os cumulantes, média, variância, desvio-padrão,

desvio-médio, curtose, assimetria, função geradora de momentos, função característica e análise gráfica.

Os métodos geradores sugeridos são apresentados na forma de proposições, ampliando os processos para construção de distribuições de probabilidades. Especificamente, as classes de distribuições foram encontradas por meio de funções monotônicas univariadas predefinidas e distribuições univariadas conhecidas.

Através de aplicações a dados reais, como experimento, foi usada a base de dados de Hipel e McLeod (1994) composto por 498 observações do número relatado mensalmente de varicela na Cidade de Nova York entre 1931-1972, divididos por 1000, para o primeiro método que é oriundo da fda verificando o ajuste dos modelos para os dados utilizados.

2. Revisão de literatura

2.1 Introdução

Neste capítulo abordar-se-ão as modelagens e sua importância para interpretação e previsões de fenômenos que podem ser usados em muitas áreas do conhecimento. Também serão apresentadas distribuições de probabilidades em que o foco desta pesquisa são as distribuições univariadas, com uma ou duas distribuições base, aqui denominadas de monobaseline ou bibaselines, respectivamente.

As distribuições tais como as multivariadas, multibaselines e as matriciais não farão parte desta pesquisa, apesar de serem explicitadas neste trabalho por suas relevâncias nesta área de estudo.

Propõe-se um quadro com algumas classes de distribuições probabilísticas encontradas na literatura. Na sequência foi exposto o método de máxima verossimilhança – MMV, que serve para estimação dos parâmetros de um modelo, bem como, alguns critérios para seleção de modelos, compreendendo o critério de Akaike – AIC, critério de Akaike corrigido – AICc, critério de informação bayesiano – BIC e, o critério de informação de Hannan-Quinn – HQIC.

Foram realizados os testes de Cramér Von Mises e de Anderson-Darling, além do teste de entropia de Rényi, usados para fornecer medidas de incerteza de uma distribuição de probabilidade. Contudo, para testar a suposição de normalidade dos dados o estudo utilizou apenas as duas citadas.

Vale salientar da importância das simulações, que neste caso, para dados não reais, usou-se o método de reamostragens como a reamostragem ponderada e o bootstrap que segundo Wasserman (2004) é uma técnica robusta para obtenção de estimativas e erros padrão quaisquer.

2.2 Modelagens

Um modelo é uma formulação que vem descrever fenômenos, inclusive do mundo real, de forma que seja possível atingir a representação, interpretação e previsões desses fenômenos e, podendo ser usado em vários campos do conhecimento.

Ao fazer a utilização de um modelo, não há pretensão que ele seja uma cópia do mundo real, mas que seja a simplificação que apresente os principais processos do estudo escolhido, possibilitando a percepção e previsão de novas situações dentro deste estudo. Portanto, um bom modelo é considerado um espelho da realidade (VALENTIN e GUIMARÃES, 2004).

Assim, deve-se estar claro que, apesar do modelo poder explicar certo fenômeno e ser destinado para ilustrar determinados aspectos do problema em estudo, sem, contudo, representar todos os detalhes possíveis, visto que há perda de informação (EMILIANO, 2013).

Para Brito (2014) pode-se ainda definir um modelo como

uma formulação matemática baseada em hipóteses que busca representar fenômenos físicos ou sistemas biológicos, com o intuito de gerar uma equação matemática que possa descrever, explicar e representar o(s) fenômeno(s) com certo nível de confiabilidade. (p. 23)

Desta forma, nota-se a necessidade de criar modelos mais flexíveis, que possam modelar de melhor forma fenômenos atípicos, captando assim mais informações, proporcionando a compreensão dos mesmos.

É importante salientar que alguns modelos comumente utilizados, que se pode considerar como os modelos clássicos da literatura como a distribuição normal, exponencial, entre outras, muitas vezes não apresentam a melhor adequação para alguns conjuntos de dados reais (COLES, 2001). Assim, surge o constante interesse na obtenção de novas distribuições.

Vale destacar que desde 1925, Amoroso (1925) já trabalhava com generalizações de distribuições.

Deste modo, é perceptível a relevância da área de modelagens e métodos computacionais para construção de modelos mais flexíveis que os existentes e, conseqüentemente adequação da modelagem de dados reais.

2.3 Classes e famílias de distribuições de probabilidade e, distribuições de probabilidade

As distribuições de probabilidade são importantes ferramentas para descrever fenômenos, uma vez que fornecem modelos eficazes que ajudam a representar problemas reais. Isso ocorre porque as distribuições contêm uma quantidade significativa de informações sobre determinado evento, permitindo realizar análises de desempenho através de abordagens analíticas ou de simulações.

Algumas aplicações de distribuições de probabilidades podem ser encontradas em Veloso & Malik (2010) e Santos & Cunha (2016) apresentando seu uso na área da saúde, Drachler *et al.* (2003) e Alves *et al.* (2010) na área social, Bernardi *et al.* (2001) e Sabino *et al.* (2014) no campo ambiental e, nas ciências agrárias pode-se apontar Santos (2019) e Silveira *et al.* (2019) como exemplos de aplicações, dentre outras aplicações em outras áreas.

Para Lee *et al.* (2013), tem-se a revisão de alguns métodos, as distribuições univariadas têm origens em três formas que são apresentadas como método de equação diferencial, método de transformação e o método quantílico. Esses métodos são os comumente apresentados antes da década de 80. A partir da década de 80 surgem os métodos geradores de distribuição assimétrica, método da adição de parâmetros a uma distribuição já existente, método gerador-beta, que é a classe beta-G, método transformado-transformador que é a família T-X, definido por Alzaatreh *et al.* (2013) e o método de composição.

No caso de métodos que generalizem famílias de distribuições, pode-se recorrer ao método T-X, em que este toma por consideração a distribuição de duas variáveis aleatórias quaisquer, sendo T (o transformado) e, X (o transformador). É possível encontrar algumas classes para famílias oriundas deste método já presentes na literatura (AHMAD *et al.*, 2019).

O princípio dessas distribuições é que dado uma distribuição com função de distribuição (fd) contínua $G(x)$, sua generalização ou exponencialização é obtida por $F(x) = G^a(x)$, com $a > 0$.

A distribuição Weibull Exponencializada foi proposta por Mudholkar Srivastava e Freimer (1995), já Gupta e Kundu (1999) obtiveram relações para um caso particular, que foi denominado de distribuição exponencial generalizada (eg). A

revisão da distribuição EG foi feita por Nadarajah (2011), acrescentando, assim, novos resultados.

No caso das distribuições multivariadas, elas possuem sua origem, em geral, por métodos que se baseiam em estatísticas de ordem, mistura, marginais especificadas, variáveis em comum e outros que incluem ponderação (SARABIA e GÒMEZ-DÉNIZ, 2008). Por outro lado, a distribuição multivariada generalizada de Marshall-Olkin, que engloba a distribuição multivariada exponencial como um caso especial, possui um papel fundamental nos estudos de análise de sobrevivência (LIN e LI, 2014).

A generalizada de Pareto abordada sobre o método de blocos de máxima, a partir de distribuições de valores extremos de distribuições de Pareto (ROOTZÉN e TAJVIDI, 2006) e, sua distribuição assimétrica multivariada generalizada Beta Tipo II tem origem nas distribuições qui-quadradas (ADAMSKI *et al.*, 2013), representando importantes generalizações com aplicações em análise de formas.

Nota-se que é comumente empregado o uso de alguns termos tais quais distribuição de probabilidade, família de distribuições de probabilidade e classe de distribuições de probabilidades, algumas vezes o nome classe de distribuições e família de distribuições são apresentadas como sinônimos.

Na estatística é comum usar o termo família de distribuições de probabilidades, uma vez que essas famílias são conjuntos de distribuições de probabilidades relacionadas que compartilham características semelhantes.

Assim, cada família é composta por diferentes distribuições que possuem uma estrutura comum, tais como propriedades matemáticas, formas funcionais ou parâmetros. Dentro de uma família de distribuições, têm-se que cada distribuição específica é caracterizada por seus parâmetros únicos, que afetam sua forma, localização e escala. Esses parâmetros podem controlar aspectos diferentes da distribuição, como a média, a variância ou a assimetria, por exemplo.

Um exemplo bastante comum é a distribuição beta. Esta distribuição é uma família de distribuições de probabilidade contínuas que estão definidas no intervalo $[0,1]$, possuindo dois parâmetros positivos α e β , que são expoentes da variável aleatória e controlam a forma da distribuição. Portanto, é possível encontrar outras distribuições a partir da distribuição beta e cada uma delas possuem suas próprias propriedades e aplicações específicas. Vale ressaltar que essas famílias e tipos de distribuições de probabilidade são fundamentais na modelagem e na análise de

fenômenos incertos, permitindo aos pesquisadores escolher a distribuição adequada com base nas características dos dados e nas suposições adequadas para o problema que está sendo estudado.

Outros exemplos:

- **Família da distribuição de Pareto** que consta na literatura várias formas dela e suas generalizações como a distribuição de Pareto Generalizada (DPG). Essa distribuição foi estendida para a distribuição de Pareto transformada chamada de distribuição Bem urr. Além disso, distribuições como a exponencial, a potência, a logística e a distribuição qui-quadrado são relacionadas com a distribuição de Pareto por meio de algumas transformações.
- **Distribuição exponencial generalizada** – EG, que também é chamada de distribuição exponencial exponenciada, o que torna a distribuição exponencial como caso particular dessa distribuição, ou seja, quando $\alpha = 1$. Além disso, mais quatro distribuições exponenciais do tipo: gama exponencial, Weibull exponencial, exponencial Gumbel e a distribuição Fréchet exponencial, apontados em Santos (2012) generalizam as distribuições gama, Weibull, Gumbel e Fréchet da mesma maneira que a distribuição EG estende a distribuição exponencial.

Acrescenta-se que Tahir e Nadarajah (2015) fizeram uma revisão dos modelos baseados na classe Beta-G e, até aquele momento essa classe já havia introduzido quarenta e cinco novos modelos de distribuições de probabilidade, 28 da família exponencial e mais 28 da família Marshall-Olkin extendida, 16 da McDonald e, 13 da Kumaraswamy.

As Classes de Distribuições de Probabilidade são expressões matemáticas que geram distribuições e famílias de distribuições, ou seja, uma expressão mais geral de modo a criar novas famílias e distribuições de probabilidades, podendo gerar distribuições já existentes na literatura ou distribuições inéditas. Um exemplo conhecido de classe de distribuições é a classe das distribuições exponenciais que inclui diversas famílias tais como a exponencial, exponencial generalizada, a gama e a Weibull, por exemplo.

Desta forma, pode-se notar a importância da criação de novos modelos é que, a depender da situação em estudo, faz-se necessário o uso de modelos mais

sensíveis à massa de dados ou menos sensíveis a pontos extremos. Porém, vale salientar, que o foco deste trabalho não é a aplicação de generalizações.

Sendo assim, é possível encontrar algumas generalizações e extensões em Arslan (2004), Cysneiros *et al* (2005), Rootzén e Tajvidi (2006), Schmidt, Hrycej e Stütze (2006), Barros (2010), Cordeiro e Castro (2011), Ademola e Ahamefula (2012), Adamski *et al* (2013), Kundu, Balakrishnan e Jamalizadeh (2013), Lin e Li (2014) e, também em Brito (2014) que cria um método gerador de distribuições com casos univariado e multivariado e unibaseline ou multibaseline, tendo ainda mais generalizações e extensões em Brito *et al* (2019), Silveira *et al* (2019), Silveira *et al* (2023) e, Cordeiro *et al* (2023), por exemplo.

Ainda existem distribuições na forma matriciais como é possível encontrar em Muirhead (2005), porém, estas não serão abordadas neste trabalho. Vale salientar ainda que em Brito (2014) é possível encontrar além de distribuições univariadas ou multivariadas, sendo unibaseline ou multibaseline, também é possível também obter distribuições matriciais.

A Tabela 2.1 a seguir apresenta algumas classes de distribuições probabilísticas existentes na literatura, suas nomenclaturas e o trabalho em que as mesmas foram apresentadas.

Tabela 2.1 – classes de distribuições com suas respectivas expressões e trabalho em que foram apresentadas.

Classe de Distribuição Probabilística	Nome	Trabalho
$F(x) = \int_a^{W[G(x, \xi)]} r(t) dt$	Método T-X	Alzaatreh <i>et al.</i> (2013)
$F(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^{G(x)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$	Beta-G	Eugene, Lee e Famoye (2002)
$F(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{-\ln[1-G(x)]} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$	Gama	Zografos; Balakrishnan (2009)
$F(x) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{-\log[G(x)]} t^{\delta-1} e^{-t} dt$	Gama-G	Torabi e Hedesh (2012)
$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)\beta^\alpha} \int_0^{G(x)/[1-G(x)]} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} dt$	Gama-G	Ristić e Balakrishnan (2012)
$F(x) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{-\log[G(x)]} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt,$	Gama-G	Ristić e Balakrishnan (2012)
$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{[1-G(x)]/G(x)}^\infty t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$	Gama-G	Brito (2014)
$F(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_{(1-G(x))^\theta}^{(1-\theta)G(x)+\theta} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$	BETA	Souza <i>et a</i> (2017)
$F(x) = 1 - \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{1-G(x)}{G(x)}} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$	Gama-G	Brito <i>et al</i> (2019)
$F(x) = 1 - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{-\log(G(x))} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$	Gama-G	Cordeiro <i>et al</i> (2017)
$F_G(x) = \int_{-\infty}^{\frac{2G(x)-1}{G(x)(1-G(x))}} d\Phi(t)$	Normal-G	Silveira <i>et al</i> (2019)

$F_G(x) = \int_{-\infty}^{\tan\left(\pi\left[G(x)-\frac{1}{2}\right]\right)} d\Phi(t)$	Normal Tangente-G	Silveira <i>et al</i> (2019)
$F_{G_1, G_2}(x) = \int_{\log[1-G_2(x)]}^{\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}} d\Phi(t)$	Normal-(G ₁ , G ₂)	Silveira <i>et al</i> (2023)
$F_{G_1, G_2}(x) = \int_{\log(1-G_2(x))}^{\tan\left(\frac{\pi}{2}G_1(x)\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\Phi(t)$	Normal-tangente-logaritmo-(G ₁ , G ₂)	Cordeiro <i>et al</i> (2023)

Fonte: autoria própria

As classes de distribuições generalizadas têm sido objeto de estudo na estatística. Muitos pesquisadores têm interesse nesse ramo, sendo motivados por buscar novas distribuições que melhor se ajustem aos fenômenos reais. Souza (2017) afirma que a forma generalizada de uma distribuição flexibiliza, de uma maneira satisfatória, a modelagem dos dados que possuem assimetria. Deve-se isso, ao fato, da mesma possuir capacidade de englobar muitos submodelos.

Machado (2019) afirma que foram publicadas, na última década, novas famílias de distribuições contínuas que podem ter utilidades na estatística aplicada, generalizando distribuições já existentes por meio de novos parâmetros, obtendo-se assim, modelos mais flexíveis. Elas podem servir como alternativas para outras distribuições na modelagem de dados reais oriundos em diversas áreas como na medicina, meteorologia, engenharia, hidrologia, ciências biológicas, ciências agrárias, entre outros.

Para este trabalho, foi adotado o termo distribuição-base ou *baseline* para a família de distribuições a ser generalizada e indicamos por $G(x)$, a fda da distribuição-base e $g(x)$, a sua fdp.

O próximo tópico dedica-se a apresentar algumas distribuições e métodos que generalizam e criam distribuições e/ou classes/famílias de distribuições, já existentes na literatura. Nota-se, porém, que serão escolhidas apenas algumas distribuições e métodos que possuam similaridade com o que será apresentado neste trabalho.

Primeiramente será apresentado o método T-X, que é um método desenvolvido por Alzaatreh *et al.* (2013) e, envolve diversas famílias de distribuições.

2.3.1 Método T-X

Esse método foi proposto por Alzaatreh *et al.* (2013), em que os autores desenvolveram uma generalização para geração de famílias de distribuições. Para isso, leva em consideração a distribuição de duas variáveis aleatórias quaisquer T (o transformado) e X (o transformador). Algumas classes para famílias oriundas deste método podem ser encontradas em Ahmad *et al.* (2019).

Essa família de geradores T-X é relevante pois engloba várias famílias de distribuições facilmente encontradas na literatura. Sua fda é expressa por:

$$F(x) = \int_a^{H[G(x; \eta)]} r(t) = R\{H[G(x; \eta)]\}, \quad x \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$$

em que $r(t)$ e $R(t)$ são fdp e fda, respectivamente, de uma variável aleatória T , e $H[G(x; \eta)]$ é função de uma fda $G(x; \eta)$, associada a fdp $g(x; \eta)$ de uma variável aleatória X , com vetor de parâmetros η . Temos ainda que $H[G(x; \eta)]$ satisfaz as condições:

1. $H[G(x; \eta)] \in [a, b]$;
2. É diferenciável e monotonicamente não decrescente;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} H[G(x; \eta)] = a$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} H[G(x; \eta)] = b$

A seguir será abordada a distribuição beta, que é uma família de distribuições definidas no intervalo $[0, 1]$, além disso, abordar-se-á também sobre distribuições generalizadas

2.3.2 Distribuição beta

A distribuição beta é uma família de distribuições de probabilidades contínuas definidas sobre o intervalo $[0; 1]$, parametrizado por dois parâmetros positivos, chamados α e β , que atuam como expoentes da variável aleatória, servindo de para controlar o formato da distribuição. A distribuição beta é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{(1-x)^{\beta-1}x^{\alpha-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

Em que, Γ é a função gama e B é a função beta.

Note que se for tomado, na distribuição beta, os valores de $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, obtém-se a distribuição uniforme.

Sobre o estudo de classes de distribuições, Souza (2016) afirma que há um crescimento pesquisas na busca de novos geradores de distribuições ou de classes de distribuições generalizadas, esse crescimento se dá pelo avanço tecnológico que proporciona maior possibilidade de obtenção de distribuições de probabilidades mais complexas que podem descrever com mais fidelidade um determinado fenômeno ou certo experimento.

Rassalta-se, novamente, que Amoroso (1925) foi um dos primeiros pesquisadores a obter distribuições generalizadas, em que abordou em o seu trabalho a distribuição gama generalizada. A literatura também aponta diversos autores que desenvolveram várias classes oriundas da distribuição beta.

Como exemplo, tem-se Eugene *et al.* (2002) que se baseando na distribuição beta propuseram uma classe mais geral de distribuições de uma variável aleatória, que foi definida com base na logit da variável aleatória beta utilizando dois parâmetros, com função de inserir, respectivamente, a assimetria e variação do peso da cauda.

Além do trabalho de Eugene *et al.* (2002), que definiu a distribuição beta normal, o trabalho de Nadarajah e Kotz (2004) que apresentam a distribuição beta Gumbel. Vale perceber que no mesmo ano Nadarajah e Gupta (2004) propõem a distribuição beta Fréchet e, a beta exponencial é essência do trabalho de Nadarajah e Kotz (2006a).

Vale ressaltar que, segundo Santos (2012, p. 79), esses trabalhos tiveram “dificuldades matemáticas, porque a distribuição beta não é facilmente tratável e, em particular, a sua função de distribuição acumulada (fda) envolve a função beta incompleta”. Entretanto, como já argumentado anteriormente, hoje se tem um bom aparato tecnológico, tanto lógico quanto físico, que proporciona o avanço do estudo na área de criação de novas classes de distribuições de probabilidade.

Com diversas aplicações, será apresentada a distribuição gama, embora haja classes e famílias desta distribuição, este tópico ficará restrito à distribuição, posto que já foram apresentadas algumas na tabela 2.3.1.

2.3.3 Distribuição gama

Cabral Neto (2013) afirma que a distribuição gama está amplamente aplicada à hidrologia, sendo considerada uma das distribuições mais gerais, posto que muitas distribuições são casos particulares da gama, em que se pode citar a exponencial e a qui-quadrado e outras.

A distribuição é definida por sua equação de (fdp). Considerando sua versão a dois parâmetros a fdp da gama é representada por:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \text{ com } 0 < x < \infty; \alpha \text{ e } \beta \text{ parâmetros positivos, representando}$$

respectivamente os parâmetros de forma e escala.

Assim, define-se a função gama por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0.$$

Uma distribuição considerada como a mais importante é a distribuição normal que, será abordada no próximo tópico.

2.3.4 Distribuição normal

A distribuição normal, conhecida como distribuição de Gauss ou distribuição gaussiana é considerada a distribuição mais usada (FORBES *et al*, 2010), sendo considerada a mais importante das distribuições contínuas (NAGHETTINI e PINTO, 2007; POPOVIC *et al.*, 2017; FREIRE, 2021), isso ocorre devido ao fato de que ela oferece uma aproximação razoável para uma ampla variedade de distribuições, além do desenvolvimento teórico e aplicado (LIMA FILHO, 2009).

Como razões para a importância da distribuição normal, Maes (2005), aponta:

- Grande parte das técnicas utilizadas na estatística baseia-se nessa distribuição;
- Existem diversos fenômenos aleatórios em que seus comportamentos são descritos de forma precisa ou aproximada com uso do modelo probabilístico normal;
- Ela é a forma limitante de várias outras distribuições de probabilidades, como consequência do teorema do limite central – TLC;

- “Diversas estatísticas apresentam distribuições assintóticas normais, ou seja, a distribuição da estatística se aproxima da normal à medida que o tamanho da amostra cresce” (p. 38).

A fdp da distribuição normal é dada pela expressão:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{com } -\infty < x < \infty.$$

Vale salientar que a distribuição normal não possui expressão analítica conhecida para $F(x)$. A falta de expressão analítica para $F(x)$ não pode ser considerado um problema com a geração de variáveis aleatórias para simulações, uma vez que é possível contornar utilizando método de Box-Muller (BOX e MULLER, 1958) para simular dados da distribuição normal.

A seguir será abordado um pouco sobre as distribuições trigonométricas, apesar de se ter na literatura diversos trabalhos sobre distribuições trigonométricas, comparando-se com distribuições baseadas em funções algébricas nota-se que é pouco que se tem sobre as trigonométricas na literatura.

2.3.5 Distribuições Trigonométricas

Apesar de várias formas de distribuições estatísticas baseadas em transformação trigonométricos de dados serem propostas por pesquisadores para modelar dados e, assim, encontrar a adequada distribuição para prever as possibilidades e sua aplicação na vida real nos últimos anos (TOMY e SATISH, 2021), a literatura não apresenta muitas distribuições que são baseadas nas funções trigonométricas (AL-FARIS e KHAN, 2008; CHESNEAU *et al*, 2018), a maioria que se pode encontrar são as baseadas em funções algébricas.

Entre as distribuições que usam distribuições trigonométricas, pode-se apontar algumas como a distribuição de von Mises (FORBES *et al*, 2011), as distribuições introduzidas por Fisher (1993) para análise de dados circulares, as distribuições tipo beta usando algumas funções trigonométricas propostas por Nadarajah e Kotz (2006b), a distribuição circular de Cauchy introduzida por Kent e Tyler (1988) e a distribuição seno quadrado apontada por Al-Faris e Khan (2008), as novas classes trigonométricas de distribuições probabilísticas apresentadas por Souza (2015), a nova classe de distribuição de probabilidade via função seno e

cosseno, proposta por Chesneau *et al* (2018), a nova família de distribuição seno-G apresentada por Mahmood *et al* (2019), a seno Topp-Leone proposta por Al-Babtain *et al* (2020), a família arco seno exponenciada-X apresentada por Wenjing *et al* (2020), a classe de distribuição trigonométrica Tan-G proposta por Souza *et al* (2021), a família seno-G transformada proposta por Jamal *et al* (2021), a nova distribuição trigonométrica com suporte limitado, apontada por El-Bar *et al* (2021), nova distribuição cosseno-G estendida proposta por Muhammad *et al* (2021), e a Normal-tangente-logaritmo com duas distribuições base apresentada por Cordeiro *et al* (2023), por exemplo.

Nota-se assim que, o crescente interesse da análise de dados, e a análise direcional de dados em particular, têm motivado o desenvolvimento de novas abordagens, em que neste trabalho também serão apresentadas abordagens neste sentido. Isso porque os estudos recentes têm destacado a relevância estatística e a aplicabilidade de distribuições trigonométricas para a modelagem de vários fenômenos (AL-BABTAIN *et al*, 2020).

Adicionando a esse interesse o fato que tais classes são simples de manusear, com propriedades matemáticas bem fundamentadas e acessíveis, oferecendo, geralmente, bons ajustes de diferentes tipos de conjuntos de dados (CHESNEAU e ARTAULT, 2021).

Vale salientar que as transformações trigonométricas fornecem versatilidade e flexibilidade à medida que seu(s) parâmetro(s) oscila(m) com a mudança do valor e a função periódica controla a forma como a curva de distribuição se comporta.

Desta forma, a composição de várias funções com comportamento diferente fornece uma melhor maneira de modelar fenômenos do mundo real que faltavam as distribuições estatísticas generalizadas previamente estabelecidas. Com composição adequada de funções trigonométricas e generalizando distribuições considerando os parâmetros adequados aos dados a serem modelados. A deficiência é minimizada ou seja, a distribuição torna-se apta a modelar dados de diferentes naturezas e dá origem a distribuição transformada que melhor se adequa aos dados.

A seguir será apresentado o método de máxima verossimilhança, que é um método que consiste na estimação de parâmetros de um modelo usando as estimativas que tornem máximo o valor da função de verossimilhança.

2.4 Método de Máxima Verossimilhança

Para apresentar a potencialidade das distribuições que foram propostas neste trabalho, geradas a partir dos métodos aqui propostos, elas foram ajustadas a dados simulados e/ou reais, nos quais foram estimadas pelo método da máxima verossimilhança.

Para Colosimo e Giolo (2006), existem diversos métodos de estimação, sendo o método de mínimos quadrados um dos mais conhecidos. Por outro lado, não é aconselhável o uso deste método para estudos de tempo de vida, isso se deve pela sua incapacidade de incorporar censuras em seu processo de estimação.

O método de máxima verossimilhança é o mais utilizado para modelos de análise de sobrevivência, dado ao fato da capacidade de incorporar dados censurados, e possuir propriedades ótimas para grandes amostras, como, por exemplo, a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.

Este método envolve a estimativa dos parâmetros de um modelo utilizando as estimativas que tornem máximo o valor da função de verossimilhança. Sendo equivalente a achar o valor para o parâmetro que torna máxima a função de log-verossimilhança. Em resumo, seu uso generalizado se deve às suas propriedades assintóticas tais como eficiência, normalidade, consistência e invariância. A seguir será apresentado este método.

Tome $\underline{Y} = (Y, \dots, Y)^T$, um vetor de variáveis independentes e identicamente distribuídas de uma variável aleatória $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ gerada de uma fdp conhecida $f(\underline{y}, \underline{\theta})$ de alguma família de distribuições \mathcal{F} , denominada função do modelo estatístico, dependente de um vetor de parâmetros desconhecidos $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$. Definindo-se ainda, $\theta \subseteq \mathcal{R}^p$ como o espaço paramétrico que representa o conjunto de valores possíveis do vetor $\underline{\theta}$.

A função de verossimilhança para $\underline{\theta}$ baseada na observação $\underline{Y} = \underline{y}$ é expressa por $L(\underline{\theta}) = L(\underline{\theta}, \underline{y}) = f(\underline{y}, \underline{\theta})$, $\underline{\theta} \in \theta$. Com frequência as componentes de \underline{Y} são mutuamente independentes para as distribuições em \mathcal{F} e a função de verossimilhança de $\underline{\theta}$ pode então ser expressa por $L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_i(y_i; \underline{\theta})$, em que f_i é a fdp individual da i -ésima observação.

Para Cordeiro (1999), a inferência baseada na verossimilhança pode ser adotada como um processo de se obter informações, pela da função $L(\theta)$, sobre o vetor $\underline{\theta}$, a partir do ponto \underline{y} e do espaço amostral. Em geral não existe uma correspondência biunívoca entre os vetores \underline{y} e $L(\underline{\theta})$, de modo equivalente, determinada verossimilhança pode corresponder a um contorno $R(\underline{y})$.

Assim, esse processo diminui a quantidade de informação sobre $\underline{\theta}$ disponível em \underline{y} . Comumente, utiliza-se o logaritmo da função de verossimilhança $\log(L(\underline{\theta}))$, denominado função de log-verossimilhança. Já que a função logaritmo é monotônica crescente, então, são processos equivalentes, maximizar $L(\underline{\theta})$ e $\ell(\underline{\theta})$ em θ . A função de log-verossimilhança, que também é conhecida como função suporte, pode ser assim escrita:

$$\ell(\underline{\theta}) = \log(L(\underline{\theta})) = \sum_{i=1}^n \log\{f_i(y_i; \underline{\theta})\}.$$

O estimador de máxima verossimilhança – EMV $\hat{\underline{\theta}}$ de $\underline{\theta}$ é o valor que maximiza $L(\underline{\theta})$ em θ , ou seja, $L(\hat{\underline{\theta}}) > L(\underline{\theta})$ para todo $\underline{\theta} \in \theta$. Assim, o estimador de máxima verossimilhança é definido de modo que, para todo $\underline{\theta} \in \theta$, $\ell(\hat{\underline{\theta}}) > \ell(\underline{\theta})$:

$$\hat{\underline{\theta}} = \arg \max_{\underline{\theta} \in \theta} \ell(\underline{\theta}).$$

Vale lembrar que segundo Barros (2014) quando não for possível encontrar a solução analítica das equações geradas por uma classe de distribuição, faz-se necessário utilizar um método numérico-iterativo, como o método BFGS - Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (197) e Shanno (1970), que é implementável no *software* estatístico R.

A seguir serão apresentados alguns critérios de seleção de modelos que serão utilizados neste trabalho.

2.5 Critérios de seleção de modelos

A escolha de um modelo adequado é importante na análise de dados (BOZDANGAN, 1987). Isso porque se deseja o modelo mais parcimonioso, isto é, o modelo que além de explicar melhor o comportamento do fenômeno estudado, admita uma quantidade menor do número de parâmetros.

Desta forma, muitos procedimentos comuns na literatura podem ser utilizados para seleção de modelos. Estes devem considerar a complexidade do modelo no critério de seleção.

O EMV se torna assintoticamente eficiente e a função de verossimilhança tende a ser um critério com maior sensibilidade a pequenos desvios dos parâmetros, caso o tamanho da amostra seja grande e se forem mantidas as condições de regularidade. Neste sentido, dentre os modelos a serem selecionados, o que obtiver o menor valor, em qualquer um dos critérios que serão apresentados a seguir, é o indicado como o que melhor se ajustará aos dados.

Para Emiliano (2013), ocorre perda de informações na representação de um fenômeno por um modelo probabilístico, assim, para que não ocorra comprometimento na compreensão deste fenômeno escolhido para estudo, a perda de informação deve ser a mínima possível, pois, caso contrário, o modelo não explicará de modo satisfatório o fenômeno que está representando. Sabe-se ainda que para um mesmo fenômeno é possível se obter mais de um modelo que o venha a descrever, posto que cada pesquisador tem liberdade de modelar seu estudo seguindo o que julgar mais adequado.

A partir disso, os questionamentos sobre qual modelo seria o mais adequado ao utilizar em determinado estudo começam a aparecer. Assim, é salutar concordar com Emiliano (2013) quando aponta que os critérios de Akaike (AIC), Akaike corrigido (AICc) e o bayesiano (BIC) são os mais conhecidos e aplicados e já estão implementados na maioria dos programas estatísticos, como no caso do R.

Para esses critérios – AIC, AICc e BIC – tem-se que o que aquele que apresenta o menor valor em um desses critérios é considerado o melhor modelo, ou seja, a melhor sugestão de modelo para ser escolhido pelo pesquisador.

2.5.1 Critério de Akaike – AIC

Akaike (1972) apresenta seu método de identificação de modelos. Akaike (1974) descreveu como é possível abordar sistematicamente o problema de seleção de modelos ao utilizar o critério de informação que foi criado por ele em 1972. Assim, para comparação dos modelos transformados e dos modelos não transformados ajustados aos dados é possível usar o critério de informação de Akaike que é definido por:

$$AIC = -2 \cdot \ell(\hat{\theta}) + 2 \cdot p$$

em que $\ell(\hat{\theta})$ é a log-verossimilhança maximizada de θ e p é o número de parâmetros do preditor linear ou não linear η_i para os modelos. A equação que possui o menor valor do *AIC*, entre os modelos ajustados, pode ser considerada como a aquela que vem explicar melhor os dados.

O critério de Akaike é uma medida relativa da qualidade de ajuste de um modelo estatístico estimado, sendo assim, o *AIC* não é uma prova sobre o modelo no sentido de testar hipótese, mas é uma ferramenta que serve para selecionar modelos. Este critério se fundamenta no conceito de entropia, e oferece uma medida relativa das informações perdidas, quando se usa um determinado modelo para descrever a realidade. Ele é um critério que serve para avaliar a qualidade comparativa do ajuste de um modelo paramétrico, estimado pelo método da máxima verossimilhança.

Em termos práticos, a partir do valor do *AIC* é possível inferir que, como exemplo, se três principais modelos a serem escolhidos estão empatados e os outros modelos forem muito piores, pode-se escolher qualquer um dos três empatados, entretanto, não se deve especificar um valor acima do qual um determinado modelo possa ser considerado como rejeitado.

Outro critério para selecionar modelos a ser apresentado é o critério de Akaike Corrigido *AICc*, que será exposto nas linhas a seguir.

2.5.2 Critério de Akaike Corrigido - AICc

Este critério surge para realizar uma correção para populações finitas do AIC e deriva da informação de Kullback-Leibler em que Sugiura (1978) derivou uma variante de segunda ordem do AIC, sendo dado por:

$$AICc = -2\log(L(\hat{\theta})) + \frac{2np}{n-p-1}$$

que segundo Sugiura (1978) pode ser reescrita de forma equivalente a:

$$AICc = AIC + \frac{2p(p+1)}{n-p-1}$$

em que n é o tamanho amostral e p é o número de parâmetros do modelo.

Burnham e Anderson (2004) indicam seu uso quando a razão $\frac{n}{p}$ é pequena, ou seja $\frac{n}{p} < 40$. Quando essa relação é grande, os dois critérios AIC e AICc possuem resultados semelhantes.

Tomar-se-á ainda o critério de informação bayesiano – BIC que um critério de avaliação definido em termos da probabilidade *a posteriori*. Este critério, o BIC, será apresentado no próximo tópico.

2.5.3 Critério de informação bayesiano - BIC

O Critério de informação bayesiano foi proposto por Schwarz (1978), e é dado por:

$$BIC = -2\log(L(\hat{\theta})) + p\log(n),$$

em que $L(\hat{\theta})$ é a verossimilhança do modelo escolhido, p é o número de parâmetros a serem estimados e n é o número de observações da amostra. Tal como o AIC, este critério seleciona entre todos os modelos testados aquele que tem o menor BIC.

O BIC possui o pressuposto da existência de um modelo que seja verdadeiro e que descreva a relação entre a variável dependente e as diversas variáveis explanatórias nos variados modelos sob seleção. Deste modo, o critério será definido como a estatística que maximiza a probabilidade de identificar o verdadeiro modelo dentre os demais modelos avaliados.

É bom salientar que o BIC é um critério de avaliação de modelos que é definido em termos da probabilidade a *posteriori*, que segundo Paulino *et al.* (2003), esta probabilidade a *posteriori* indica a probabilidade dos dados serem gerados do *i*-ésimo modelo quando os dados x_n são observados. Esse critério é assim chamado porque Schwarz deu um argumento Bayesiano para demonstrá-lo.

Após conhecer os critérios de classificação de modelos de Akaike, Akaike Corrigido e o Bayesiano, será apresentado, a seguir, o critério de informação de Hannan-Quinn – HQIC, que é um modelo alternativo aos AIC e ao BIC.

2.5.4 Critério de informação de Hannan-Quinn - HQIC

O critério de informação de Hannan-Quinn (HQIC) é um critério de classificação de modelos que é alternativo ao AIC e BIC. Ele foi introduzido por Hannan e Quinn (1979) sendo definido por

$$HQIC = -2p \log(\log(n)) - 2 \log(L(\hat{\theta})).$$

em que $L(\hat{\theta})$ é a função de verossimilhança maximizada, p é o número de parâmetros e n é o número de observações da amostra. Segundo Burnham e Anderson (2002, p. 287) “*while often cited, seems to have seen little use in practice*”, ou seja, apesar de ser citado por diversas vezes seu uso na prática não é muito observado. Vale lembrar que o HQIC deve ser mínimo para a escolha do modelo.

Hannan e Quinn (1979) introduziram este critério no contexto de modelos autorregressivos de séries temporais. Shibata (1976) mostrou que o AIC não é consistente, uma vez que superestima assintoticamente o grau de autocorrelação estimado e Hannan e Quinn mostraram que o BIC subestima, quando se utiliza grandes amostras, a ordem da autocorrelação estimada (CAVALARO, 2019).

Também serão apresentados nas linhas a seguir os testes de Cramér Von Mises e de Anderson-Darling.

2.6 Teste de Cramér Von Mises e Anderson-Darling

Os testes de Cramer-Von Mises e Anderson-Darling se baseiam na função de distribuição empírica dos dados. Esses testes possuem vantagens em relação ao teste de aderência qui-quadrado - que não será abordado neste trabalho. Inclui-se como vantagens o maior poder e invariância em relação aos pontos médios dos intervalos escolhidos. Esses testes pertencem à classe quadrática de estatísticas baseadas na função de distribuição empírica, uma vez que utilizam as diferenças quadráticas entre a distribuição empírica e a hipotética.

2.6.1 Teste de Anderson-Darling

O teste de Anderson-Darling foi proposto por Anderson-Darling (1952) sendo o mais utilizado desde que o tamanho da amostra não seja superior a 25. Posteriormente este teste foi modificado por Chen e Balakrishnan (1995). Este teste tem base na função de distribuição empírica, com a ideia de que dada a função de distribuição sob hipóteses nula, os dados poderão ser transformados na distribuição uniforme. Os dados transformados poderão ser testados para uniformidade.

A expressão da estatística desse teste é dada por:

$$A^* = A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [2i - 1] [\log(p_{(i)}) + \log(1 - p_{(n-i+1)})]$$

em que $p_{(i)} = \Phi\left(\frac{[y_{(i)} - \bar{y}]}{s}\right)$ são percentis ordenados da distribuição normal padrão e Φ representa a função de distribuição acumulada normal padrão.

2.6.2 Teste de Cramér Von Mises

Baseando-se na função distribuição empírica, este teste foi proposto por Darling (1957) e, também foi modificado por Chen e Balakrishnan (1995). A expressão da estatística de teste é dada por:

$$W^* = W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(p_{(i)} - \frac{2i - 1}{2n} \right)^2$$

em que $p_{(i)} = \Phi([x_{(i)} - \bar{x}]/s)$ são os percentis ordenados da distribuição normal padrão e Φ representa a função de distribuição acumulada normal padrão.

Os testes de hipótese Anderson-Darling e Cramér-von Mises são discutidos de forma mais detalhada por Chen e Balakrishnan (1995) tomando como regra de comparação suas estatísticas como indicadores de desempenho: quanto menor os valores das estatísticas, melhor será o modelo que está associado a ela.

No próximo tópico será apresentada a entropia aqui trabalhada. Vale salientar que a entropia funciona como uma medida de incerteza de variáveis aleatórias isoladas ou combinadas, ou seja, fornecem uma medida de incerteza de uma dada distribuição de probabilidade, servindo para mensurar a quantidade de informação presente em uma distribuição de probabilidade ou em uma variável aleatória.

2.7 Entropia

No trabalho de Shannon (1948), tem-se a origem do conceito de entropia, em que são apresentados que processos aleatórios como a fala ou a música possuem uma complexidade abaixo da qual o sinal não pode ser comprimido.

O nome deriva da física estatística que chamou a complexidade de entropia e que foi utilizado como a medida de desordem de um sistema. Assim, pode-se perceber que a entropia tem relação com a teoria das probabilidades.

Reforçando o que já foi apresentado, nota-se que a entropia por ser uma medida de incerteza, no sentido que quanto maior o valor da entropia, menor será a informação. Tornando assim a incerteza maior, ou seja, haverá maior aleatoriedade ou desordem.

Neste trabalho será apresentada apenas a entropia de Rényi, visto que a entropia de Shannon é caso particular desta. Ainda é possível citar outras entropias existentes, tais como a entropia Máx ou de Hartley, entropia de colisão, entropia Mín, entropia linear, entropia de Tsallis, entropia de Boltzmann–Gibb, entropia Boltzmann-Gibbs-Shannon, entropia de Daróczy, entropia de ordem α , entropia de grau β , entre outras.

A seguir, será apresentada a entropia de Rényi.

2.7.1 Entropia de Rényi

Foi proposta uma definição mais geral de entropia (RÉNYI, 1976), em que a Entropia de Shannon aparece como um caso particular. Para uma variável aleatória discreta a entropia de Rényi é dada por:

$$H_R(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_{x \in X} p(x)^\alpha$$

Para $\alpha \geq 0$ e $\alpha \neq 1$, definindo assim uma família de entropias com base no parâmetro. A entropia de Shannon é um caso particular da entropia de Rényi quando $\alpha \rightarrow 1$.

É possível se demonstrar que a medida de entropia de Rényi pode ser estendida para variáveis aleatórias contínuas (Gonçalves e Macrini, 2011), porém sem a condição da entropia ser não negativa, e se torna:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right)$$

A seguir, serão apresentados os métodos de reamostragens utilizados neste trabalho. Existem diversos vários métodos de reamostragem. Este trabalho se limita a abordar o método de *bootstrap* e reamostragem ponderada.

2.8 Métodos de reamostragens

As técnicas de reamostragens são úteis principalmente quando os cálculos de estimadores por métodos analíticos forem complexos. Alguns exemplos dessa técnica são os testes de aleatorizações – testes de permutação, *jackknife*, *bootstrap*, validação cruzada, reamostragem ponderada, entre outros.

Esses métodos geram valores em duas etapas, em que na primeira são gerados valores de uma distribuição auxiliar conhecida e, depois, usa uma correção para que esses valores sejam representativos ou ao menos aproximadamente da distribuição *a posteriori*, assim, Smith e Gelfand (1992) indica que se deve tomar a *priori* como distribuição auxiliar.

A seguir será apresentada a técnica de reamostragem que foi criada por Bradley Efron em 1979, sendo usada para estimar viés, variância, quantis ou distribuição da amostragem, por exemplo.

2.8.1 Bootstrap

Esta técnica de reamostragem foi criada por Bradley Efron em 1979, segundo Moore *et al* (2006), e é utilizada para estimação de viés, variância, quantis ou distribuição da amostragem em levantamentos estatísticos e na construção de intervalos de confiança.

O *bootstrap* utiliza várias reamostragens do mesmo tamanho da amostra original, estimando e aproximando parâmetros de interesse, exigindo assim, um desempenho computacional.

Vale salientar que o principal pressuposto é que a amostra tenha boa representatividade da população desconhecida, uma vez que essa amostra vai ser tratada como se fosse a população original.

Lima (2017) reforça a afirmação anterior quando considera que a ideia central deste método é tratar a amostra como a própria população e, a partir dessa amostra “obter réplicas da amostra original, seja por reamostragem com reposição (*bootstrap* não-paramétrico) ou pelo ajuste do modelo ao qual os dados pertencem (*bootstrap* paramétrico)” (p. 21).

Por sua generalidade, essa técnica se encaixa na resolução de problemas complexos, uma vez que ela possui a possibilidade de realizar a estimação pontual e por intervalo de diversos parâmetros (RIZZO e CYMROT, 2006). As autoras ainda apontam que quando se conhece a distribuição do parâmetro a ser estimado, “a coincidência entre o intervalo paramétrico baseado na distribuição de probabilidades do parâmetro e o intervalo *Bootstrap* reforçam a hipótese de veracidade a respeito das suposições do modelo paramétrico” (RIZZO e CYMROT, 2006, p. 488).

Melo Filho *et al* (2002) afirmam que “a grande vantagem desse método é que ele independe do tipo de distribuição de frequência das observações, tornando desnecessária a prévia normalização dos dados, como acontece com a maioria dos métodos convencionais” (p. 896).

Lima (2017) aponta que surgiram variações do *bootstrap*, após aplicações e estudos do mesmo, tais como o *bootstrap* suavizado, *bootstrap* bayesiano, o *bootknife*, *bootstrap* duplo e o *bootstrap* duplo rápido.

Este método de reamostragem é aplicado a vários problemas reais e também em muitas classes de inferência estatística. Devido a sua generalidade é possível usá-lo em um ambiente muito amplo, por exemplo, para estimar intervalos de confiança, em testes de hipóteses, na estimação do viés, na determinação da variância de um estimador, regressão, ajuste de p -valor, confiabilidade, análise de sobrevivência, entre outros que podem ser encontrados em Chernick (1999).

Cordeiro (2011), pondera que para este método de reamostragem ter sucesso é preciso “identificar o esquema de reamostragem mais apropriado. Esta decisão deve basear-se na natureza dos dados e no problema em estudo. Inclusive poder-se-á mesmo optar por outros métodos de reamostragem”.

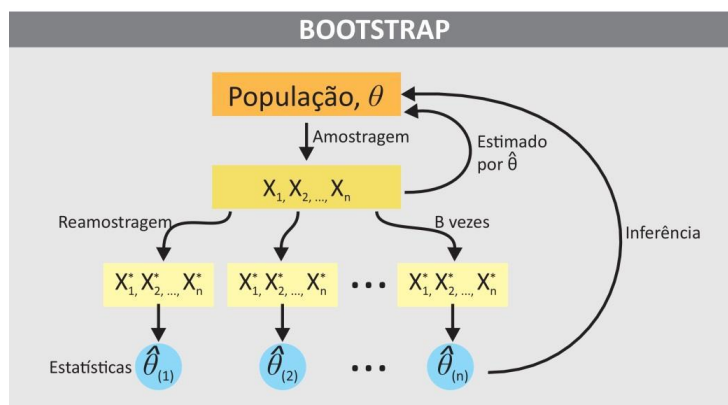
É importante perceber que este método pode ser implementado na estatística não-paramétrica tanto quanto na estatística paramétrica. Para isso é preciso conhecer o problema.

Para o caso não-paramétrico, reamostram-se os dados com reposição, conforme uma distribuição empírica estimada. Isso porque, em geral, a distribuição subjacente aos dados não é conhecida (ALCOFORADO, 2016).

No caso paramétrico, quando há informação suficiente da forma da distribuição dos dados, a amostra “*bootstrap*” será formada efetuando a coleta direta de amostras nessa distribuição, substituindo os parâmetros desconhecidos por estimativas paramétricas (ALCOFORADO, 2016).

Alcoforado (2016) apresenta a figura a seguir como ilustração desse método.

Figura 2.1 – Esquema do método *Bootstrap*



Fonte: Alcoforado (2016, p. 40)

De modo geral, temos o método de *bootstrap* nas linhas a seguir apontado por Dalposso (2017).

Considere θ um parâmetro de uma função de distribuição de probabilidade - fdp F com base em uma amostra aleatória $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ obtida dessa fdp F . Um parâmetro θ é uma fdp F , ou seja, $\theta = s(F)$. Os dados amostrais permitem calcular a estatística $\hat{\theta} = s(\hat{F})$, sendo \hat{F} uma função de distribuição empírica de probabilidades - fde. O procedimento de estimar um parâmetro de F usando a correspondente estatística de \hat{F} é chamado de princípio *plug-in* (EFRON e TIBSHIRANI, 1993). O *bootstrap* utiliza o esse princípio para calcular o erro padrão estimado de uma estatística $\hat{\theta}$.

O método *bootstrap* depende de $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, uma amostra aleatória de tamanho n extraída com reposição de \mathbf{x} , que será conhecida como amostra *bootstrap*. Correspondendo a uma amostra *bootstrap* \mathbf{x}^* , tem-se a réplica *bootstrap* de $\hat{\theta}$, denotada por $\hat{\theta} = s(\mathbf{x}^*)$. O algoritmo *bootstrap* funciona quando se obtêm B amostras *bootstrap* independentes $\mathbf{x}^{*1}, \mathbf{x}^{*2}, \dots, \mathbf{x}^{*B}$ e se calcula as réplicas *bootstrap* correspondentes, $\hat{\theta}^*(b) = s(\mathbf{x}^{*b})$, $b = 1, \dots, B$. As réplicas *bootstrap* calculadas irão formar uma distribuição empírica utilizada nas inferências estatísticas.

Barros (2014), explicita de forma bastante didática que nesse método são “simuladas n realizações $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ de \hat{F}_n com reposição, assim X_i têm probabilidade $\frac{1}{n}$ de ser escolhido.” (p. 30). Salienta-se que “esse processo é repetido B vezes, para se computar o erro-padrão *bootstrap* EP_{boot} de \hat{F}^* ” (BARROS, 2014, p. 30).

Vale lembrar que há vários métodos para calcular o intervalo de confiança *bootstrap*. São eles: intervalo de confiança *bootstrap*, intervalo de confiança *bootstrap* padrão, intervalo de confiança *bootstrap* percentil, intervalo de confiança Percentil Corrigido em relação ao Viés (BCPB) e o intervalo de confiança de Correção do Viés Acelerado. O BCPB faz correções substanciais, em que os extremos do intervalo serão os percentis da distribuição *bootstrap* ajustados, para corrigir o viés e a assimetria da distribuição (ALVES, 2013).

No próximo tópico será abordado sobre a reamostragem ponderada, uma técnica estatística que envolve a amostragem repetida de observações de um conjunto de dados original, em que é atribuído diferentes pesos a cada observação.

Esta técnica serve para estimar parâmetros estatísticos e realizar inferências sobre determina população.

2.8.2 Reamostragem ponderada

Os métodos de reamostragens são aplicados nos casos de ser impossível ou difícil simular valores para distribuições. A ideia geral é dada em duas etapas, em que na primeira, geram-se valores aleatórios de uma distribuição auxiliar conhecida, que geralmente é na prática a distribuição *a priori*. Já na segunda etapa é proposto a utilização de um mecanismo para correção de modo que os valores que forem obtidos sejam representativos da distribuição *a posteriori*.

A reamostragem ponderada utiliza a ideia da criação de valores de uma distribuição auxiliar, mas sem que seja necessário a maximização da verossimilhança.

Este método também chamado de amostragem-reamostragem por importância e foi introduzido por Rubin (1987). Nesse método, toma-se uma segunda amostra (ou uma reamostra) com tamanho S da distribuição discreta em $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ com probabilidades w_1, w_2, \dots, w_S . Tomando novamente a *a priori* como sendo a densidade auxiliar, de forma que, $q(\theta) = p(\theta)$ calculam-se os pesos

$$w_i = \frac{\frac{p(x|\theta_i)\pi(\theta_i)}{q(\theta_i)}}{\sum_{j=1}^n \frac{p(x|\theta_j)\pi(\theta_j)}{q(\theta_j)}} = \frac{p(x|\theta_i)}{\sum_{j=1}^n p(x|\theta_j)}, \quad i = 1, \dots, n$$

Assim, o algoritmo que geram os valores aproximados da *posteriori* será, com base no esquema exposto em Barros (2014, p. 36), da seguinte forma:

- i) Gerar valores $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ da distribuição *a priori* (gerando candidatos);
- ii) Calcular os pesos $w_i, i = 1, \dots, n$ (pesos de importância padronizados);
- iii) Reamostrar valores com probabilidade w_1, w_2, \dots, w_n .

Sendo o método *bootstrap* ponderado pelos w_i 's.

Importante ressaltar que há outros tipos de reamostragem ponderada, tais como a reamostragem ponderada em blocos, a reamostragem balanceada

ponderada em blocos que é uma adaptação da reamostragem balanceada de importância em blocos.

2.9 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos são um conjunto de técnicas de busca e otimização que foram inspirados no princípio de Darwin quanto a mecânica de seleção natural e reprodução genética (GOLDBERG, 1989). Para Atmar (1994) é uma busca estocástica polarizada.

Na teoria de Darwin, os indivíduos mais aptos possuem maior probabilidade de reprodução e os que com mais descendentes possuem maiores chances de perpetuarem seus códigos genéticos nas gerações futuras. Assim, esse algoritmo procura criar indivíduos (ou elementos) que possuam características que sirvam para o problema e, desprezam os demais elementos.

É importante salientar que existem duas formas básicas de gerar nova população, entretanto, eles utilizam o mesmo operador básico. Abaixo seguem quatro formas:

1 - O elitismo, que é o clone dos melhores, e consiste em utilizar alguns indivíduos do começo da lista para compor a nova população. Essa forma é usada buscando evitar que a população piore.

2 - O cruzamento, que é a recombinação, é escolhido dois indivíduos da população, que são denominados de pais. O novo indivíduo será obtido através da combinação dos cromossomos de cada um deles. Como há diversas formas de combinar os cromossomos, haverá diversos operadores de cruzamento.

3 - A mutação, ou seja, o clone modificado, há cópia do indivíduo da população anterior e uma pequena modificação do cromossomo. Igual ao anterior, já que existem muitas formas para modificar o cromossomo, haverá, também, diversos operadores de mutação.

4 – Os Novos, introduzem indivíduos variados, mas podem inserir indivíduos gerados independente da população anterior. Assim, há melhora na busca inicial, principalmente quando há problema gerado por haver mais de um mínimo local.

O algoritmo genético pode ser apresentado de uma forma simplificada proposto por Vargas (2000) como “uma função que recebe como entrada uma

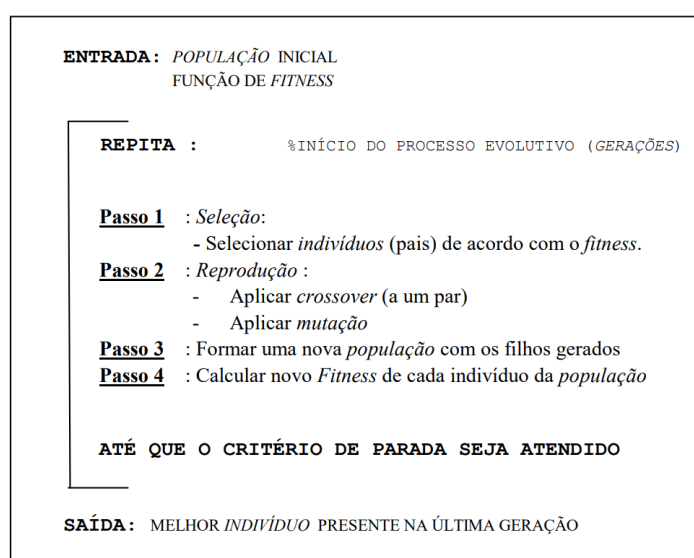
população inicial e uma função de avaliação, normalmente denominada de *fitness*, fornecendo como saída o melhor indivíduo encontrado após o processo evolutivo.” (p. 14).

Para compreensão dos passos, faz-se necessária definição de alguns termos que são a geração, a população, o indivíduo, a função de *fitness*, a seleção, a reprodução e o critério de parada. A geração é o resultado obtido pela aplicação dos passos de 1 a 4 da figura 2.2 a seguir, junto a uma população. Já a população é o conjunto de indivíduos que fazem parte da geração e, o indivíduo é a representação da solução de um determinado problema em que essa representação é denominada de genótipo e a solução de fenótipo e, o problema é o ambiente. A função *fitness* é a função de avaliação que vai medir a adaptação do indivíduo ao ambiente (problema).

Já a seleção é o processo de escolha que vai selecionar os indivíduos que estão mais adaptados (possuem maior *fitness*) e que irão participar do processo de reprodução que por sua vez é o processo em que esses indivíduos mais adaptados possuem a chance de perpetuar o seu material genético ou parte dele, a partir da aplicação dos operadores genéticos de *crossover* e *mutação*. Por fim, o critério de parada é a obtenção de uma solução satisfatória.

De forma mais simplificada, a seguir, tem-se, na figura 2.2. o esquema do algoritmo genético proposto por Vargas (2000).

Figura 2.2 Passos de um Algoritmo Genético



Fonte: Vargas (2000, p. 14)

O que ocorre, em linhas gerais que é que dos elementos que sobreviveram (foram selecionados) é realizado cruzamentos (*crossover*) para gerar novos elementos (que podem sofrer mutações após serem gerados – Passo 2 da figura 2.2). Esses cruzamentos dependem do que está sendo estudado, a exemplo, pode-se realizar uma operação estatística em um conjunto de números iniciais (dados) e, a partir disso, selecionar elementos formando um novo conjunto que a partir de operações nos elementos selecionados, gerarão outros elementos, sendo descartados aqueles que não satisfizerem determinadas condições ao serem testados/avaliados, repetindo o processo até a obtenção do conjunto desejado com elementos que possuem potencial para modelar o evento em questão.

Vale lembrar que para o contexto deste trabalho, foi utilizada a função qui-quadrado proposta em Holanda e Barros (2016), que apesar de não ser comumente utilizada na área de estatística, é um método usual na área da Física. Assim, a grosso modo, este método se baseia no histograma e toma-se a diferença entre o observado e o esperado buscando através do algoritmo genético – neste caso – justifica-se o uso do ajuste da função de *fitness*.

Após a exposição de cada tópico aqui descrito serão apresentados os métodos geradores no próximo capítulo em que o primeiro método é o gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas – MGM fda e, o segundo método é o gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades a partir da construção de funções de ligações com uma *baseline* - MGM fdp.

3. Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados 4 (quatro) métodos que generalizam e constroem distribuições de probabilidades a partir da composição de funções, permitindo assim que classes de distribuições sejam construídas utilizando funções monotônicas de distribuições predefinidas. Através destes métodos propostos é possível se obter algumas classes de distribuições de probabilidades presentes na literatura e também outras inéditas.

O primeiro método proposto para gerar classes de distribuições neste trabalho faz uso de funções monotônicas de distribuição derivável e com duas fda's arbitrárias, distintas ou não, de distribuições contínuas com suporte. Também será proposto um segundo método para gerar classes de distribuições, entretanto, este outro método fará uso da fdp.

Utilizando os métodos propostos foi possível criar classes de distribuições univariadas com uma distribuição base (unibaseline) ou com duas distribuições base (bibaseline) de probabilidades tanto inéditas quanto outras que já estão dispostas na literatura, assim, será apresentado, neste capítulo, além de classes geradas pelos métodos, uma distribuição proposta para uma das classes escolhidas.

Para cada classe e distribuição proposta será apresentado o desenvolvimento, realizado pelo autor, das expansões da fda e da fdp, da função de risco, das expansões para os momentos de ordem m , e para função geradora de momentos, bem como para a função característica, para as expansões de momentos centrais m e para o coeficiente geral. Também será apresentada a expressão para o desvio-médio e desvio quantílico, as derivadas da função log-verossimilhança e, as entropias de Shannon e Renyi.

Vale salientar que este trabalho é uma pesquisa básica, uma vez que procura formular novas teorias, com intuito de incrementar conhecimentos científicos sem, necessariamente, uma aplicação imediata. Por outro lado, é uma pesquisa aplicada uma vez que busca resolver problemas e utilizar conhecimentos adquiridos na investigação (Richardson, 2017).

Para validar os objetivos propostos são apresentadas novas distribuições e nas mesmas são aplicadas a dados simulados e uma delas, também, a dados reais, demonstrando a potencialidade do método gerador e da distribuição por ele gerada. Para os dados reais utilizou-se a base de dados referente à varicela, composta por 498 observações do que foi relatado entre 1931 a 1972 na Cidade de Nova Iorque. Para os dados simulados que serviram para validação dos objetivos foi utilizado o método de reamostragem ponderada, em que foram gerados valores de uma distribuição auxiliar conhecida e posteriormente uma reamostra que recai no método *bootstrap*.

É importante reforçar que os cálculos apresentados neste capítulo foram realizados pelo autor, sem auxílio de *software* específico e, a construção de gráficos deu-se pelo uso do R - ambiente de *software* livre para computação estatística e gráficos - utilizado para aplicação das distribuições elencadas a partir dos dados oriundos da realidade e gerados por técnicas de Reamostragem Ponderada e *Bootstrap* e uso de Algoritmos Genéticos, necessários para criação e simulação.

A seguir apresentam-se os métodos e suas proposições que, por serem inéditos, seguem os devidos cálculos - demonstrações, realizados pelo autor, que são a essência da deste trabalho.

3.2 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas

Neste tópico será apresentado o método proposto para gerar classes de distribuições fazendo uso de funções monotônicas de distribuição diferenciáveis e com duas fda's arbitrárias, de distribuições contínuas com suporte.

A ideia deste método gera distribuições de probabilidades e, serão listadas algumas delas em que serão construídas funções de ligações que serão chamadas de tipo 1 e tipo 2, e serão denominados de **Método Gerador** de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas com **Misturas** de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas Tipo 1 (**MGM-fda 1**) e, o segundo, de Método Gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições

acumuladas com Misturas de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas Tipo 2 (MGM-fda 2), respectivamente.

Vale salientar que se pode gerar distribuições com duas ou uma distribuição base - *baseline*, denominadas de bibaseline ou monobaseline, respectivamente, dependendo dos parâmetros das distribuições escolhidas arbitrariamente ou se as duas *baselines* forem iguais.

3.2.1 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas com misturas de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas – tipo 1

Neste tópico será apresentado a primeira proposição a partir da construção de funções de ligações que será denominada de MGM-fda 1, em seguida sua demonstração e uma tabela com alguns valores para α , β e θ com alguns pares de funções e alguns subcasos gerados por este método.

Proposição 3.2.1: Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições com fda – tipo 1 (MGM-fda 1).

Sejam $F(t)$ a fda de uma distribuição diferenciável com suporte em (α, β) e $D(y)$ uma função derivável bijetora decrescente de $(0,1)$ em (α, θ) e $C(y)$ uma função derivável bijetora crescente de $(0,1)$ em (θ, β) com $\alpha < \beta$ e $\alpha \leq \theta$ e $\theta \leq \beta$ (os limites infinitos são permitidos), $G_1(x)$ e $G_2(x)$ duas fda's arbitrárias de distribuições diferenciáveis com suporte (a, b) com $a < b$ (os limites infinitos são permitidos), e $\lim_{y \rightarrow 0^+} C(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} D(y) = \theta$. Então, a seguinte função tem as propriedades de uma fda.

$$F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))], \quad x \in (a, b) \quad (\text{EQ 3.1})$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = 0 \text{ para } x \leq a \text{ e } F_{G_1, G_2}(x) = 1 \text{ para } x \geq b.$$

Prova: Uma vez que $F(t)$ é função não-decrescente e $C(G_1(x)) \geq D(G_2(x))$, tem-se $F_{G_1, G_2}(x) \geq 0$. Além disso, é claro que $F_{G_1, G_2}(x) \leq F[C(G_1(x))] \leq 1$. A função $F_{G_1, G_2}(x)$ é diferenciável sobre (a, b) como composições de funções diferenciáveis com

$$\lim_{x \rightarrow a} F_{G_1, G_2}(x) = F[C(0)] - F[D(0)] = F(\theta) - F(\theta) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b} F_{G_1, G_2}(x) = F[C(1)] - F[D(1)] = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - 0 = 1.$$

Consequentemente, $F_{G_1, G_2}(x)$ é diferenciável para $x \in \mathbb{R}$.

Denotando como $g_1(x)$ e $g_2(x)$ os fdp's associados a $G_1(x)$ e $G_2(x)$, respectivamente, $f(t)$ a fdp associada a $F(t)$, para $x \in (a, b)$, tem-se:

$F'_{G_1, G_2}(x) = [C(G_1(x))] \cdot f[C(G_1(x))] - [D(G_2(x))] \cdot f[D(G_2(x))]$, o que é positivo como produtos e somas de funções positivas. Portanto, $F_{G_1, G_2}(x)$ é uma função crescente. Isso encerra a proposição 3.2.1.

Note que, para os fins deste estudo, a classe de distribuições definida pela fda $F_{G_1, G_2}(x)$ dada na equação (EQ 3.1) é chamado de classe gerada pela nova mistura (MGM-fda 1).

Note ainda que, $\theta = \alpha$, $F_{G_1, G_2}(x)$ é reduzido a $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))]$ para $x \in (a, b)$ e $\theta = \beta$, $F_{G_1, G_2}(x)$ é reduzido a $F_{G_1, G_2}(x) = 1 - F[D(G_2(x))]$ para $x \in (a, b)$, que corresponde ao esquema clássico de fda's de composição, entretanto, não é caso particular deste estudo, necessitando de outras demonstrações para verificação do mesmo.

Assim, observa-se a flexibilidade da nova classe sendo intermediária entre as classes compostas acima, e a função básica dos parâmetros α , β e θ com $\alpha \leq \theta \leq \beta$, e das funções diferenciáveis monotônicas $C(G_1(x))$ e $D(G_2(x))$.

Denotando como $g_1(x)$ e $g_2(x)$ as fdp's associados a $G_1(x)$ e $G_2(x)$, respectivamente, $f(t)$ a fdp associada a $F(t)$, para $x \in (a, b)$, a fdp da classe MGM-fda 1 é definida por

$$f_{G_1, G_2}(x) = C'(G_1(x)) \cdot f[C(G_1(x))] - D'(G_2(x)) \cdot f[D(G_2(x))], \quad x \in (a, b), \text{ e (EQ 3.2)}$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = 0 \text{ para } x \notin (a, b).$$

A seguir serão apresentados, em uma tabela, alguns subcasos oriundos do método MGM-fda 1 e de dois casos não particulares mencionados anteriormente.

3.2.1.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)

A Tabela 3.1 a seguir, mostra alguns valores para α , β e θ , e alguns pares de funções para $C(G_1(x))$ e $D(G_2(x))$ e suas derivadas, para alimentar as expressões $f_{G_1, G_2}(x) = [C(G_1(x))]' \cdot f[C(G_1(x))] - [D(G_2(x))]' \cdot f[D(G_2(x))]$ e $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ gerando os subcasos oriundos do método MGM-fda 1. Por questão de organização na forma de tabela, a mesma consta os dois casos não particulares que são os casos MGM-fda1.1 e, MGF-fda1.2.

Para a criação da tabela a seguir foi tomado os valores de α , β , θ e posteriormente analisados os possíveis valores para $C(G_1(x))$ e $[C(G_1(x))]'$, $D(G_2(x))$ e $[D(G_2(x))]'$.

Tabela 3.1: alguns subcasos gerados pelo método MGM-fda 1.

MGM-fda 1.1	α	β	θ
	$C(G_1(x))$		$[C(G_1(x))]'$
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fda 1.2	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x))$		$[D(G_2(x))]'$
MGM-fda 1.3	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$
MGM-fda 1.4	$\alpha = 0$	$\beta = 1$	θ
	$C(G_1(x)) = (1 - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (1 - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \theta(1 - G_2(x))$		$[D(G_2(x))]' = -\theta g_2(x)$
MGM-fda 1.5	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$
MGM-fda 1.6	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$

MGM-fda 1.7	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$
MGM-fda 1.8	$\alpha = 0$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{\theta}{1 - G_1(x)}$		$[C(G_1(x))]' = -\frac{\theta g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$
	$D(G_2(x)) = \theta(1 - G_2(x))$		$[D(G_2(x))]' = -\theta g_2(x)$
MGM-fda 1.9	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = \frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$
MGM-fda 1.10	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$
MGM-fda 1.11	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fda 1.12	$\alpha = -\infty$	$\beta = 0$	θ
	$C(G_1(x)) = \theta(1 - G_1(x))$		$[C(G_1(x))]' = -\theta g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \frac{\theta}{1 - G_2(x)}$		$[D(G_2(x))]' = \frac{\theta g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$
MGM-fda 1.13	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$
MGM-fda 1.14	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$

MGM-fda 1.15	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$c(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fda 1.16	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$c(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$
	$D(G_2(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fda 1.17	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$c(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$
MGM-fda 1.18	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$c(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$
MGM-fda 1.19	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$c(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fda 1.20	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$c(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$
MGM-fda 1.21	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$c(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$

MGM-fda 1.22	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \frac{G_1(x) + G_2(x) - 1}{(1 - G_1(x))G_2(x)}$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2 - G_2(x)) + g_2(x)(1 + G_1^2(x)) - 2(g_1(x) + g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1 - G_1(x))G_2(x)]^2}$	
	$D(G_2(x)) = -\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fda 1.23	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$	$[C(G_1(x))]' = \pi g_1(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = -\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fda 1.24	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \ln\left(\frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)}\right)$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))G_1(x)}$	
	$D(G_2(x)) = -\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fda 1.25	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \ln(-\ln(1 - G_1(x)))$	$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))\ln(1 - G_1(x))}$	
	$D(G_2(x)) = -\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fda 1.26	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)\right)$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = -\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fda 1.27	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = -\ln(-\ln(G_1(x)))$	$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{G_1(x)\ln(G_1(x))}$	
	$D(G_2(x)) = -\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fda 1.28	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$c(G_1(x)) = +\infty$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_1(x) - G_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$	$[D(G_2(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2 - G_2(x)) + g_2(x)(1 + G_1^2(x)) - 2(g_1(x) + g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1 - G_1(x))G_2(x)]^2}$	

MGM-fda 1.29	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = +\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$		$[D(G_2(x))]' = -\pi g_2(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fda 1.30	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = +\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \ln\left(\frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)}\right)$		$[D(G_2(x))]' = \frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$
MGM-fda 1.31	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = +\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = -\ln(-\ln(1 - G_2(x)))$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))\ln(1 - G_2(x))}$
MGM-fda 1.32	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = +\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = -\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)\right)$		$[D(G_2(x))]' = \pi g_2(x) \cdot \operatorname{Cosec}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fda 1.33	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = +\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \ln(-\ln(G_2(x)))$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)\ln(G_2(x))}$

Fonte: autoria própria

Em sequência tem-se o segundo Método Gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas com Misturas de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas Tipo 2 (MGM-fda 2).

3.2.2 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições acumuladas com misturas de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas – tipo 2

Neste tópico será apresentada a segunda proposição a partir da construção de funções de ligações que será denominada de MGM-fda 2, em seguida sua demonstração e uma tabela com alguns valores para α , β e θ com alguns pares de funções e alguns subcasos gerados por este método.

Proposição 3.2.2: Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições com fda – tipo 2 (MGM-fda 2).

Sejam $F(t)$ a fda de uma distribuição diferenciável com suporte em (α, β) e $C(y)$ uma função derivável bijetora crescente de $(0,1)$ em (α, θ) e $D(y)$ uma função derivável bijetora decrescente de $(0,1)$ em (θ, β) com $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (os limites infinitos são permitidos), $G_1(x)$ e $G_2(x)$ duas fda's arbitrárias de distribuições diferenciáveis com suporte (a, b) com $a < b$ (os limites infinitos são permitidos), e $\lim_{y \rightarrow 1} C(y) = \lim_{y \rightarrow 1} D(y) = \theta$. Então, a seguinte função tem as propriedades de uma fda.

$$F_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))], \quad x \in (a, b) \quad (\text{EQ 3.3})$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = 0 \text{ para } x \leq a \text{ e } F_{G_1, G_2}(x) = 1 \text{ para } x \geq b.$$

Prova. Uma vez que $F(t)$ é função crescente e $D(G_2(x)) \geq C(G_1(x))$, tem-se $F_{G_1, G_2}(x) \geq 0$. Além disso, é claro que $F_{G_1, G_2}(x) \leq 1 - F[D(G_2(x))] \leq 1$. A função $F_{G_1, G_2}(x)$ é diferenciável sobre (a, b) como composições de funções diferenciáveis, com

$$\lim_{x \rightarrow a} F_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(0)] - F[D(0)] = 1 + F(\alpha) - F(\beta) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow b} F_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(1)] - F[D(1)] = 1 + F(\theta) - F(\theta) = 1.$$

Consequentemente, $F_{G_1, G_2}(x)$ é diferenciável para $x \in \mathbb{R}$.

Denotando como $g_1(x)$ e $g_2(x)$ as fdp's associadas a $G_1(x)$ e $G_2(x)$, respectivamente, $f(t)$ a fdp associada a $F(t)$, para $x \in (a, b)$, tem-se:

$F'_{G_1, G_2}(x) = C'(G_1(x)) \cdot f[C(G_1(x))] - D'(G_2(x)) \cdot f[D(G_2(x))]$, o que é positivo como produtos e somas de funções positivas. Portanto, $F_{G_1, G_2}(x)$ é uma função crescente. Isso encerra a proposição 3.2.2.

Para os fins deste estudo, a classe de distribuições definida pela fda $F_{G_1, G_2}(x)$ dada na equação (EQ 3.3) é chamada de classe gerada pela nova mistura (MGM-fda 2).

Note ainda $\theta = \alpha$, $F_{G_1, G_2}(x)$ é reduzido a $F_{G_1, G_2}(x) = 1 - F[D(G_2(x))]$ para $x \in (a, b)$ e $\theta = \beta$, $F_{G_1, G_2}(x)$ é reduzido a $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))]$ para $x \in (a, b)$, que corresponde ao esquema clássico de fda's de composição. , entretanto, não é caso particular deste estudo, necessitando de outras demonstrações para verificação do mesmo.

Assim, percebe-se a flexibilidade da nova classe sendo intermediária entre as classes compostas acima, e a função básica dos parâmetros α , β e θ .

Denotando como $g_1(x)$ e $g_2(x)$ as fdp's associados a $G_1(x)$ e $G_2(x)$, respectivamente, $f(t)$ a fdp associada a $F(t)$, para $x \in (a, b)$, a fdp da classe MGM-fda 2 é definida por

$$f_{G_1, G_2}(x) = C'(G_1(x)) \cdot f[C(G_1(x))] - D'(G_2(x)) \cdot f[D(G_2(x))], x \in (a, b), \text{ e (EQ 3.4)}$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = 0 \text{ para } x \notin (a, b).$$

A seguir serão apresentados, em uma tabela, alguns subcasos oriundos do método MGM-fda 2 e de dois casos não particulares mencionados acima.

3.2.2.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)

A Tabela 3.2 a seguir, mostra alguns valores para α , β e θ , e alguns pares de funções para $C(G_1(x))$ e $D(G_2(x))$ e suas derivadas, para alimentar as expressões $F_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ e $f_{G_1, G_2}(x) = C'(G_1(x)) \cdot f[C(G_1(x))] - D'(G_2(x)) \cdot f[D(G_2(x))]$ gerando os subcasos oriundos do método MGM-fda 2. Por questão de organização na forma de tabela, a mesma consta os dois casos não particulares que são os casos MGM-fda2.1 e, MGMF-fda2.2.

Tabela 3.2: alguns subcasos gerados pelo método MGM-fda 2.

MGM-fda 2.1	α	β	θ
	$C(G_1(x))$		$[C(G_1(x))]'$
	$D(G_2(x)) = \beta = \theta$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fda 2.2	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = \alpha = \theta$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x))$		$[D(G_2(x))]'$
MGM-fda 2.3	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\theta - \alpha)G_1(x) + \alpha$		$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$
MGM-fda 2.4	$\alpha = 0$	$\beta = 1$	θ
	$C(G_1(x)) = \theta G_1(x)$		$[C(G_1(x))]' = g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = (1 - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -(1 - \theta)g_2(x)$
MGM-fda 2.5	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = (\theta - \alpha)G_1(x) + \alpha$		$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$
MGM-fda 2.6	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = (\theta - \alpha)G_1(x) + \alpha$		$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = -\ln(G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$
MGM-fda 2.7	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = (\theta - \alpha)G_1(x) + \alpha$		$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right)$
MGM-fda 2.8	$\alpha = 0$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \theta G_1(x)$		$[C(G_1(x))]' = \theta g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \frac{\theta}{G_2(x)}$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\theta g_2(x)}{G_2^2(x)}$

MGM-fda 2.9	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = -\frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$	
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$	
MGM-fda 2.10	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$	
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$	
MGM-fda2.11	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$	
MGM-fda 2.12	$\alpha = -\infty$	$\beta = 0$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{\theta}{G_1(x)}$	$[C(G_1(x))]' = -\frac{\theta g_1(x)}{G_1^2(x)}$	
	$D(G_2(x)) = \theta G_2(x)$	$[D(G_2(x))]' = -\theta g_2(x)$	
MGM-fda 2.13	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$	
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$	
MGM-fda 2.14	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$	
	$D(G_2(x)) = -\ln(G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$	
MGM-fda 2.15	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right)$	

MGM-fda 2.16	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right)$
MGM-fda 2.17	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$
	$D(G_2(x)) = -\ln(G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$
MGM-fda 2.18	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$
MGM-fda 2.19	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right)$
MGM-fda 2.20	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$
MGM-fda 2.21	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = -\ln(G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$
MGM-fda 2.22	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x) + G_2(x) - 1}{(1 - G_1(x))G_2(x)}$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2 - G_2(x)) + g_2(x)(1 + G_1^2(x)) - 2(g_1(x) + g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1 - G_1(x))G_2(x)]^2}$
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$

MGM-fda 2.23	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$		$[C(G_1(x))]' = \pi g_1(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fda 2.24	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \ln\left(\frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)}\right)$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fda 2.25	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \ln(-\ln(1 - G_1(x)))$		$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))\ln(1 - G_1(x))}$
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fda 2.26	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)\right)$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fda 2.27	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = -\ln(-\ln(G_1(x)))$		$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{G_1(x)\ln(G_1(x))}$
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fda 2.28	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_1(x) - G_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$	$[D(G_2(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2 - G_2(x)) + g_2(x)(1 + G_1^2(x)) - 2(g_1(x) + g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1 - G_1(x))G_2(x)]^2}$	
MGM-fda 2.29	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$		$[D(G_2(x))]' = -\pi g_2(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$

MGM-fda 2.30	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \ln\left(\frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)}\right)$		$[D(G_2(x))]' = \frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$
MGM-fda 2.31	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = -\ln(-\ln(1 - G_2(x)))$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))\ln(1 - G_2(x))}$
MGM-fda 2.32	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = -\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)\right)$		$[D(G_2(x))]' = \pi g_2(x) \cdot \operatorname{Cosec}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fda 1.33	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \ln(-\ln(G_2(x)))$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)\ln(G_2(x))}$

Fonte: autoria própria

Em sequência serão apresentados quatro métodos que geram classes de distribuições probabilísticas via composição de funções de distribuições de probabilidades a partir da construção de funções bijetoras de ligações com *baseline* tipo 1 (MGM-fdp 1) e tipo 2 (MGM-fdp 2).

3.3 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades – fdp's

Neste tópico, tem-se dois métodos que geram classes de distribuições probabilísticas a partir da composição de funções de distribuições de probabilidades oriundas da construção de funções de ligações com *baselines*, que são a

composição da fdp com as funções monotônicas envolvendo mistura de baselines. Assim, é possível obter os 2 métodos que serão denominados de MGM-fdp 1 e MGM-fdp 2, em que são separados por funções crescentes $C(G(x))$ que é equivalente a $D(1 - G(x))$ e decrescentes $D(G(x))$ que é equivalente a $C(1 - G(x))$ e geram as mesmas distribuições.

3.3.1 Métodos Geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades a partir da construção de funções bijetoras de ligações com Misturas de baseline a partir da construção de funções de ligações monotônicas tipo 1 (MGM-fdp 1)

Agora será apresentada a primeira proposição a partir da construção de funções de ligações que será denominada MGM-fdp 1, em seguida sua demonstração e uma tabela com alguns valores para $\lambda, \delta, \gamma, \alpha, \beta$ e θ com alguns pares de funções e alguns subcasos gerados por este método.

Proposição 3.3.1: Método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições com fdp – tipo 1 (MGM-fdp 1).

Sejam $F(t)$ a fda de uma distribuição diferenciável $f(t)$ (fdp) com suporte em (α, β) e $D(y)$ uma função derivável bijetora decrescente de $(0,1)$ em (α, θ) e $C(y)$ uma função derivável bijetora crescente de $(0,1)$ em (θ, β) com $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (os limites infinitos são permitidos), $G_1(x)$ e $G_2(x)$ duas fda's arbitrárias de distribuições diferenciáveis com suportes S_{G_1} e S_{G_2} , e $\lim_{y \rightarrow 0^+} C(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} D(y) = \theta$ e $k =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(C(G_1(t))) \cdot f^\delta(C(G_1(t))) \cdot \left[(C(G_1(t)))' \right]^\gamma dt + \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f^\delta(D(G_2(t))) \cdot$$

$\left[(-D(G_2(t)))' \right]^\gamma dt$ e $\lambda \geq 0$ e $\delta > 0$ e $\gamma \geq 0$. Então, a seguinte função tem as propriedades de uma fdp:

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot \left[(C(G_1(x)))' \right]^Y + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))' \right]^Y$$

para $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$ e $f_{G_1, G_2}(x) = 0$ para $x \notin S_{G_1} \cup S_{G_2}$ e que $F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt$ é a sua *fda*.

Demonstração:

Como C é crescente e G_1 é não decrescente, logo $C(G_1(x))$ é não decrescente. Logo $(C(G_1(x)))' \geq 0$ e, conseqüentemente, $\left[(C(G_1(x)))' \right]^Y \geq 0$.

Como D é decrescente e G_2 é não decrescente, logo $D(G_2(x))$ é não crescente. Logo $(-D(G_2(x)))' \geq 0$ e, conseqüentemente, $\left[(-D(G_2(x)))' \right]^Y \geq 0$.

Como $f(x)$ é uma *fdp* e $K = \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(C(G_1(t))) \cdot f^\delta(C(G_1(t))) \cdot \left[(C(G_1(t)))' \right]^Y dt + \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f^\delta(D(G_2(t))) \cdot \left[(-D(G_2(t)))' \right]^Y dt$, logo $F^\lambda(x) \geq 0$ e $f^\delta(x) \geq 0$ e $k > 0$.

Assim, $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot \left[(C(G_1(x)))' \right]^Y + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))' \right]^Y \geq 0$.

Portanto, $f_{G_1, G_2}(x) \geq 0$.

Agora será verificado que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot \left[(C(G_1(x)))' \right]^Y dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))' \right]^Y dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx &= \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot \left[(C(G_1(x)))' \right]^Y dx + \frac{1}{k} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))' \right]^Y dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx &= \frac{1}{k} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot \left[(C(G_1(x)))' \right]^Y dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))' \right]^Y dx \right) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx = \frac{1}{k} \cdot k = 1.$$

Assim, deduz-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx = 1$.

Portanto, conclui-se que $f_{G_1, G_2}(x)$ é uma *fdp* e que $F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt$ é a sua *fda*.

Caso particular 1 da Proposição 3.3.1: Subcaso 1 do MGM-fdp 1 (MGM-fdp 1.1).

Se $\lambda = 0$ e $\delta = 1$ e $\gamma = 1$, de acordo com a Proposição 3.3.1, então $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ com $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$.

Demonstração:

Como $F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt$, logo

$$\begin{aligned} F_{G_1, G_2}(x) &= \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt \\ F_{G_1, G_2}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(t))) \cdot f^\delta(C(G_1(t))) \cdot \left[(C(G_1(t)))' \right]^\gamma dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^x \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f^\delta(D(G_2(t))) \cdot \left[(-D(G_2(t)))' \right]^\gamma dt. \end{aligned}$$

Como $\delta = 1$ e $\gamma = 1$, logo substituindo na expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned} F_{G_1, G_2}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(t))) \cdot f^1(C(G_1(t))) \cdot \left[(C(G_1(t)))' \right]^1 dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^x \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f^1(D(G_2(t))) \cdot \left[(-D(G_2(t)))' \right]^1 dt \\ F_{G_1, G_2}(x) &= \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^x F^\lambda(C(G_1(t))) \cdot f(C(G_1(t))) \cdot (C(G_1(t)))' dt - \frac{1}{k} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^x F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f(D(G_2(t))) \cdot (D(G_2(t)))' dt \end{aligned}$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(C(G_1(t)))}{\lambda+1} \Bigg|_{-\infty}^x - \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(D(G_2(t)))}{\lambda+1} \Bigg|_{-\infty}^x$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(C(G_1(x)))}{\lambda+1} - \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(D(G_2(x)))}{\lambda+1}.$$

Como $F_{G_1, G_2}(+\infty) = 1$, logo substituindo na expressão acima, tem-se:

$$F_{G_1, G_2}(+\infty) = \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(C(G_1(+\infty)))}{\lambda+1} - \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(D(G_2(+\infty)))}{\lambda+1}$$

$$1 = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{k} \cdot \frac{0}{\lambda+1}$$

$$1 = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\lambda+1}.$$

Assim,

$$F_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(C(G_1(x)))}{\lambda+1} - \frac{1}{k} \cdot \frac{F^{\lambda+1}(D(G_2(x)))}{\lambda+1}$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\lambda+1} \cdot F^{\lambda+1}(C(G_1(x))) - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\lambda+1} \cdot F^{\lambda+1}(D(G_2(x)))$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = F^{\lambda+1}(C(G_1(x))) - F^{\lambda+1}(D(G_2(x))).$$

Como $\lambda \geq 0$, logo para $\lambda = 0$ e substituindo na expressão acima, tem-se:

$$F_{G_1, G_2}(x) = F^{\lambda+1}(C(G_1(x))) - F^{\lambda+1}(D(G_2(x)))$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = F^{0+1}(C(G_1(x))) - F^{0+1}(D(G_2(x)))$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = F(C(G_1(x))) - F(D(G_2(x))).$$

Portanto, conclui-se que MGM-fda 1 é um subcaso do MGM-fdp 1.

Note ainda que o MGM-fdp 2 tem como caso particular o MGM-fda 1 como da MGM-fdp 1, entretanto o mesmo não é caso particular do método aqui proposto, necessitando de outras demonstrações para validação do mesmo, que não é foco deste estudo..

Observe ainda o caso MGM-fdp 1.3, inserido na tabela 3.3, em que se deve considerar

$$\lambda = 0 \text{ e } \delta = 1 \text{ e } \gamma = 1 \text{ e } C(G_1(x)) = \beta = \theta,$$

então

$$F_{G_1, G_2}(x) = 1 - F[D(G_2(x))] \text{ com } x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}.$$

Concluindo que $F_{G_1, G_2}(x) = 1 - F(D(G_2(x)))$.

Por fim, considerando na tabela 3.3 o MGM-fdp 1.4 e MGM-fdp 1.5 em que se deve tomar, respectivamente,

$$C(G_1(x)) = \beta = \theta, \text{ então } f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))'\right]^\gamma$$

com $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$

e,

$$D(G_2(x)) = \alpha = \theta,$$

então

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot \left[(C(G_1(x)))'\right]^\gamma$$

com $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$,

também não são casos particulares, uma vez que não estão dentro das condições impostas pelo método aqui proposto, de serem bijetoras.

A seguir serão apresentados em uma tabela alguns subcasos oriundos do método MGM-fdp 1 e 4 (quatro) casos não particulares mencionados anteriormente (MGM-fdp 1.2 a MGM-fdp 1.5).

3.3.1.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)

A Tabela 3.3 a seguir, mostra alguns valores para λ , δ , γ , α , β e θ , e alguns pares de funções para $C(G_1(x))$ e $D(G_2(x))$ e suas derivadas, para alimentar as expressões

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda \left(C(G_1(x)) \right) \cdot f^\delta \left(C(G_1(t)) \right) \cdot \left[\left(C(G_1(x)) \right)' \right]^\gamma + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda \left(D(G_2(x)) \right) \cdot f^\delta \left(D(G_2(x)) \right) \cdot \left[\left(-D(G_2(x)) \right)' \right]^\gamma \quad \text{e} \quad F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt,$$

gerando os subcasos oriundos do método MGM-fdp 1. Por questão de organização na forma de tabela, a mesma consta os quatro casos não particulares que são os casos MGM-fdp1.2 a MGMF-fdp1.5.

Tabela 3.3: alguns subcasos gerados pelo método MGM-fdp 1.

MGM-fdp 1.1	$\lambda = 0$	$\delta = 1$	$\gamma = 1$
	α	β	θ
	$C(G_1(x))$	$[C(G_1(x))]'$	
	$D(G_2(x))$	$[D(G_2(x))]'$	
MGM-fdp 1.2	$\lambda = 0$	$\delta = 1$	$\gamma = 1$
	α	β	θ
	$C(G_1(x))$	$[C(G_1(x))]'$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 1.3	$\lambda = 0$	$\delta = 1$	$\gamma = 1$
	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x))$	$[D(G_2(x))]'$	
MGM-fdp 1.4	λ	δ	γ
	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x))$	$[D(G_2(x))]'$	
MGM-fdp 1.5	λ	δ	γ
	α	β	θ
	$C(G_1(x))$	$[C(G_1(x))]'$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	

6MGM-fdp 1.6	λ	δ	γ
	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$
MGM-fdp 1.7	λ	δ	γ
	$\alpha = 0$	$\beta = 1$	θ
	$C(G_1(x)) = (1 - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (1 - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \theta(1 - G_2(x))$		$[D(G_2(x))]' = -\theta g_2(x)$
MGM-fdp 1.8	λ	δ	γ
	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$
MGM-fdp 1.9	λ	δ	γ
	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$
MGM-fdp 1.10	λ	δ	γ
	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \text{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \text{sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = (\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha$		$[D(G_2(x))]' = -(\theta - \alpha)g_2(x)$
MGM-fdp 1.11	λ	δ	γ
	$\alpha = 0$	$\beta = +\infty$	$\theta > 0$
	$C(G_1(x)) = \frac{\theta}{1 - G_1(x)}$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\theta g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$
	$D(G_2(x)) = \theta(1 - G_2(x))$		$[D(G_2(x))]' = -\theta g_2(x)$
MGM-fdp 1.12	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$

MGM-fdp 1.13	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$	
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$	
MGM-fdp 1.14	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\beta - \theta)G_1(x) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = (\beta - \theta)g_1(x)$	
	$D(G_2(x)) = -\text{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \text{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$	
MGM-fdp 1.15	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = 0$	$\theta < 0$
	$C(G_1(x)) = \theta(1 - G_1(x))$	$[C(G_1(x))]' = -\theta g_1(x)$	
	$D(G_2(x)) = \frac{\theta}{1 - G_2(x)}$	$[D(G_2(x))]' = \frac{\theta g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$	
MGM-fdp 1.16	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$	
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$	
MGM-fdp 1.17	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$	
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$	
MGM-fdp 1.18	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \text{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \text{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = -\text{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \text{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$	

MGM-fdp 1.19	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$	
	$D(G_2(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$	
MGM-fdp 1.20	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))^2}$	
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$	
MGM-fdp 1.21	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$	
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$	
MGM-fdp 1.22	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G_1(x)) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{1 - G_1(x)}$	
	$D(G_2(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$	
MGM-fdp 1.23	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = -\frac{G_2(x)}{1 - G_2(x)} + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))^2}$	
MGM-fdp 1.24	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) + \theta$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{1 - G_2(x)}$	

MGM-fdp 1.25	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \frac{G_1(x) + G_2(x) - 1}{(1 - G_1(x))G_2(x)}$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2 - G_2(x)) + g_2(x)(1 + G_1^2(x)) - 2(g_1(x) + g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1 - G_1(x))G_2(x)]^2}$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 1.26	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$	$[C(G_1(x))]' = \pi g_1(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 1.27	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \ln\left(\frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)}\right)$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))G_1(x)}$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 1.28	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \ln(-\ln(1 - G_1(x)))$	$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))\ln(1 - G_1(x))}$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 1.29	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)\right)$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 1.30	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$c(G_1(x)) = -\ln(-\ln(G_1(x)))$	$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{G_1(x)\ln(G_1(x))}$	
	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 1.31	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$c(G_1(x)) = \beta = \theta$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_1(x) - G_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$	$[D(G_2(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2 - G_2(x)) + g_2(x)(1 + G_1^2(x)) - 2(g_1(x) + g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1 - G_1(x))G_2(x)]^2}$	

MGM-fdp 1.32	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$		$[D(G_2(x))]' = -\pi g_2(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fdp 1.33	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \ln\left(\frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)}\right)$		$[D(G_2(x))]' = \frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$
MGM-fdp 1.34	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = -\ln(-\ln(1 - G_2(x)))$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))\ln(1 - G_2(x))}$
MGM-fdp 1.35	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = -\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)\right)$		$[D(G_2(x))]' = \pi g_2(x) \cdot \operatorname{Cossec}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$
MGM-fdp 1.36	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \beta = \theta$		$[C(G_1(x))]' = 0$
	$D(G_2(x)) = \ln(-\ln(G_2(x)))$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)\ln(G_2(x))}$

Fonte: autoria própria

No próximo tópico, obtem-se o segundo Método Gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições probabilísticas com Misturas de baselines a partir da construção de funções de ligações monotônicas Tipo 2 (MGM-fdp 2)

3.3.2 Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades a partir da construção de funções bijetoras de ligações com Mistura de baseline a partir da construção de funções de ligações monotônicas – tipo 2 (MGM-fdp 2)

Neste tópico será apresentado a segunda proposição a partir da construção de funções de ligações que será denominada MGM-fdp 2, em seguida sua demonstração e uma tabela com alguns valores para $\lambda, \delta, \gamma, \alpha, \beta$ e θ com alguns pares de funções e alguns subcasos gerados por este método.

Proposição 3.3.2: Métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições com fdp – tipo 2 (MGM-fdp 2).

Sejam $F(t)$ a fda de uma distribuição diferenciável, com derivada $f(t)$ com suporte em (α, β) e $C(y)$ uma função derivável bijetora crescente de $(0,1)$ em (α, θ) e $D(y)$ uma função derivável bijetora decrescente de $(0,1)$ em (θ, β) com $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (os limites infinitos são permitidos), $G_1(x)$ e $G_2(x)$ duas fda's arbitrárias de distribuições diferenciáveis com suportes S_{G_1} e S_{G_2} , e $\lim_{y \rightarrow 1^-} C(y) = \lim_{y \rightarrow 1^-} D(y) = \theta$ e $k = -\int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(C(G_1(t))) \cdot f^\delta(C(G_1(t))) \cdot \left[(C(G_1(t)))' \right]^\gamma dt + \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f^\delta(D(G_2(t))) \cdot \left[(-D(G_2(t)))' \right]^\gamma dt$ e $\lambda \geq 0$ e $\delta > 0$ e $\gamma \geq 0$. Então, a seguinte função tem as propriedades de uma fdp: $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(t))) \cdot f^\delta(C(G_1(t))) \cdot \left[(C(G_1(t)))' \right]^\gamma + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f^\delta(D(G_2(t))) \cdot \left[(-D(G_2(t)))' \right]^\gamma$, para $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$ e $f_{G_1, G_2}(x) = 0$ para $x \notin S_{G_1} \cup S_{G_2}$ e que $F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt$ é a sua fda.

Demonstração:

Como C é crescente e G_1 é não decrescente, logo $C(G_1(x))$ é não decrescente. Logo $\left(C(G_1(x)) \right)' \geq 0$ e, conseqüentemente, $\left[\left(C(G_1(x)) \right)' \right]^\gamma \geq 0$.

Como D é decrescente e G_2 é não decrescente, logo $D(G_2(x))$ é não crescente. Logo $(-D(G_2(x)))' \geq 0$ e, conseqüentemente, $\left[(-D(G_2(x)))'\right]^Y \geq 0$.

Como $f(x)$ é uma $f dp$ e $K = \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(c(G_1(t))) \cdot f^\delta(c(G_1(t))) \cdot \left[(c(G_1(t)))'\right]^Y dt + \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(t))) \cdot f^\delta(D(G_2(t))) \cdot \left[(-D(G_2(t)))'\right]^Y dt$, logo $F^\lambda(x) \geq 0$ e $f^\delta(x) \geq 0$ e $k > 0$.

Assim, $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(c(G_1(x))) \cdot f^\delta(c(G_1(x))) \cdot \left[(c(G_1(x)))'\right]^Y + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))'\right]^Y \geq 0$.

Portanto, $f_{G_1, G_2}(x) \geq 0$.

Agora será verificado que $F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx = 1$.

$$F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(c(G_1(x))) \cdot f^\delta(c(G_1(x))) \cdot \left[(c(G_1(x)))'\right]^Y dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))'\right]^Y dx$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(c(G_1(x))) \cdot f^\delta(c(G_1(x))) \cdot \left[(c(G_1(x)))'\right]^Y dx + \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))'\right]^Y dx$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \left(\frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(c(G_1(x))) \cdot f^\delta(c(G_1(x))) \cdot \left[(c(G_1(x)))'\right]^Y dx + \int_{-\infty}^{+\infty} F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot \left[(-D(G_2(x)))'\right]^Y dx \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx = \frac{1}{k} \cdot k = 1.$$

Assim, deduz-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1, G_2}(x) dx = 1$.

Portanto, conclui-se que $f_{G_1, G_2}(x)$ é uma $f dp$ e que $F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt$ é a sua $f da$.

Corolário 1 da Proposição 3.3.2: Subcaso 1 do MGM-fdp 2 (MGM-fdp 2.1).

Se $\lambda = 0$ e $\delta = 1$ e $\gamma = 1$, de acordo com a Proposição 3.3.2, então $F_{G_1, G_2}(x) = 1 - F[D(G_2(x))] + F[C(G_1(x))]$ com $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$.

A demonstração é similar ao Corolário 1 da Proposição 3.3.1, em que será possível concluir que o MGM-fda 2 é um subcaso do MGM-fdp 2.

De modo similar ao apresentado no MGM-fdp1, tem-se inseridos na tabela 3.4, os MGM-fdp 2.2 a MGM-fdp2.5 que não são casos particulares pelos mesmos motivos já explicitados anteriormente, entretanto, por questão de organização da tabela os mesmos foram aqui inseridos.

A seguir serão apresentados em uma tabela alguns subcasos oriundos do método MGM-fdp 2, juntamente com os casos não particulares, aqui denominados de MGM-fdp2.2 a MGM-fdp2.5.

3.3.2.1 Métodos construtores de distribuições com suporte (α, β)

A Tabela 3.4 a seguir, mostra alguns valores para $\lambda, \delta, \gamma, \alpha, \beta$ e θ , e alguns pares de funções para $C(G_1(x))$ e $D(G_2(x))$ e suas derivadas, para alimentar as expressões

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot [C(G_1(x))']^\gamma + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot [(-D(G_2(x)))']^\gamma$$

e $F_{G_1, G_2}(x) = \int_{-\infty}^x f_{G_1, G_2}(t) dt$, gerando os subcasos oriundos do método MGM-fdp 2. Por questão de organização na forma de tabela, a mesma consta os quatro casos não particulares que são os casos MGM-fdp2.2 a MGM-fdp2.5.

Tabela 3.4: alguns subcasos gerados pelo método MGM-fdp 2

MGM-fdp 2.1	$\lambda = 0$	$\delta = 1$	$\gamma = 1$
	α	β	θ
	$C(G_1(x))$	$[C(G_1(x))']$	
	$D(G_2(x))$	$[D(G_2(x))']$	

MGM-fdp 2.2	$\lambda = 0$	$\delta = 1$	$\gamma = 1$
	α	β	θ
	$C(G_1(x))$	$[C(G_1(x))]'$	
	$D(G_2(x)) = \beta = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 2.3	$\lambda = 0$	$\delta = 1$	$\gamma = 1$
	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = \alpha = \theta$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x))$	$[D(G_2(x))]'$	
MGM-fdp 2.4	λ	δ	γ
	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = \alpha = \theta$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x))$	$[D(G_2(x))]'$	
MGM-fdp 2.5	λ	δ	γ
	α	β	θ
	$C(G_1(x))$	$[C(G_1(x))]'$	
	$D(G_2(x)) = \beta = \theta$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 2.6	λ	δ	γ
	α	β	θ
	$C(G_1(x)) = (\theta - \alpha)G_1(x) + \alpha$	$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$	
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$	
MGM-fdp 2.7	λ	δ	γ
	$\alpha = 0$	$\beta = 1$	θ
	$C(G_1(x)) = \theta G_1(x)$	$[C(G_1(x))]' = \theta g_1(x)$	
	$D(G_2(x)) = (1 - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -(1 - \theta)g_2(x)$	
MGM-fdp 2.8	λ	δ	γ
	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \alpha + (\theta - \alpha)G_1(x)$	$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$	
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$	

MGM-fdp 2.9	λ	δ	γ
	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = (\theta - \alpha)G_1(x) + \alpha$		$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = -\ln(G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$
MGM-fdp 2.10	λ	δ	γ
	α	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = (\theta - \alpha)G_1(x) + \alpha$		$[C(G_1(x))]' = (\theta - \alpha)g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_2(x))}{2}\right)$
MGM-fdp 2.11	λ	δ	γ
	$\alpha = 0$	$\beta = +\infty$	$\theta > 0$
	$C(G_1(x)) = \theta G_1(x)$		$[C(G_1(x))]' = \theta g_1(x)$
	$D(G_2(x)) = \frac{\theta}{G_2(x)}$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\theta g_2(x)}{G_2^2(x)}$
MGM-fdp 2.12	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = -\frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$
MGM-fdp 2.13	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$
MGM-fdp 2.14	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	β	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{sec}^2\left(\frac{\pi(1 - G_1(x))}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = (\beta - \theta)(1 - G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -(\beta - \theta)g_2(x)$
MGM-fdp 2.15	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = 0$	$\theta < 0$
	$C(G_1(x)) = \frac{\theta}{G_1(x)}$		$[C(G_1(x))]' = -\frac{\theta g_1(x)}{G_1^2(x)}$
	$D(G_2(x)) = \theta G_2(x)$		$[D(G_2(x))]' = \theta g_2(x)$

MGM-fdp 2.16	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$
	$D(G_2(x)) = \frac{1-G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$
MGM-fdp 2.17	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = -\ln(G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$
MGM-fdp 2.18	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-G_1(x))}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1-G_1(x))}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1-G_2(x))}{2}\right)$
MGM-fdp 2.19	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1-G_2(x))}{2}\right)$
MGM-fdp 2.20	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)} + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)}$
	$D(G_2(x)) = 1 - \ln(G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$
MGM-fdp 2.21	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = \frac{1-G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$

MGM-fdp 2.22	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \ln(G_1(x)) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{\pi g_2(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1-G_2(x))}{2}\right)$
MGM-fdp 2.23	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-G_1(x))}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1-G_1(x))}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = \frac{1-G_2(x)}{G_2(x)} + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2^2(x)}$
MGM-fdp 2.24	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-G_2(x))}{2}\right) + \theta$		$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi(1-G_1(x))}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = -\ln(G_2(x)) + \theta$		$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)}$
MGM-fdp 2.25	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	θ
	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x) + G_2(x) - 1}{(1-G_1(x))G_2(x)}$	$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2-G_2(x)) + g_2(x)(1+G_1^2(x)) - 2(g_1(x)+g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1-G_1(x))G_2(x)]^2}$	
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fdp 2.26	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$		$[C(G_1(x))]' = \pi g_1(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{2\pi G_1(x) - \pi}{2}\right)$
	$D(G_2(x)) = -\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$
MGM-fdp 2.27	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \ln\left(\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$		$[C(G_1(x))]' = \frac{g_1(x)}{(1-G_1(x))G_1(x)}$
	$D(G_2(x)) = +\infty$		$[D(G_2(x))]' = 0$

MGM-fdp 2.28	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \ln(-\ln(1 - G_1(x)))$	$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{(1 - G_1(x))\ln(1 - G_1(x))}$	
	$D(G_2(x)) = +\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 2.29	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)\right)$	$[C(G_1(x))]' = \frac{\pi g_1(x)}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$	
	$D(G_2(x)) = +\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 2.30	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \beta$
	$C(G_1(x)) = -\ln(-\ln(G_1(x)))$	$[C(G_1(x))]' = -\frac{g_1(x)}{G_1(x)\ln(G_1(x))}$	
	$D(G_2(x)) = +\infty$	$[D(G_2(x))]' = 0$	
MGM-fdp 2.31	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G_1(x) - G_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$	$[D(G_2(x))]' = \frac{g_1(x)G_1(x)(2 - G_2(x)) + g_2(x)(1 + G_1^2(x)) - 2(g_1(x) + g_2(x))G_1(x)G_2(x)}{[(1 - G_1(x))G_2(x)]^2}$	
MGM-fdp 2.32	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = +\infty$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$	$[D(G_2(x))]' = -\pi g_2(x) \operatorname{Sec}^2\left(\frac{\pi - 2\pi G_2(x)}{2}\right)$	
MGM-fdp 2.33	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = +\infty$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = \ln\left(\frac{1 - G_2(x)}{G_2(x)}\right)$	$[D(G_2(x))]' = \frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))G_2(x)}$	
MGM-fdp 2.34	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = -\ln(-\ln(1 - G_2(x)))$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{(1 - G_2(x))\ln(1 - G_2(x))}$	

MGM-fdp 2.35	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = -\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)\right)$	$[D(G_2(x))]' = \pi g_2(x) \cdot \operatorname{Cossec}\left(\frac{\pi G_2(x)}{2}\right)$	
MGM-fdp 2.36	λ	δ	γ
	$\alpha = -\infty$	$\beta = +\infty$	$\theta = \alpha$
	$C(G_1(x)) = -\infty$	$[C(G_1(x))]' = 0$	
	$D(G_2(x)) = \ln(-\ln(G_2(x)))$	$[D(G_2(x))]' = -\frac{g_2(x)}{G_2(x)\ln(G_2(x))}$	

Fonte: autoria própria

A seguir é realizado o estudo do suporte para as classes das distribuições probabilísticas propostas neste trabalho.

3.4. Suportes para as Classes de Distribuições Probabilísticas.

3.4.1 Estudo do suporte e do comportamento dos métodos

Na literatura tem-se diversas classes com uma única baseline, em que o suporte da classe é o suporte da baseline. Com o surgimento do método que gera classes com uma ou mais baselines, é necessário estudar o suporte da classe em função do suporte das baselines, por exemplo, o trabalho de Cordeiro *et al* (2023) apresenta sua classe com duas baselines.

A seguir será enunciada a proposição 3.4.1 para o suporte das classes geradas pelo MGM-fda 1 e a proposição 3.4.2 para o suporte das classes geradas pelo MGM-fda 2. Nota-se que os suportes para os métodos MGM-fdp são os mesmos da fda, assim, os cálculos aqui serão omitidos.

Proposição 3.4.1:

Sejam $F(t)$ a fda de uma distribuição contínua com suporte em (α, β) e $D(y)$ uma função contínua bijetora decrescente de $(0,1)$ em (α, θ) e $C(y)$ uma função contínua bijetora crescente de $(0,1)$ em (θ, β) com $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (os limites infinitos são permitidos), $G_1(x)$ e $G_2(x)$ duas fda's arbitrárias de distribuições contínuas, e $\lim_{y \rightarrow 0} C(y) = \lim_{y \rightarrow 0} D(y) = \theta$. Então, o suporte da classe $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ é a união dos suportes das *baselines*.

Demonstração:

Como $S_f = \text{Im}(C(G_1(x))) \cup \text{Im}(D(G_2(x)))$ e $\text{Im}(C(G_1(x))) \cap \text{Im}(D(G_2(x))) = \emptyset$ ou no máximo podendo ter um ponto em comum gerado por $\lim_{y \rightarrow 0} C(y) = \lim_{y \rightarrow 0} D(y) = \theta$, logo temos que $x \in S_f$ se, e somente se existe $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$. Portanto, $S_{f_{G_1, G_2}} = S_{G_1} \cup S_{G_2}$.

$f_{G_1, G_2}(x) = C'(G_1(x)) \cdot f[C(G_1(x))] - D'(G_2(x)) \cdot f[D(G_2(x))]$ para $x \in S_{f_{G_1, G_2}}$ e $f_{G_1, G_2}(x) = 0$ para $x \notin S_{f_{G_1, G_2}}$.

A seguir será enunciada a proposição 3.4.2 para o suporte do método MGM-fda 2.

Proposição 3.4.2:

Sejam $F(t)$ a fda de uma distribuição contínua com suporte em (α, β) e $C(y)$ uma função contínua bijetora crescente de $(0,1)$ em (α, θ) e $D(y)$ uma função contínua bijetora decrescente de $(0,1)$ em (θ, β) com $\alpha < \beta$ e $\alpha \leq \theta$ e $\theta \leq \beta$ (os limites infinitos são permitidos), $G_1(x)$ e $G_2(x)$ duas fda's arbitrárias de distribuições contínuas e $\lim_{y \rightarrow 1} C(y) = \lim_{y \rightarrow 1} D(y) = \theta$. Então, o suporte da classe $F_{G_1, G_2}(x) = H_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ é a união dos suportes das *baselines*.

Demonstração:

Como $S_f = \text{Im}(C(G_1(x))) \cup \text{Im}(D(G_2(x)))$ e $\text{Im}(C(G_1(x))) \cap \text{Im}(D(G_2(x))) = \emptyset$ ou no máximo podendo ter um ponto em comum gerado por $\lim_{y \rightarrow 0} C(y) = \lim_{y \rightarrow 0} D(y) = \theta$, logo temos que $x \in S_f$ se, e somente se existe $x \in S_{G_1} \cup S_{G_2}$. Portanto, $S_{f_{G_1, G_2}} = S_{G_1} \cup S_{G_2}$.

$f_{G_1, G_2}(x) = C'(G_1(x)) \cdot f[C(G_1(x))] - D'(G_2(x)) \cdot f[D(G_2(x))]$ para $x \in S_{f_{G_1, G_2}}$ e

$f_{G_1, G_2}(x) = 0$ para $x \notin S_{f_{G_1, G_2}}$.

A seguir realiza-se o estudo da identificabilidade para as classes das distribuições probabilísticas propostas neste trabalho.

3.5. Identificabilidade das classes geradas pelos métodos

Quando há misturas podem ocorrer problemas de identificabilidade, conforme apontado por Teicher (1961). Vale salientar que a identificabilidade é uma propriedade relativa ao modelo e não a algum método específico de estimação, entretanto, se um modelo não é identificável a inferência poderá ser dificultada.

É importante perceber que nem todas as classes de distribuições são identificáveis. Algumas vezes pode haver parâmetros redundantes que levam a distribuições equivalentes, por exemplo. Nesses casos, não é possível distinguir entre diferentes conjuntos de parâmetros, baseando-se apenas nos dados observados.

Para que uma classe de distribuições seja considerada identificável é necessário que seus parâmetros diferentes produzam distribuições diferentes, ou seja, se dois conjuntos diferentes de parâmetros resultam em distribuições estatísticas distintas, então a classe de distribuições é considerada identificável.

Neste tópico será realizado o estudo da identificabilidade das classes geradas pelos métodos aqui propostos, entretanto, não serão apresentados o estudo da identificabilidade para os métodos MGM-fdp, uma vez que os mesmos, diferentemente do MGM-fda, já possuem os parâmetros λ, δ e γ na própria

expressão do método, não sendo possível determinar se a classe gerada será identificável ou não. Assim, o estudo do suporte deverá ocorrer após alimentar os métodos com as *baselines* na classe encontrada.

PROPOSIÇÃO 3.5.1: Identificabilidade das classes geradas pelo método MGM-fda 1

Sejam $G_1(x|\underline{\theta}_1)$ e $G_2(x|\underline{\theta}_2)$ as baselines do método MGM-fda 1 definida pela expressão $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$, $\underline{\theta}_1 = (\theta_{11}, \dots, \theta_{1n}) \in \Theta_1$, $\underline{\theta}_2 = (\theta_{21}, \dots, \theta_{2m}) \in \Theta_2$ e $\underline{\theta} = (\theta_{11}, \dots, \theta_{1n}, \theta_{21}, \dots, \theta_{2m}) \in \Theta$, em que Θ_1 , Θ_2 e Θ são espaços paramétricos associados a G_1 , G_2 e H_{G_1, G_2} , respectivamente. Se G_1 , e G_2 são identificáveis e os parâmetros do método são apenas os das baselines, então H_{G_1, G_2} é identificável.

Prova:

Assuma que $F[C(G_1(x|\theta_1))] = F[C(G_1(x|\theta_1^*))]$, em que $\{\theta_1, \theta_1^*\} \subset \Theta_1$ e $\theta_1 \neq \theta_1^*$. Como $F[C]$ é injetiva, $G_1(x|\theta_1) = G_1(x|\theta_1^*)$; isso é uma contradição, porque nega a identificabilidade de G_1 . Portanto, se $\theta_1 \neq \theta_1^*$, então $F[C(G_1(x|\theta_1))] \neq F[C(G_1(x|\theta_1^*))]$. Analogamente, é fácil verificar isso para $\{\theta_2, \theta_2^*\} \subset \Theta_2$, se $\theta_2 \neq \theta_2^*$, então $F[D(G_2(x|\theta_2))] \neq F[D(G_2(x|\theta_2^*))]$.

Agora considere $\{\underline{\theta}, \underline{\theta}^*\} \subset \Theta$ de modo que $\underline{\theta} \neq \underline{\theta}^*$ e suponha que $F_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}) = F_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}^*)$. Se $\theta_1 = \theta_1^*$ e $\theta_2 \neq \theta_2^*$, então podemos inferir da equação $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ que $G_2(x|\theta_2) = G_2(x|\theta_2^*)$, a saber, um absurdo. Da mesma forma se $\theta_1 \neq \theta_1^*$ e $\theta_2 = \theta_2^*$, chegaremos a uma contradição semelhante que $G_1(x|\theta_1) = G_1(x|\theta_1^*)$. Se $\theta_1 \neq \theta_1^*$ e $\theta_2 = \theta_2^*$, então a suposição falha desde $H_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}) \neq H_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}^*)$ para quase todos os valores de x pertencente ao suporte. Portanto, H_{G_1, G_2} é identificável.

PROPOSIÇÃO 3.5.2: Identificabilidade das classes geradas pelo método MGM-fda 2

Sejam $G_1(x|\underline{\theta}_1)$ e $G_2(x|\underline{\theta}_2)$ as baselines do método MGM-fda 2 definida pela expressão $F_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$, $\underline{\theta}_1 = (\theta_{11}, \dots, \theta_{1n}) \in \theta_1$, $\underline{\theta}_2 = (\theta_{21}, \dots, \theta_{2m}) \in \theta_2$ e $\underline{\theta} = (\theta_{11}, \dots, \theta_{1n}, \theta_{21}, \dots, \theta_{2m}) \in \theta$, em que θ_1 , θ_2 e θ são espaços paramétricos associados a G_1 , G_2 e H_{G_1, G_2} , respectivamente. Se G_1 , e G_2 são identificáveis e os parâmetros do método são apenas os das baselines, então H_{G_1, G_2} é identificável.

Prova:

Considere $F[C(G_1(x|\underline{\theta}_1))] = F[C(G_1(x|\underline{\theta}_1^*))]$, em que $\{\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_1^*\} \subset \theta_1$ e $\underline{\theta}_1 \neq \underline{\theta}_1^*$. Como $F[C]$ é injetiva, $G_1(x|\underline{\theta}_1) = G_1(x|\underline{\theta}_1^*)$; isso é uma contradição, porque nega a identificabilidade de G_1 . Portanto, se $\underline{\theta}_1 \neq \underline{\theta}_1^*$, então $F[C(G_1(x|\underline{\theta}_1))] \neq F[C(G_1(x|\underline{\theta}_1^*))]$. Analogamente, é fácil verificar isso para $\{\underline{\theta}_2, \underline{\theta}_2^*\} \subset \theta_2$, se $\underline{\theta}_2 \neq \underline{\theta}_2^*$, então $F[D(G_2(x|\underline{\theta}_2))] \neq F[D(G_2(x|\underline{\theta}_2^*))]$.

Agora considere $\{\underline{\theta}, \underline{\theta}^*\} \subset \theta$ de modo que $\underline{\theta} \neq \underline{\theta}^*$ e suponha que $F_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}) = F_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}^*)$. Se $\underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_1^*$ e $\underline{\theta}_2 \neq \underline{\theta}_2^*$, então podemos inferir da equação $F_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ que $G_2(x|\underline{\theta}_2) = G_2(x|\underline{\theta}_2^*)$, a saber, um absurdo. Da mesma forma se $\underline{\theta}_1 \neq \underline{\theta}_1^*$ e $\underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_2^*$, chegaremos a uma contradição semelhante que $G_1(x|\underline{\theta}_1) = G_1(x|\underline{\theta}_1^*)$. Se $\underline{\theta}_1 \neq \underline{\theta}_1^*$ e $\underline{\theta}_2 \neq \underline{\theta}_2^*$, então a suposição falha desde $F_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}) \neq F_{G_1, G_2}(x|\underline{\theta}^*)$ para quase todos os valores de x pertencente ao suporte. Portanto, H_{G_1, G_2} é identificável.

No próximo capítulo serão apresentadas as aplicações em dados simulados e em dados reais, para então comparar com outras distribuições existentes na literatura, buscando assim, observar o comportamento e seu ajuste aos dados escolhidos. Além disso, serão apresentados os modelos funcionais, a função de risco, as expansões, as derivadas da log-verossimilhança em relação aos parâmetros e, as duas entropias elencadas neste trabalho.

4. Aplicações

4.1 Introdução

Este capítulo será dedicado às aplicações dos métodos propostos que foram apresentados anteriormente, em que serão geradas algumas distribuições de probabilidade existentes na literatura, e também serão apresentadas distribuições inéditas, além de conter a aplicação em dados simulados e dados reais para as distribuições que serão propostas.

Assim, para cada classe e distribuição aqui apresentadas serão elencadas suas propriedades de caracterização, em que irá ser apresentado o modelo funcional da fdp, as expansões da Função de Distribuição Acumulada, as expansões da Função de Distribuição de Probabilidade, a função Risco, a expansão para os momentos de ordem m , a expansão para a função geradora de momentos, a expansão para a função característica, a expansão para os momentos centrais de ordem m , a expansão para o coeficiente geral, a expansão para o Desvio Médio e Desvio Quantílico, as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros e, a entropia de Rényi para a Classe Seno - G_1 , G_2 e para a classe beta $G - \gamma$.

O mesmo será realizado, como já apontado anteriormente, com as distribuições que serão apresentadas neste capítulo que é a Distribuição Seno - gama, beta e, a Distribuição beta Exponencial - γ em que para estas, ainda serão apresentadas as aplicações em dados simulados para ambas e em dados reais para a primeira.

Além disso, tabelas e gráficos serão apresentados para discussão dos resultados obtidos por estas distribuições.

4.2 Geração de algumas classes e distribuições existentes na literatura

Em sequência, tem-se a apresentação de tabelas que irão apresentar a geração de classes de distribuições já existentes na literatura a partir de métodos propostos neste trabalho – tanto com fda quanto com fdp, comprovando o potencial

de generalização dos mesmos. Obviamente, ao gerar classes de distribuições já existentes, gerará distribuições dessas classes e, conseqüentemente as aplicações já encontradas nas diversas literaturas são também, aplicações em dados reais e simulados deste método.

4.2.1 Geração de algumas classes e distribuições existentes na literatura via composições de fda's

Neste tópico apresentaremos a Tabela 4.1 que a partir dos métodos MGM-fda 1 e MGM-fda 2 geram classes já existentes na literatura, sendo uma aplicação do método a partir das distribuições já geradas por essas classes. Utilizaram-se as respectivas expressões $F_{G_1, G_2}(x) = F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ (MGM-fda1) e $F_{G_1, G_2}(x) = 1 + F[C(G_1(x))] - F[D(G_2(x))]$ (MGM-fda 2).

Tabela 4.1: Aplicação do método MGM-fda gerando algumas classes existentes na literatura

MGM-fda	Parâmetros	Função monotônica $D(G_2(x))$ e $C(G_1(x))$	$F(x)$	CLASSE OBTIDA $F_{G_1, G_2}(x)$
1	α β $\theta = \alpha$	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$ $C(G_1(x))$	$F(x)$	Método T-X
1	$\alpha = 0$ β $\theta = 0$	$D(G_2(x)) = 0$ $C(G_1(x)) = G(x)$	Dist. Beta	Beta-G Eugene, Lee e Famoye (2002)
1	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $0 \leq \theta \leq 1$	$D(G_2(x)) = \theta(1 - G(x))$ $C(G_1(x)) = (1 - \theta)G(x) + \theta$	Dist. Beta	Beta-G Souza <i>et al</i> , (2017)

1	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = 0$	Dist. Gama	Gama-G Zografos e Balakrishnan (2009)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G(x))$		
2	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = -\ln(G(x))$	Dist. Gama	Gama-G Ristić e Balakrishnan (2012)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = 0$		
1	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = 0$	Dist. Gama	Gama-G Torabi e Hedesh, (2012)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = \frac{G(x)}{1 - G(x)}$		
2	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G(x)}{G(x)}$	Dist. Gama	Gama-G (Brito, 2014)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = 0$		
1	$\alpha = -\infty$	$D(G_2(x)) = \alpha$	Dist. Normal	Normal-G Silveira <i>et al</i> (2019)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = \frac{2G(x) - 1}{(1 - G(x))G(x)}$		
1	$\alpha = -\infty$	$D(G_2(x)) = \alpha$	Dist. Normal	Normal Tangente-G Silveira <i>et al</i> (2019)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi G(x) - \pi}{2}\right)$		
1	$\alpha = -\infty$	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x))$	Dist. Normal	Normal-(G_1, G_2) Silveira <i>et al</i> (2019)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)}$		
1	$\alpha = -\infty$	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x))$	Dist. Normal	Normal-tangente- logaritmo-(G_1, G_2) Cordeiro <i>et al</i> (2023)
	$\beta = +\infty$	$C(G_1(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$		
	$\theta = 0$			

Fonte: compilada pelo autor

A seguir é apresentada a tabela que mostra a geração de classes de distribuições já existentes na literatura a partir de método proposto via composição de fdp.

4.2.2 Geração de algumas classes e distribuições existentes na literatura via composições de fdp

Agora serão apresentados na Tabela 4.2 algumas classes de distribuições existentes que foram geradas a partir da dos métodos MGM-fdp 1 e MGM-fdp 2, sendo também uma aplicação deste método e dos casos não particulares destes métodos. Assim, foram utilizadas a expressão $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot [(C(G_1(x)))']^Y + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot [(-D(G_2(x)))']^Y$ para gerar a MGM-fdp 1 e a MGM-fdp 2, que devem ser observadas as respectivas condições para obtenção dos resultados contidos na Tabela 4.2 a seguir.

Tabela 4.2: Aplicação do método MGM-fdp gerando algumas classes existentes na literatura.

MGM-fdp	Parâmetros	Função monotônica $D(G_2(x))$ e $C(G_1(x))$	$f(x)$	CLASSE OBTIDA $F_{G_1, G_2}(x)$
1	α β $\theta = \alpha$ $\lambda = 0$ $\sigma = 1$ $\gamma = 1$	$D(G_2(x)) = \alpha = \theta$ $C(G_1(x))$	$f(x)$	Método T-X
1	$\alpha = 0$ β $\theta = 0$ $\lambda = 0$ $\sigma = 1$ $\gamma = 1$	$D(G_2(x)) = 0$ $C(G_1(x)) = G(x)$	Dist. Beta	Beta-G Eugene, Lee e Famoye (2002)

1	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = \theta(1 - G(x))$	Dist. Beta	Beta-G Souza <i>et al</i> (2017)
	$\beta = 1$ $0 \leq \theta \leq 1$			
1	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = 0$	Dist. Gama	Gama-G Zografos e Balakrishnan (2009)
	$\beta = +\infty$ $\theta = 0$			
2	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = -\ln(G(x))$	Dist. Gama	Gama-G Ristić e Balakrishnan (2012)
	$\beta = +\infty$ $\theta = 0$			
1	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = 0$	Dist. Gama	Gama-G Torabi e Hedesh (2012)
	$\beta = +\infty$ $\theta = 0$			
2	$\alpha = 0$	$D(G_2(x)) = \frac{1 - G(x)}{G(x)}$	Dist. Gama	Gama-G Brito (2014)
	$\beta = +\infty$ $\theta = 0$			
1	$\alpha = 0$	$C(G_1(x)) = (1 - \theta)G(x) + \theta$	Dist. Beta	Beta-G Souza <i>et al</i> (2017)
	$\lambda = 0$ $\sigma = 1$ $\gamma = 1$			
1	$\alpha = 0$	$C(G_1(x)) = -\ln(1 - G(x))$	Dist. Gama	Gama-G Zografos e Balakrishnan (2009)
	$\lambda = 0$ $\sigma = 1$ $\gamma = 1$			
2	$\alpha = 0$	$C(G_1(x)) = 0$	Dist. Gama	Gama-G Ristić e Balakrishnan (2012)
	$\lambda = 0$ $\sigma = 1$ $\gamma = 1$			
1	$\alpha = 0$	$C(G_1(x)) = \frac{G(x)}{1 - G(x)}$	Dist. Gama	Gama-G Torabi e Hedesh (2012)
	$\lambda = 0$ $\sigma = 1$ $\gamma = 1$			
2	$\alpha = 0$	$C(G_1(x)) = 0$	Dist. Gama	Gama-G Brito (2014)
	$\lambda = 0$ $\sigma = 1$ $\gamma = 1$			

1	$\alpha = -\infty$	$D(G_2(x)) = \alpha$	Dist. Normal	Normal-G Silveira <i>et al</i> (2019)
	$\beta = +\infty$			
1	$\theta = \alpha = -\infty$	$C(G_1(x)) = \frac{2G(x) - 1}{(1 - G(x))G(x)}$	Dist. Normal	Normal Tangente-G Silveira <i>et al</i> (2019)
	$\lambda = 0$			
1	$\sigma = 1$	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x))$	Dist. Normal	Normal-(G ₁ , G ₂) Silveira <i>et al</i> (2019)
	$\gamma = 1$			
1	$\alpha = -\infty$	$D(G_2(x)) = \ln(1 - G_2(x))$	Dist. Normal	Normal-tangente- logaritmo-(G ₁ , G ₂) Cordeiro <i>et al</i> (2023)
	$\beta = +\infty$			
1	$\theta = 0$	$C(G_1(x)) = \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)}$	Dist. Normal	Normal-tangente- logaritmo-(G ₁ , G ₂) Cordeiro <i>et al</i> (2023)
	$\lambda = 0$			
1	$\sigma = 1$	$C(G_1(x)) = tg\left(\frac{\pi G_1(x)}{2}\right)$	Dist. Normal	Normal-tangente- logaritmo-(G ₁ , G ₂) Cordeiro <i>et al</i> (2023)
	$\gamma = 1$			

Fonte: compilada pelo autor

A seguir, tem-se a proposição de classes geradas por um dos métodos aqui propostos, utilizando tanto a fda, quanto a fdp para gerar a classe seno - G₁, G₂.

4.3 Classe proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fda e suas propriedades de caracterização

Nesta seção será apresentado o modelo funcional MGM-fda 1.3, que é um método gerador de classes de distribuições. Assim, será apresentado em 4.3.1 o modelo funcional da fda da classe seno - G_1 , G_2 e, posteriormente, em 4.3.2, o modelo funcional da fdp desta mesma classe.

4.3.1 Modelo funcional da fda da classe seno - G_1 , G_2

A seguir é apresentado o modelo funcional da fda da classe seno - G_1 , G_2 , e, para este trabalho, fazendo uso do MGM-fda1.3, da tabela 3.1, e tomando $F(t) = \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ uma fda com $0 \leq t \leq 1$ e $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $0 \leq \theta \leq 1$, obtém-se:

$$F_{G_1, G_2}(x) = F[(\beta - \theta)G_1(x) + \theta] - F[(\theta - \alpha)(1 - G_2(x)) + \alpha]$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = F[(1 - \theta)G_1(x) + \theta] - F[\theta(1 - G_2(x))]$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen}\left[\frac{\pi(1 - \theta)G_1(x) + \pi\theta}{2}\right] - \text{Sen}\left[\frac{\pi\theta(1 - G_2(x))}{2}\right].$$

Portanto, a fda da classe seno - G_1 , G_2 é dada por:

$$F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen}\left[\frac{\pi(1 - \theta)G_1(x) + \pi\theta}{2}\right] - \text{Sen}\left[\frac{\pi\theta(1 - G_2(x))}{2}\right].$$

No próximo tópico será apresentado do modelo funcional da fdp da classe seno - G_1 , G_2 .

4.3.2 Modelo funcional da fdp da classe seno - G_1 , G_2

Agora será apresentado o modelo funcional da fdp da classe seno - G_1 , G_2 , em que ao utilizar-se a expressão do modelo funcional da fda da classe seno - G_1 , G_2 , apresenta-se a seguir o modelo funcional da fdp desta mesma classe.

Como $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$, logo temos:

$$f_{G_1, G_2}(x) = F'_{G_1, G_2}(x)$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right].$$

Portanto, a fdp da classe seno - G_1, G_2 é dada por:

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right].$$

Posteriormente serão apresentadas expansões que permitirão aproximar funções complexas ou quantidades desconhecidas por meio de séries ou polinômios mais simples, uma vez que, nem sempre existe ou que sejam de simples resolução determinadas integrais que representam a fda, por exemplo. Assim, utilizam-se as expansões para simplificar cálculos, facilitar a análise estatística e obter aproximações úteis em diversas áreas.

4.3.3 Expansões da função de distribuição acumulada da classe seno - G_1, G_2

Com o objetivo de simplificar os cálculos posteriores, como já justificado anteriormente, serão usadas as expansões. Assim, a expansão da função geradora da distribuição acumulada é obtida através do processo a seguir.

Como $\text{Sen}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot y^{2j+1}}{(2j+1)!}$, logo:

$$F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right]^{2j+1}}{(2j+1)!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot [(1-\theta)G_1(x) + \theta]^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot [1-G_2(x)]^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}}$$

Como $[\theta + (1-\theta)G_1(x)]^{2j+1} = \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v \cdot G_1^v(x)$ e $[1-G_2(x)]^{2j+1} = \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot (-1)^v \cdot G_2^v(x)$, então:

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot [(1-\theta)G_1(x) + \theta]^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot [1-G_2(x)]^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}}$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v \cdot G_1^v(x)}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot (-1)^v \cdot G_2^v(x)}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}}$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v \cdot G_1^v(x)}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot (-1)^v \cdot G_2^v(x)}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}}$$

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot G_1^v - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot G_2^v$$

Portanto,

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot G_1^v - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot G_2^v.$$

A seguir são obtidas as expansões para função de distribuição de probabilidade desta mesma classe.

4.3.4 Expansões da função de distribuição de probabilidade da classe seno - G_1, G_2

Foram usadas as expansões para simplificação de cálculos posteriores. Desta forma, a expansão da função geradora da distribuição de probabilidade foi obtida através do seguinte processo:

Como $\text{Cos}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot y^{2j}}{(2j)!}$, então:

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos}\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2}\right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos}\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2}\right]^{2j}}{(2j)!} + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]^{2j}}{(2j)!}$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot [(1-\theta)G_1(x) + \theta]^{2j}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot \theta^{2j} \cdot [1-G_2(x)]^{2j}}{(2j)! \cdot 2^{2j}}$$

Como $[\theta + (1-\theta)G_1(x)]^{2j+1} = \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v \cdot G_1^v(x)$ e $[1-G_2(x)]^{2j+1} = \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot (-1)^v \cdot G_2^v(x)$, logo tem-se:

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot [(1-\theta)G_1(x) + \theta]^{2j}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot \theta^{2j} \cdot [1-G_2(x)]^{2j}}{(2j)! \cdot 2^{2j}}$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^v \cdot G_1^v(x)}{(2j)! \cdot 2^{2j}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot \theta^{2j} \cdot \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot (-1)^v \cdot G_2^v(x)}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \\
f_{G_1, G_2}(x) &= \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^v \cdot G_1^v(x)}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \\
& + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot \theta^{2j} \cdot (-1)^v \cdot G_2^v(x)}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \\
f_{G_1, G_2}(x) &= \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^v \cdot G_1^v(x)}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \\
& + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j} \cdot \theta^{2j} \cdot G_2^v(x)}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \\
f_{G_1, G_2}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f_{G_1, G_2}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x).
\end{aligned}$$

A seguir será apresentada a função de risco para a classe em estudo.

4.3.5 Função risco usando a classe seno - G_1, G_2

A função risco serve para avaliar o desempenho de estimadores, sendo uma função que mede a qualidade de um estimador em termos do erro ou perda associada à sua estimativa.

Será obtida a função risco usando a classe seno - G_1, G_2 da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}_{G_1, G_2}(x) = \frac{f_{G_1, G_2}(x)}{1 - F_{G_1, G_2}(x)}$$

$$\mathcal{R}_{G_1, G_2}(x) = \frac{\frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cos\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cos\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}{1 - \text{Sen}\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + \text{Sen}\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}$$

$$\mathcal{R}_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x) \cos\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + \pi\theta g_2(x) \cos\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}{2 - 2\text{Sen}\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + 2\text{Sen}\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}$$

Portanto,

$$\mathcal{R}_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x) \cos\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + \pi\theta g_2(x) \cos\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}{2 - 2\text{Sen}\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + 2\text{Sen}\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}$$

Tendo em vista a importância dos momentos na análise estatística, a seguir apresentam-se as expansões para os mesmos. Inicia-se com as expansões para os momentos de ordem m , para a classe proposta neste trabalho.

4.3.6 Expansão para os momentos de ordem m para a classe seno - G_1 , G_2

Em qualquer análise estatística os momentos são importantes, uma vez que eles podem ser usados para estudar características da distribuição como tendência, dispersão, assimetria e curtose, por exemplo.

A seguir será apresentada a expressão dos momentos probabilisticamente ponderados e em depois o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos de ordem m para a classe seno - G_1 , G_2 :

Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x).$$

Logo, expandindo:

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) \right] dx$$

$$\mu_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$\mu_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,m,0,v} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,m,0,v}.$$

Portanto,

$$\mu_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,m,0,v} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,m,0,v}.$$

em que

$$\tau_{k,m,\eta,r} = E(X^m f_k(X)^\eta F_k(X)^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f_k(X)^\eta F_k(X)^r dF_k(x).$$

■

Em particular, tem-se a seguinte expansão para a média para a classe seno - G_1, G_2

Como $\mu = \mu_1$, então:

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,1,0,v} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,1,0,v}.$$

■

A seguir, tem-se a expansão para a função geradora de momentos para a classe proposta.

4.3.7 Expansão para a função geradora de momentos para a classe seno - G_1, G_2

A função geradora de momentos possui esse nome pois, a partir dela, pode-se encontrar todos os momentos da variável aleatória X , caso existam. Essa função só precisa estar definida em uma vizinhança do ponto zero, pois, os momentos serão obtidos através de sucessivas diferenciações aplicadas em zero, originando o resultado que será apresentado em seguida.

Aqui será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a classe seno - G_1, G_2 :

Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x).$$

Tem-se

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) \right] dx$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx.$$

Como

$$e^{tx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!}$$

Logo, segue que:

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{1,m,0,v}$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{2,m,0,v}$$

Portanto,

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{1,m,0,v}$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{2,m,0,v}$$

■

No próximo tópico será apresentada a expansão para a função característica para a classe seno - G_1, G_2 .

4.3.8 Expansão para a função característica para a classe seno - G_1, G_2

A função característica é conhecida como transformada de Fourier, possuindo aplicações em diversas áreas do conhecimento científico, como em processamento de sinais e imagens, na física quântica, entre outros. Assim, é fácil perceber que é um operador relevante dentro da área de probabilidade.

A seguir será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função característica para a classe seno - G_1, G_2 :

Como

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

Segue que:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) \right] dx$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx.$$

Como

$$e^{itx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!}$$

Tem-se que:

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \cdot t^m \cdot x^m}{m!} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \cdot t^m \cdot x^m}{m!} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{1,m,0,v} \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{2,m,0,v} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{1,m,0,v} \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{2,m,0,v} \end{aligned}$$

■

A seguir é apresentada a expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe que é utilizada para aproximar os momentos centrais de uma

distribuição desconhecida com base nos momentos centrais de uma distribuição conhecida.

4.3.9 Expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe seno - G_1, G_2

A seguir será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe seno - G_1, G_2 :

como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{m-r}$$

e

$$\begin{aligned} \mu_{m-r} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,m-r,0,v} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,m-r,0,v}, \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,m-r,0,v} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,m-r,0,v} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,m-r,0,v} \\ &+ \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,m-r,0,v} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu'_m = & \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,m-r,0,v} \\ & + \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,m-r,0,v}. \end{aligned}$$

■

Em particular, tem-se que a expansão da variância para a classe seno- G_1 , G_2 é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mu'_2 = & \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,2-r,0,v} \\ & + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,2-r,0,v}. \end{aligned}$$

■

Brito (2014) define uma expressão que denominou de coeficiente geral, em que, fornece os coeficientes de curtose e assimetria ao substituir cada momento maior ou igual que 3, fornecendo, por exemplo, as relações com a curtose para m par e assimetria das distribuições para m ímpar.

4.3.10 Expansão para o coeficiente geral para a classe seno - G_1, G_2

A seguir, será visto o desenvolvimento dos cálculos da expansão para o coeficiente geral para a classe seno - G_1, G_2 :

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então obtém-se:

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,m-r,0,v} + \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,m-r,0,v}}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,2-r,0,v} + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,2-r,0,v} \right)^{\frac{m}{2}}}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ tem-se que a expansão para o coeficiente geral para a classe seno - G_1, G_2 é dada por:

$$C_a = \frac{\sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{3}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,3-r,0,v} + \sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{3}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,3-r,0,v}}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,2-r,0,v} + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,2-r,0,v} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$ teremos que a expansão para o coeficiente de curtose para a classe seno - G_1, G_2

$$C_c = \frac{\sum_{r=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{4}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,4-r,0,v} + \sum_{r=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{4}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,4-r,0,v}}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,2-r,0,v} + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \binom{2j}{v} \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,2-r,0,v} \right)^2}$$

A seguir serão expostas as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe proposta, uma vez que essa função fornece informações sobre a influência dos parâmetros nos dados observados. Esta técnica fornece as estimativas para os parâmetros. Ela ainda generaliza o método da regressão.

4.4.11 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe seno - G_1, G_2

Neste tópico serão vistos os cálculos do desenvolvimento das derivadas função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe seno - G_1, G_2 :

Considere que $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ dependem das distribuições, assim, como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \log f_{G_1, G_2}(x; \theta, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) \\ = \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\pi(1-\theta)g_1(x; \underline{\alpha})}{2} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x; \underline{\alpha}) + \pi\theta}{2} \right] \right. \\ \left. + \frac{\pi\theta g_2(x; \underline{\beta})}{2} \cos \left[\frac{\pi\theta(1 - G_2(x; \underline{\beta}))}{2} \right] \right) \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G_1, G_2}(x; \theta, \underline{\alpha}, \underline{\beta})}{\partial \theta} \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log \left(\frac{\pi(1-\theta)g_1(x; \underline{\alpha})}{2} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x; \underline{\alpha}) + \pi\theta}{2} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi\theta g_2(x; \underline{\beta})}{2} \cos \left[\frac{\pi\theta(1 - G_2(x; \underline{\beta}))}{2} \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G_1, G_2}(x; \theta, \underline{\alpha}, \underline{\beta})}{\partial \alpha_j} \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left\{ \log \left(\frac{\pi(1-\theta)g_1(x; \underline{\alpha})}{2} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x; \underline{\alpha}) + \pi\theta}{2} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi\theta g_2(x; \underline{\beta})}{2} \cos \left[\frac{\pi\theta(1 - G_2(x; \underline{\beta}))}{2} \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G_1, G_2}(x; \theta, \underline{\alpha}, \underline{\beta})}{\partial \beta_j} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left\{ \log \left(\frac{\pi(1-\theta)g_1(x; \underline{\alpha})}{2} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x; \underline{\alpha}) + \pi\theta}{2} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\pi\theta g_2(x; \underline{\beta})}{2} \cos \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x; \underline{\beta}))}{2} \right] \right) \right\}.
\end{aligned}$$

■

No próximo tópico a entropia de Rényi será desenvolvida para a classe seno - G_1, G_2 .

4.3.12 Entropia de Rényi usando a classe seno - G_1, G_2

A entropia é uma medida de incerteza, no sentido que se maior o valor da entropia menor a informação e maior a incerteza, ou seja, maior a aleatoriedade ou desordem.

A seguir será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da entropia para a classe seno - G_1, G_2 , usando a entropia de Rényi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R(\eta) &= \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right) \\
\mathcal{L}_R(\eta) &= \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \cos \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right] \right)^\eta dx \right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) \right)^\eta dx \right).$$

■

A seguir será apresentado o estudo do comportamento da classe seno – G_1 , G_2 a partir de gráficos gerados no R utilizando-se algumas distribuições bi-baselines.

4.3.13 Estudo do comportamento da classe seno - G_1, G_2 através de gráficos gerados por algumas bi-baselines

Aqui serão apresentados os gráficos da fdp em que se pode observar o comportamento da classe seno – G_1 , G_2 , mais especificamente para $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$ em que será utilizada para G_1 a distribuição beta e G_2 assumindo as distribuições beta, cauchy, exponencial, gama, normal e uniforme. Serão adotados ainda $\theta = 0.2$, $\theta = 0.4$, $\theta = 0.5$, $\theta = 0.6$ e $\theta = 0.8$.

Para $\theta = 0.2$ nota-se, na figura G1, que as curvas para as fdps apresentam grande similaridade entre si e, quando se tem a seno – Beta, Cauchy observa-se o menor valor máximo em comparação com as demais, enquanto a seno – Beta, Beta apresenta o maior entre elas no intervalo $(0, 1)$. Percebendo que quando temos a Beta com a Cauchy é possível modelar dados negativos e, ainda há comportamentos diferentes entre as demais, apontando a modelagem de dados diferentes.

Já na figura G5, para $\theta = 0.8$, o gráfico da distribuição seno – Beta, Beta continua apresentando o maior valor entre elas, enquanto a seno – Beta, Cauchy tem-se o menor valor máximo comparando-se entre as demais. É notório que a forma da seno – Beta, Cauchy e da seno – Beta, Normal, para este mesmo valor de θ apresentam o mesmo formato.

Pode-se ainda apontar que em todos os gráficos o comportamento apresentado pelo gráfico fdp da distribuição seno – Beta, Beta permaneceu similar independente da variação do valor de θ .

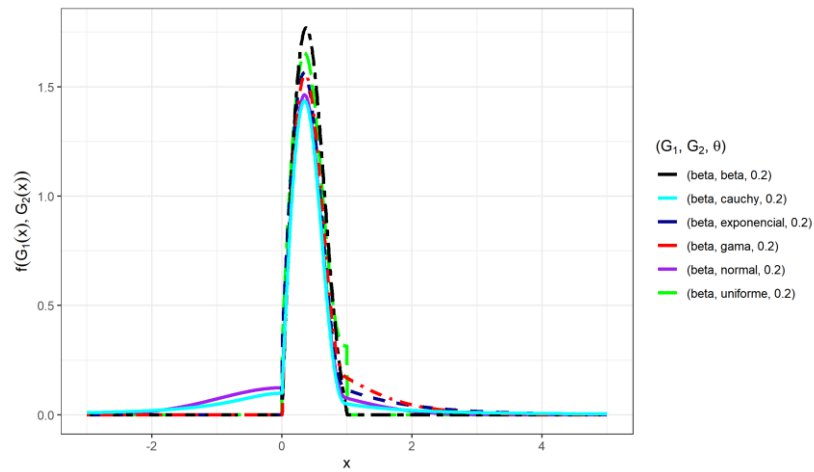


Figura G1 – fdp para $\theta = 0.2$

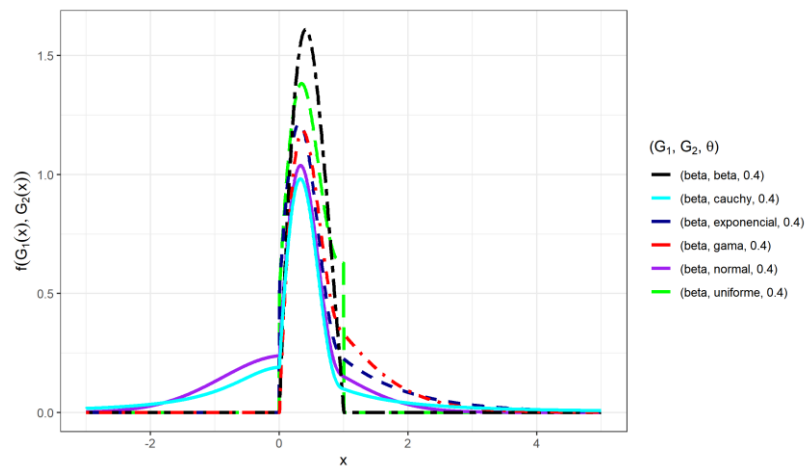
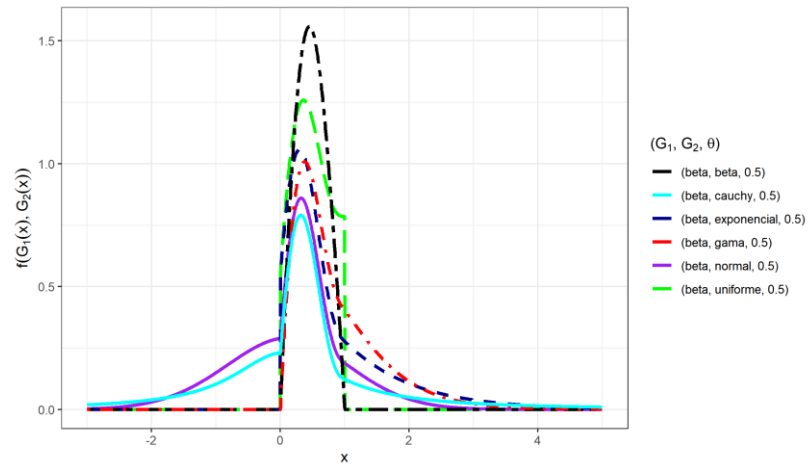
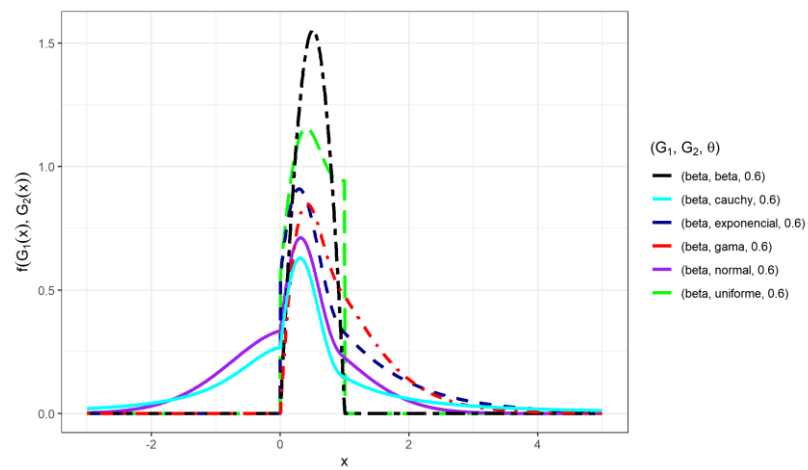
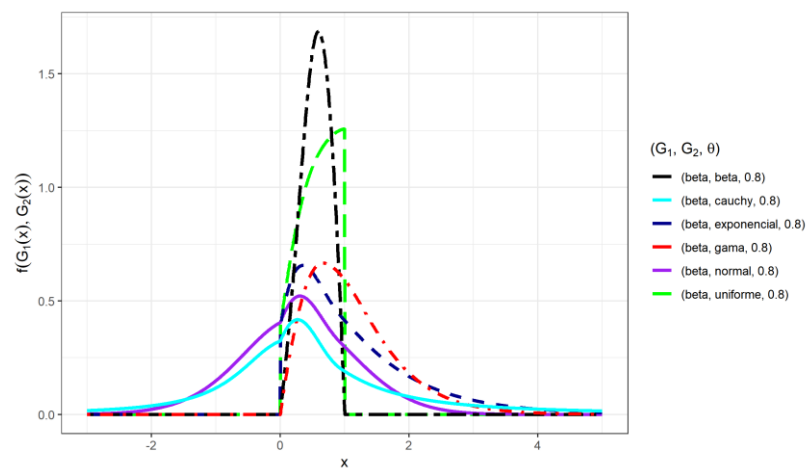


Figura G2 – fdp para $\theta = 0.4$

Figura G3 – fdp para $\theta = 0.5$ Figura G4 – fdp para $\theta = 0.6$ Figura G5 – fdp para $\theta = 0.8$

Outros gráficos das fdps com a combinação de outras distribuições G_1 e G_2 estão disponíveis desde o Apêndice H ao Apêndice L.

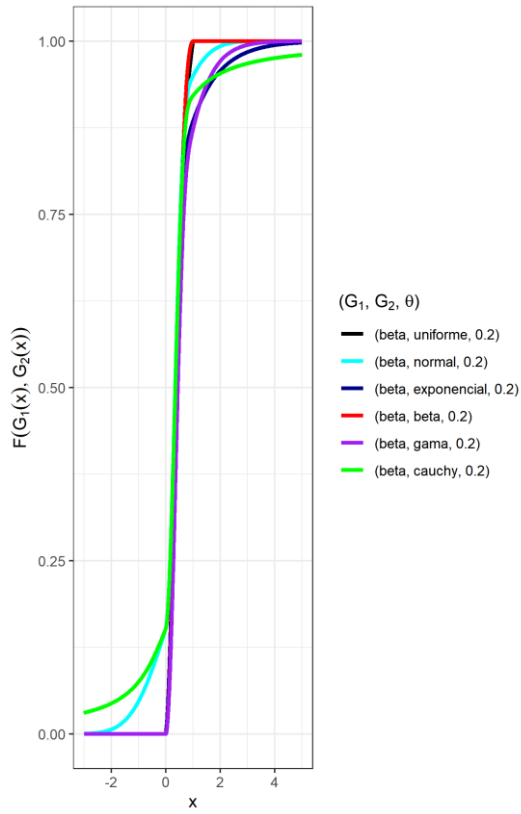
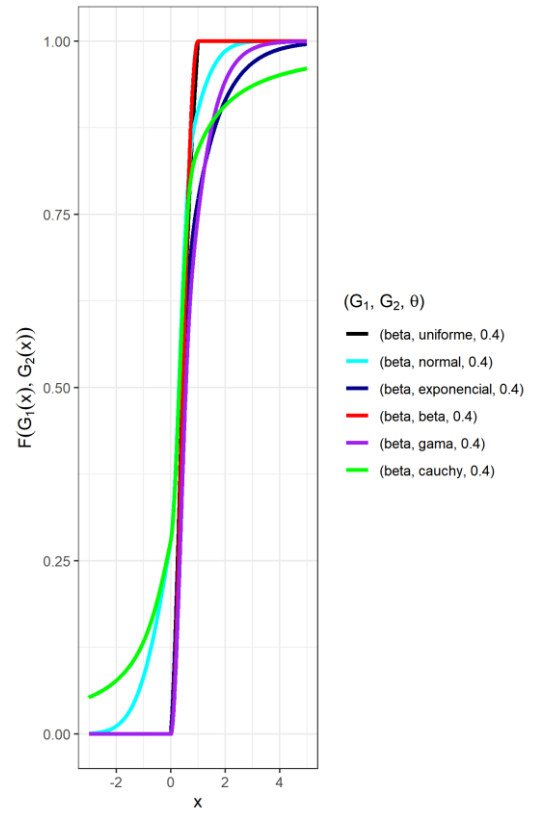
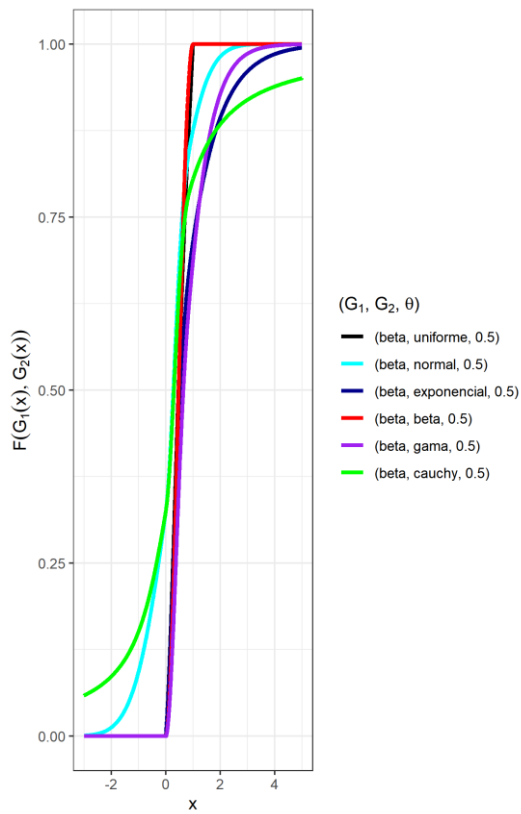
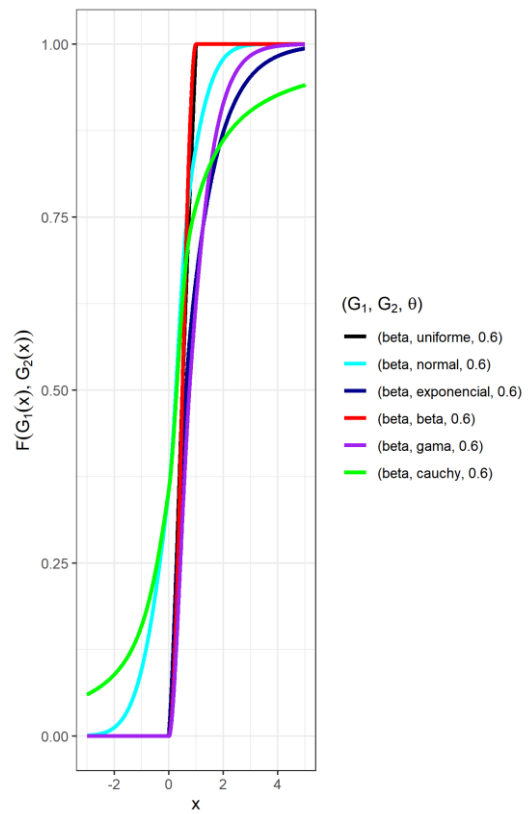
No próximo tópico serão apresentados os gráficos gerados a partir da fda para a classe seno – G_1, G_2 .

4.3.14 Estudo do comportamento da classe seno - G_1, G_2 através de aplicação em dados simulados com algumas bi-baselines

Agora são apresentados os gráficos da fda em que é possível observar o comportamento da classe seno – G_1, G_2 , para $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$ em que será utilizada, para manter a uniformidade deste trabalho, para G_1 a distribuição beta e G_2 considerando as distribuições uniforme, normal, exponencial, beta, gama e cauchy. Serão adotados ainda $\theta = 0.2$, $\theta = 0.4$, $\theta = 0.5$, $\theta = 0.6$ e $\theta = 0.8$.

Para quaisquer valores de θ aqui utilizados, nota-se, visualmente, certa aparência nos gráficos referente aos mesmos pares de distribuições conforme Figuras A1 a A5, embora as mesmas representem comportamentos diferentes.

Outros gráficos das fda com a combinação de outras distribuições G_1 e G_2 estão disponíveis desde o Apêndice B ao Apêndice F.

Figura A1 – fda para $\theta = 0.2$ Figura A2 – fda para $\theta = 0.4$ Figura A3 – fda para $\theta = 0.5$ Figura A4 – fda para $\theta = 0.6$

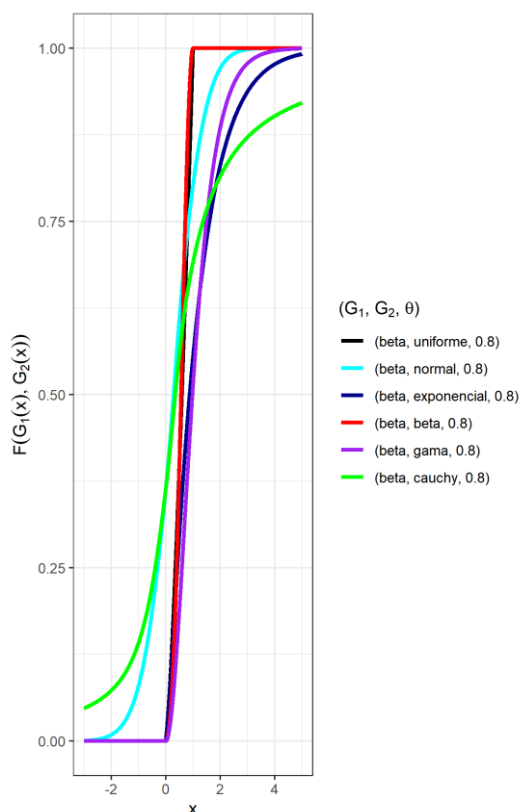


Figura A5 – fda para $\theta = 0.8$

No próximo tópico será vista uma aplicação em dados simulados utilizando a classe seno – G_1, G_2 .

4.3.15 Aplicação em dados simulados da classe seno – G_1, G_2

Na Tabela 4.3, a seguir, é apresentada a simulação classe seno – G_1, G_2 a partir do método de reamostragem ponderada.

Assim, para produzir a Tabela 4.3, depois de produzir dados pseudoaleatórios - que serviram para desenhar os histogramas -, com esses dados, foi realizada uma simulação *bootstrap*, com 1000 repetições, das estimativas e dos erros-padrões das estimativas que estão entre parênteses.

Como resultados estão apresentadas as respectivas médias, desvios-padrões, os quartis, mínimos e máximos. Percebe-se que as médias apresentadas nesta tabela são bastante significativas.

Tabela 4.3: Valores da simulação por reamostragem ponderada com combinação de baselines.

θ	G1(x)	a	b	G2(x)	c	d	Média	DP	Q1	MD	Q3	Mín	Máx
0.9	Uniforme	0	1	Beta	2	5	0.33837 (0.00138)	0.15204 (0.00106)	0.2214 (0.00234)	0.32519 (0.00319)	0.43873 (0.00373)	0.00652 (0.00116)	0.95696 (0.04161)
0.3	Uniforme	-1	5	Beta	6	4	0.83641 (0.01055)	102.038 (0.00984)	0.40473 (0.00686)	0.65202 (0.00331)	0.96096 (0.0286)	-0.99898 (0.00014)	495.222 (0.03191)
0.5	Normal	0	1	Cauchy	7	1.5	414.642 (0.04227)	379.009 (0.01677)	0.00774 (0.03613)	551.384 (0.06531)	716.547 (0.02733)	-866.276 (0.39478)	1.673.033 (0.35728)
0.6	Normal	10	1	Cauchy	-1	1	183.175 (0.0376)	395.174 (0.02435)	-0.8961 (0.01588)	0.18374 (0.02703)	332.658 (0.13463)	-69.445 (0.15779)	1.603.388 (0.88428)
0.4	Normal	10	1	Gama	2	2	45.023 (0.03979)	408.071 (0.01064)	0.85725 (0.01194)	19.333 (0.029)	912.537 (0.02194)	0.02254 (0.0024)	1.191.758 (0.07188)
0.6	Normal	5	0.7	Gama	2	3	145.919 (0.01555)	158.902 (0.01151)	0.43845 (0.00703)	0.78286 (0.00775)	148.853 (0.02787)	0.00749 (0.00124)	624.502 (0.06298)
0.6	Beta	2	2	Gama	6	3	180.037 (0.00941)	101.306 (0.00734)	108.285 (0.01668)	179.849 (0.01018)	242.602 (0.01253)	0.01286 (0.00609)	690.600 (0.59164)
0.3	Beta	2	2	Gama	6	3	121.202 (0.00986)	100.899 (0.00755)	0.36276 (0.00478)	0.77565 (0.01741)	195.015 (0.01461)	0.01037 (0.00320)	570.066 (0.10594)
0.3	Gama	6	3	Beta	2	2	1.04 (0.00571)	0.671 (0.00486)	0.514 (0.00401)	0.855 (0.00616)	1.51 (0.00927)	0.00954 (0.00299)	4.33 (0.372)
0.5	Uniforme	0	1	Beta	0.5	1.5	0.29249 (0.00247)	0.24799 (0.00153)	0.07813 (0.00211)	0.23058 (0.00313)	0.4608 (0.00574)	0.00100 (0.00000)	0.99223 (0.00215)

Fonte: autoria própria a partir do *software R*

A seguir apresenta-se os histogramas e o ajuste da fdp gerados pela simulação *bootstrap* a partir de 1000 repetições da estimativas e erros-padrão que estão na tabela 4.3 entre parênteses.

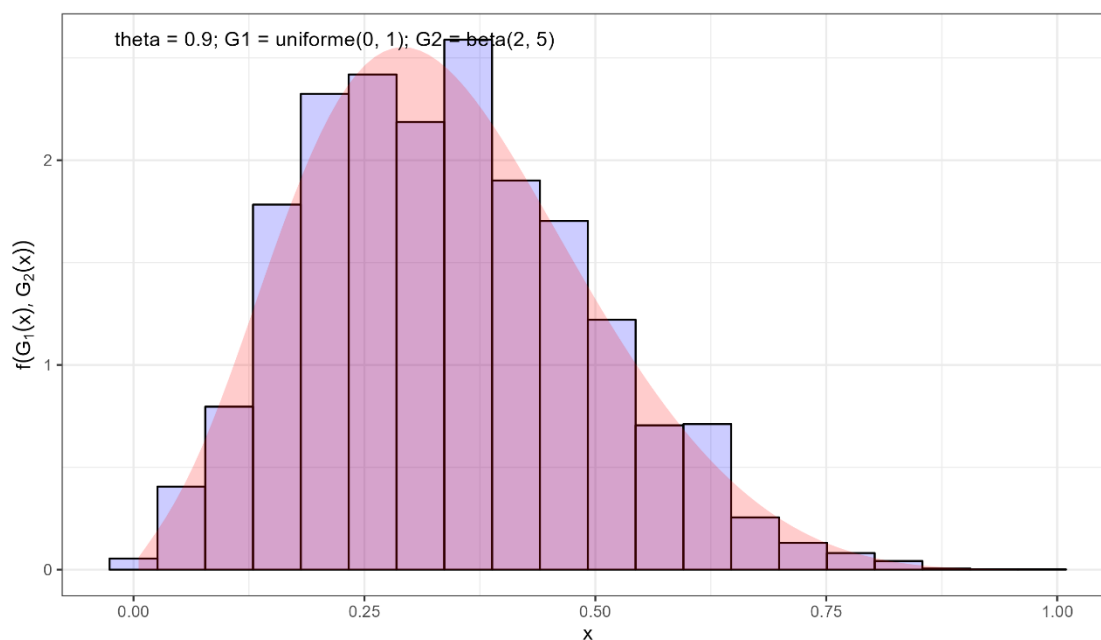


Figura 01: Histograma 1 (autoria própria)

Para G_1 sendo a uniforme com $a=0$ e $b=1$ e, G_2 sendo a beta com $c=2$ e $d=5$, com $\theta = 0.9$

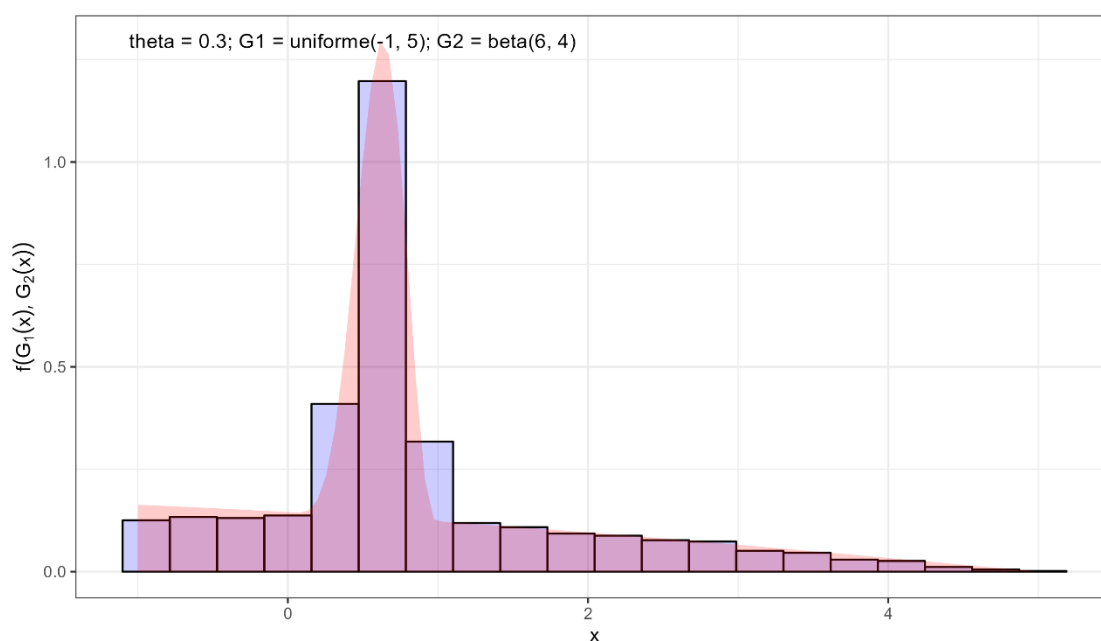


Figura 02: Histograma 2 (autoria própria)

Para G_1 sendo a uniforme com $a=-1$ e $b=5$ e, G_2 sendo a beta com $c=6$ e $d=4$, com $\theta = 0.3$

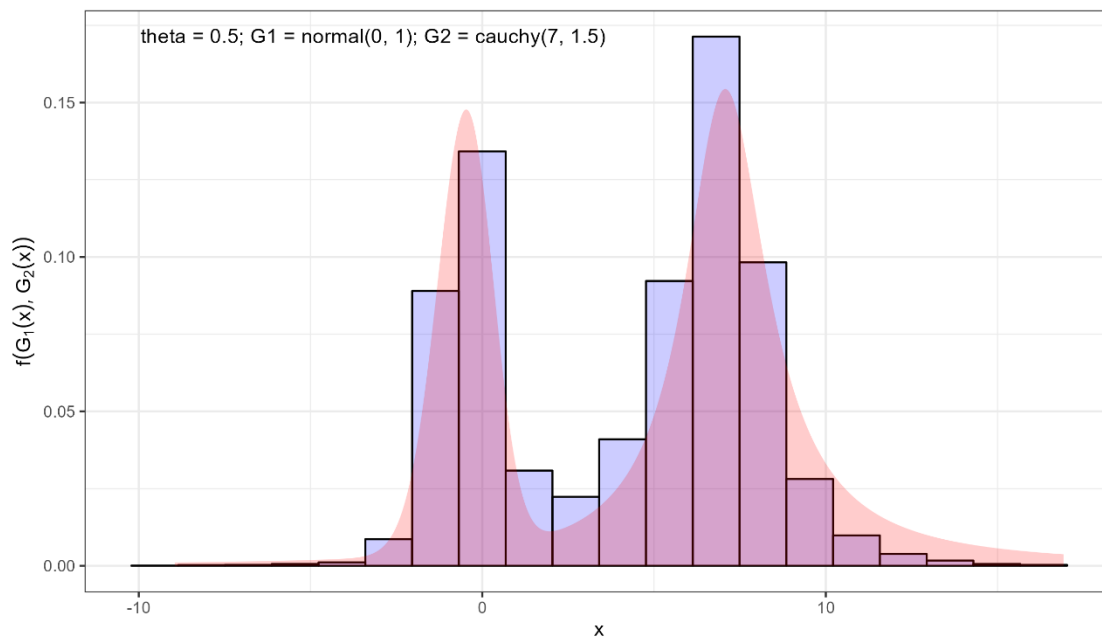


Figura 03: Histograma 3 (autoria própria)

Para G_1 sendo a normal com $a=0$ e $b=1$ e, G_2 sendo a cauchy com $c=7$ e $d=1,5$, com $\theta = 0.5$

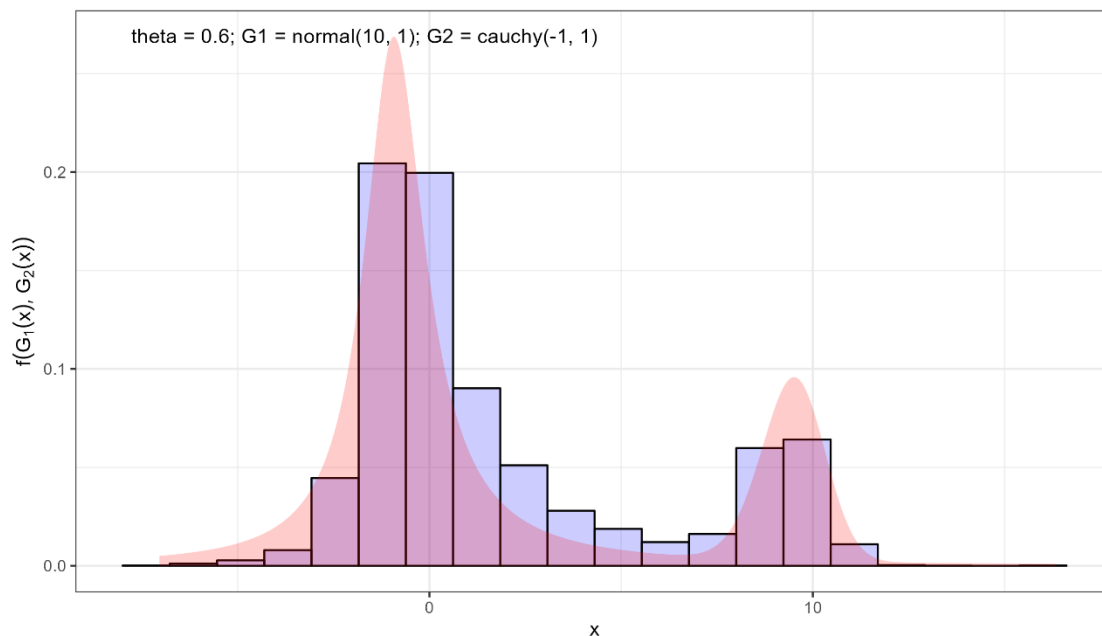


Figura 04: Histograma 4 (autoria própria)

Para G_1 sendo a normal com $a=10$ e $b=1$ e, G_2 sendo a cauchy com $c=-1$ e $d=1$, com $\theta = 0.6$

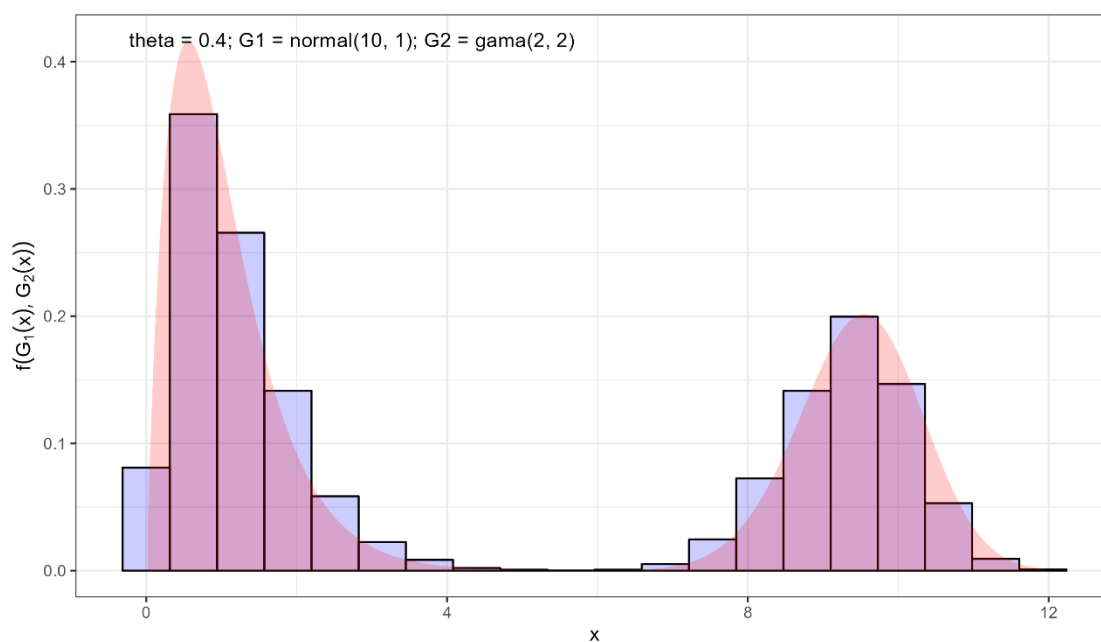


Figura 05: Histograma 5 (autoria própria)

Para G_1 sendo a normal com $a=10$ e $b=1$ e, G_2 sendo a gama com $c=2$ e $d=2$, com $\theta = 0.4$

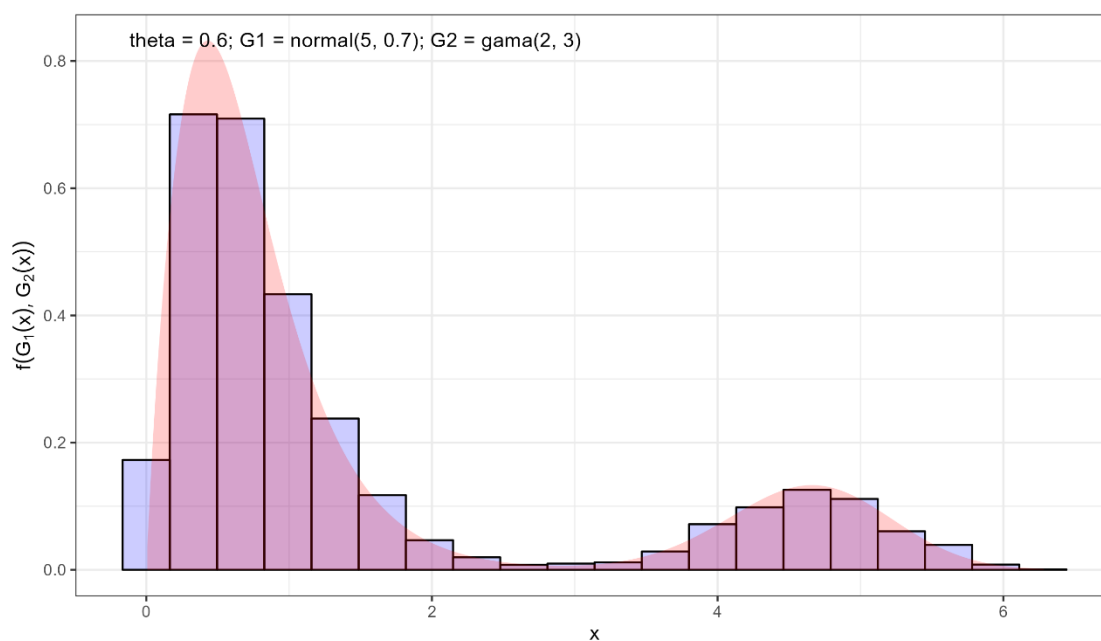


Figura 06: Histograma 6 (autoria própria)

Para G_1 sendo a normal com $a=5$ e $b=0.7$ e, G_2 sendo a gama com $c=2$ e $d=3$, com $\theta = 0.6$

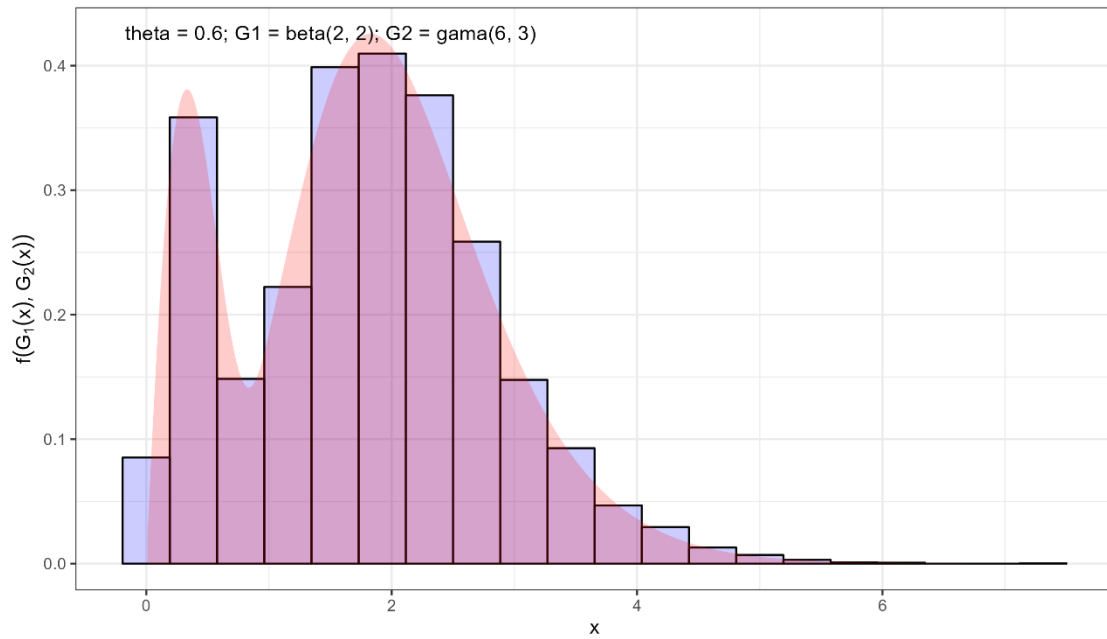


Figura 07: Histograma 7 (autoria própria)

Para G_1 sendo a beta com $a=2$ e $b=2$ e, G_2 sendo a gama com $c=6$ e $d=3$, com $\theta = 0.6$

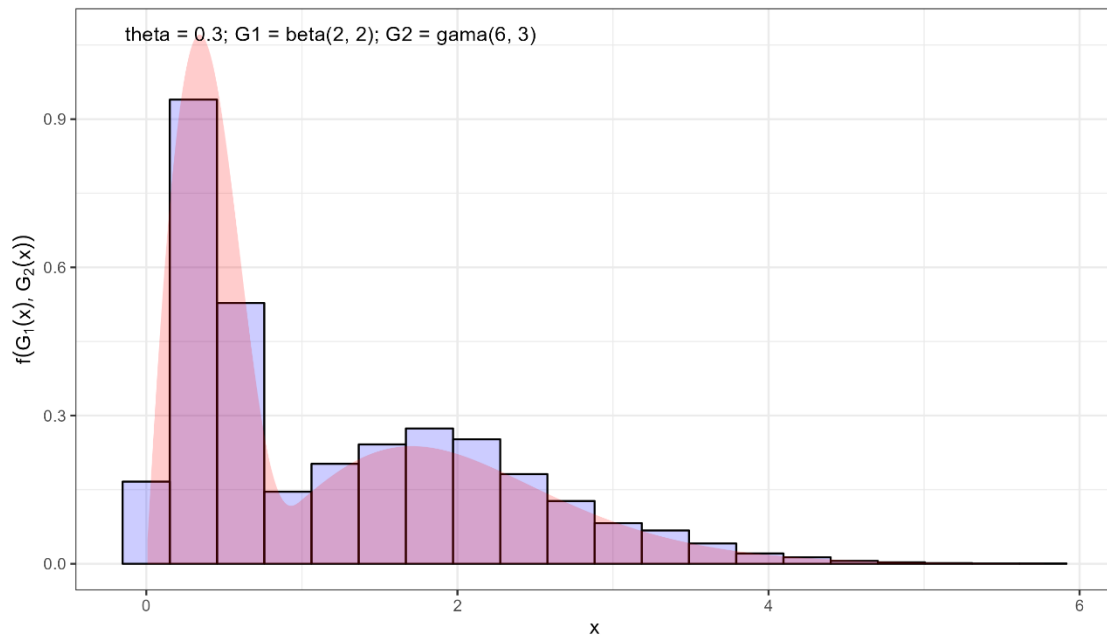


Figura 08: Histograma 8 (autoria própria)

Para G_1 sendo a beta com $a=2$ e $b=2$ e, G_2 sendo a gama com $c=6$ e $d=3$, com, com $\theta = 0.3$

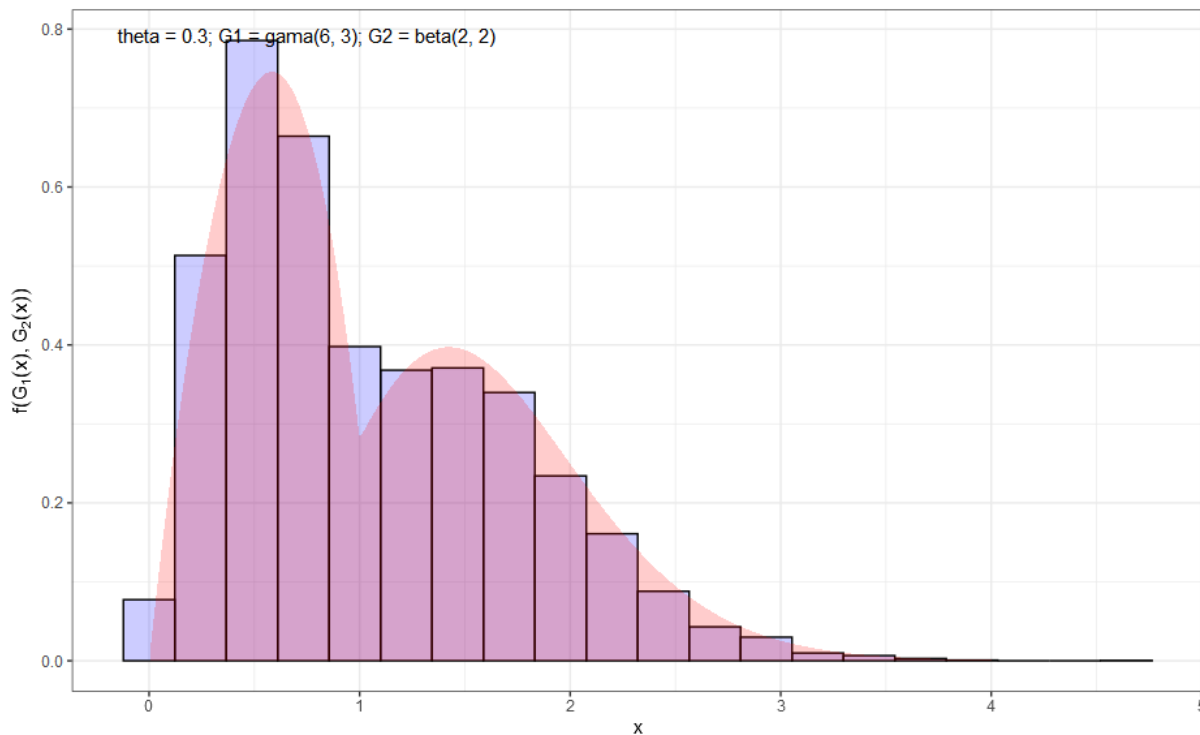


Figura 09: Histograma 9 (autoria própria)

Para G_1 sendo a gama com $a=6$ e $b=3$ e, G_2 sendo a beta com $c=2$ e $d=2$, com, com $\theta = 0.3$

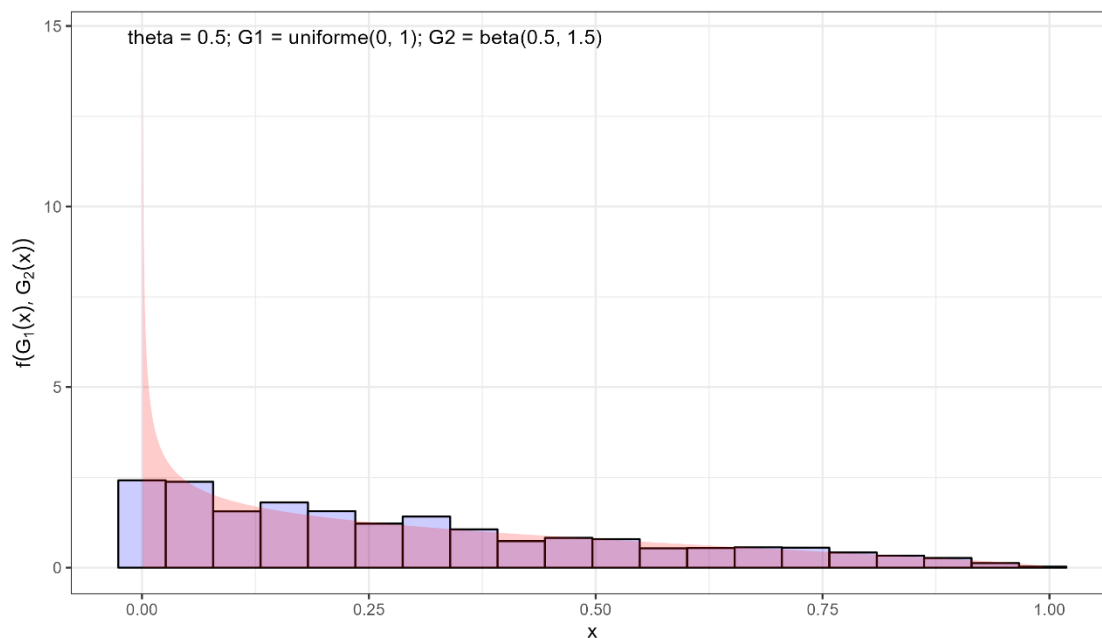


Figura 10: Histograma 10 (autoria própria)

Para G_1 sendo a uniforme com $a=0$ e $b=1$ e, G_2 sendo a beta com $c=0.5$ e $d=1.5$, com, com $\theta = 0.5$

É possível perceber, em todos os gráficos, um bom ajuste em relação ao histograma. Nota-se ainda a bimodalidade em diversas situações diante a escolha das duas baselines, isso se deve aos valores escolhidos para a , b , c e d que, ao modificá-los é possível obter gráficos com uma ou com duas curvaturas, mostrando assim boa flexibilidade e adaptabilidade da classe aqui proposta.

Agora, para a distribuição seno – Gama, Geta serão elencadas suas propriedades de caracterização, em que será exposto o modelo funcional da fda, as expansões da Função de Distribuição Acumulada, as expansões da Função de Distribuição de Probabilidade, a função Risco, a expansão para os momentos de ordem m , a expansão para a função geradora de momentos, a expansão para a função característica, a expansão para os momentos centrais de ordem m , a expansão para o coeficiente geral, a expansão para o Desvio Médio e Desvio Quantílico, as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros e , a entropia de Rényi e , posteriormente, as aplicações em dados simulados e em dados reais.

4.4 Distribuição proposta pela classe seno - G_1 , G_2 e suas propriedades de caracterização

Como exposto anteriormente, serão apresentadas as propriedades de caracterização da distribuição seno – gama, beta. A seguir, tem-se o modelo funcional da fda desta distribuição.

4.4.1 Modelo funcional da fda da distribuição seno - Gama, Beta

Os cálculos para obtenção do modelo funcional da fda da distribuição seno – gama, beta serão apresentados nas próximas linhas, entretanto, para este trabalho as seguintes notações para a fda e a fdp da gama serão alteradas, ficando, respectivamente, apresentadas nas linhas a seguir. Considere:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta y} dy$$

e

$$\Gamma(x; \alpha, \beta) = \int_0^x y^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta y} dy.$$

Então a fda será:

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}$$

e a fdp será:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}.$$

Já para a beta, deve-se considerar a seguinte notação para a fda e para a fdp, respectivamente:

$$B(a, b) = \int_0^1 y^{a-1} \cdot (1-y)^{b-1} dy$$

e

$$B(x; a, b) = \int_0^x y^{a-1} \cdot (1-y)^{b-1} dy.$$

Então, a fda será:

$$F(x; a, b) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$$

e sua fdp, será:

$$f(x; a, b) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)}.$$

Agora, como $G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}$ e $G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$, logo tem-se:

$$F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$$

$$F_{G, B}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta) \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta \left(1 - \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)}{2} \right].$$

Portanto, a fda da distribuição seno - gama, beta é dada por:

$$F_{G,B}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x; a, b))}{2B(a, b)} \right].$$

Agora, será apresentado o modelo funcional da fdp da distribuição seno – Gama, Beta.

4.4.2 Modelo funcional da fdp da distribuição seno - Gama, Beta

Para o modelo funcional da fdp da distribuição seno – Gama, Beta, tem-se os seguintes cálculos:

$$\text{Como } F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x; a, b))}{2B(a, b)} \right], \text{ logo}$$

tem-se:

$$f_{G_1, G_2}(x) = F'_{G_1, G_2}(x)$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] + \frac{\pi\theta \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{2B(a, b)} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x; a, b))}{2B(a, b)} \right].$$

Portanto, a fdp da distribuição seno - Gama, Beta é dada por:

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] + \frac{\pi\theta \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{2B(a, b)} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x; a, b))}{2B(a, b)} \right].$$

No próximo tópico, tem-se a exposição das expansões da função de distribuição acumulada da distribuição seno – Gama, Beta.

4.4.3 Expansões da função de distribuição acumulada da distribuição seno - Gama, Beta

As expansões da função de distribuição acumulada da distribuição seno – Gama, Beta podem ser encontradas a partir do seguinte cálculo:

Como $G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$ e $F_{G_1, G_2}(x)$ logo, segue que:

$$F_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot G_1^v$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot G_2^v$$

$$F_{G, B}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v.$$

Portanto,

$$F_{G, B}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1-v} \cdot (1-\theta)^v}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j+1} \binom{2j+1}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j+1)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v.$$

Na próxima subseção são expostas as expansões da função de distribuição de probabilidade da distribuição seno – gama, beta.

4.4.4 Expansões da função de distribuição de probabilidade da distribuição seno - Gama, Beta

A expansão da função de distribuição de probabilidade da distribuição seno – beta, gama será obtida através do seguinte processo:

Como $G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$, $g_1(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $g_2(x) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)}$ e $f_{G_1, G_2}(x)$ logo tem-se:

$$f_{G_1, G_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x)$$

$$f_{G, B}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v.$$

Portanto,

$$f_{G, B}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v.$$

Agora será apresentada a função de risco usando a distribuição seno - Gama, Beta.

4.4.5 Função risco usando a distribuição seno - Gama, Beta

Pode-se obter a função risco usando a distribuição seno - Gama, Beta:

$$\mathcal{R}_{G_1, G_2}(x) = \frac{f_{G_1, G_2}(x)}{1 - F_{G_1, G_2}(x)}$$

Como $G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$, $g_1(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $g_2(x) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)}$ e $\mathcal{R}_{G_1, G_2}(x)$ logo tem-se:

$$\mathcal{R}_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)\cos\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + \pi\theta g_2(x)\cos\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}{2 - 2\text{Sen}\left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2}\right] + 2\text{Sen}\left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2}\right]}$$

$$\mathcal{R}_{G, B}(x) = \frac{\pi(1-\theta)\frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}\cos\left[\frac{\pi(1-\theta)\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}+\pi\theta}{2}\right] + \pi\theta\frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)}\cos\left[\frac{\pi\theta\left(1-\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}\right)}{2}\right]}{2 - 2\text{Sen}\left[\frac{\pi(1-\theta)\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}+\pi\theta}{2}\right] + 2\text{Sen}\left[\frac{\pi\theta\left(1-\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}\right)}{2}\right]}.$$

Portanto,

$$\mathcal{R}_{G, B}(x) = \frac{\pi(1-\theta)\frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}\cos\left[\frac{\pi(1-\theta)\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}+\pi\theta}{2}\right] + \pi\theta\frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)}\cos\left[\frac{\pi\theta\left(1-\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}\right)}{2}\right]}{2 - 2\text{Sen}\left[\frac{\pi(1-\theta)\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}+\pi\theta}{2}\right] + 2\text{Sen}\left[\frac{\pi\theta\left(1-\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}\right)}{2}\right]}.$$

A expansão para os momentos de ordem m para a distribuição seno – Gama, Beta está exposta a seguir.

4.4.6 Expansão para os momentos de ordem m para a distribuição seno - Gama, Beta

A seguir será introduzida a expressão dos momentos probabilisticamente ponderados e em seguida será visto o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos de ordem m para a distribuição seno - Gama, Beta:

Como $G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$, $g_1(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $g_2(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)}$ e $\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x)$ logo tem-se:

$$\begin{aligned} \mu_m &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx \\ \mu_m &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v dx \\ \mu_m &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G, m, 0, v} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B, m, 0, v}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu_m &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G, m, 0, v} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B, m, 0, v} \end{aligned}$$

Em que

$$\tau_{G, m, \eta, r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left(\frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^{\eta+1} \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^r dx$$

e

$$\tau_{B, m, \eta, r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left(\frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \right)^{\eta+1} \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^r dx.$$

■

Em particular, tem-se a seguinte expansão para a média para a distribuição seno - Gama, Beta:

Como $\mu = \mu_1$, então tem-se:

$$\begin{aligned} \mu = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,1,0,v} \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,1,0,v}. \end{aligned}$$

■

No próximo tópico a expansão para a função geradora de momentos da distribuição seno – Gama, Beta será desenvolvida.

4.4.7 Expansão para a função geradora de momentos para a distribuição seno - Gama, Beta

A seguir será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a distribuição seno - Gama, Beta:

$$\text{Como } G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}, G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}, g_1(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}, g_2(x) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} e$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x) \text{ logo tem-se:}$$

$$\begin{aligned} M_X(t) = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx \end{aligned}$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v dx$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v dx$$

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{G,m,0,v}$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{B,m,0,v}$$

Portanto,

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{G,m,0,v}$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{B,m,0,v}$$

Em que

$$\tau_{G,m,\eta,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left(\frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^{\eta+1} \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^r dx$$

e

$$\tau_{B,m,\eta,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left(\frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \right)^{\eta+1} \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^r dx.$$

■

A exposição da expansão para a função característica para da distribuição seno – gama, beta é vista no próximo tópico.

4.4.8 Expansão para a função característica para a distribuição seno - Gama, Beta

A seguir o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função característica para a distribuição seno - Gama, Beta será apresentado.

$$\text{Como } G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}, G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}, g_1(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}, g_2(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} e$$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x), \text{ logo:}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{G, m, 0, v} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{B, m, 0, v} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j} \cdot m!} \cdot \tau_{G, m, 0, v} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1} \cdot i^m \cdot t^m}{(2j)! \cdot 2^{2j+1} \cdot m!} \cdot \tau_{B, m, 0, v} \end{aligned}$$

Em que

$$\tau_{G,m,\eta,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left(\frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^{\eta+1} \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^r dx$$

E

$$\tau_{B,m,\eta,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left(\frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \right)^{\eta+1} \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^r dx$$

■

No próximo tópico tem-se a exposição da expansão dos momentos centrais de ordem m para a distribuição seno – Gama, Beta.

4.4.9 Expansão para os momentos centrais de ordem m para a distribuição seno - Gama, Beta

Agora serão desenvolvidos os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a distribuição seno - Gama, Beta:

Como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{m-r}$$

Como

$$\begin{aligned} \mu_{m-r} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,m-r,0,v} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,m-r,0,v} \end{aligned}$$

tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,m-r,0,v} \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,m-r,0,v} \right]$$

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,m-r,0,v} \\ + \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,m-r,0,v}$$

Portanto,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,m-r,0,v} \\ + \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,m-r,0,v}$$

■

Em particular, tem-se que a expansão da variância para a distribuição seno - Gama, Beta é dada por:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{1,2-r,0,v} \\ + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{2,2-r,0,v}$$

■

A exposição da expansão para o coeficiente geral para a distribuição seno - gama, beta será vista a seguir.

4.4.10 Expansão para o coeficiente geral para a distribuição seno - Gama, Beta

A seguir desenvolver-se-ão os cálculos da expansão para o coeficiente geral para a distribuição seno - Gama, Beta:

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então tem-se:

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Em que,

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,m-r,0,v} \\ &\quad + \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{m}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,m-r,0,v} \\ \sigma^m &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,2-r,0,v} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,2-r,0,v} \right)^{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

■

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ a expansão para o coeficiente geral para a distribuição seno - Gama, Beta será dada por:

$$C_a = C_g(3) = \frac{\mu'_3}{\sigma^3}$$

Em que,

$$\begin{aligned}\mu'_3 &= \sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{3}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,3-r,0,v} \\ &\quad + \sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{3}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,3-r,0,v} \\ \sigma^3 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,2-r,0,v} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,2-r,0,v} \right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

■

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$ a expansão para o coeficiente de curtose para a distribuição seno - Gama, Beta é dada por:

$$C_c = C_g(4) = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}$$

em que,

$$\begin{aligned}\mu'_4 &= \sum_{r=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{4}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,4-r,0,v} \\ &\quad + \sum_{r=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{4}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,4-r,0,v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^4 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \tau_{G,2-r,0,v} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2}{r} \cdot \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{r+v+j} \cdot \mu^r \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \tau_{B,2-r,0,v} \right)^2\end{aligned}$$

■

A seguir são apresentadas as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição seno - Gama, Beta.

4.4.11 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição seno - Gama, Beta

Serão apresentados os cálculos do desenvolvimento das derivadas função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição seno - Gama, Beta:

Como

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \log f_{G,B}(x_i; a, b, \alpha, \beta, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x_i}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x_i; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi\theta \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot (1-x_i)^{b-1}}{2B(a, b)} \cos \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x_i; a, b))}{2B(a, b)} \right] \right) \end{aligned}$$

Logo tem-se que:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G,B}(x_i; a, b, \alpha, \beta, \theta)}{\partial a} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log}{\partial a} \left(\frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x_i}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x_i; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi\theta \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot (1-x_i)^{b-1}}{2B(a, b)} \cos \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x_i; a, b))}{2B(a, b)} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G,B}(x_i; a, b, \alpha, \beta, \theta)}{\partial b} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log}{\partial b} \left(\frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x_i}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x_i; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi\theta \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot (1-x_i)^{b-1}}{2B(a, b)} \cos \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x_i; a, b))}{2B(a, b)} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G,B}(x_i; a, b, \alpha, \beta, \theta)}{\partial \alpha} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log}{\partial \alpha} \left(\frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x_i}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x_i; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi\theta \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot (1-x_i)^{b-1}}{2B(a, b)} \cos \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x_i; a, b))}{2B(a, b)} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G,B}(x_i; a, b, \alpha, \beta, \theta)}{\partial \beta} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log}{\partial \beta} \left(\frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x_i}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x_i; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi\theta \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot (1-x_i)^{b-1}}{2B(a, b)} \cos \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x_i; a, b))}{2B(a, b)} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_{G,B}(x_i; a, b, \alpha, \beta, \theta)}{\partial \theta} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log}{\partial \theta} \left(\frac{\pi(1-\theta) \cdot \beta^\alpha \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x_i}}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \cos \left[\frac{\pi(1-\theta)\Gamma(x_i; \alpha, \beta) + \pi\theta\Gamma(\alpha, \beta)}{2\Gamma(\alpha, \beta)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi\theta \cdot x_i^{\alpha-1} \cdot (1-x_i)^{b-1}}{2B(a, b)} \cos \left[\frac{\pi\theta(B(a, b) - B(x_i; a, b))}{2B(a, b)} \right] \right)
\end{aligned}$$

■

A seguir a entropia proposta neste trabalho será apresentada usando a distribuição seno - Gama, Beta.

4.4.12 Entropia de Rényi usando a distribuição seno - Gama, Beta

Posteriormente será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da expansão da entropia para a distribuição seno - Gama, Beta, usando a entropia de Rényi.

Como $G_1(x) = \frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $G_2(x) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$, $g_1(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)}$, $g_2(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a, b)}$ logo tem-se:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot g_1(x) \cdot G_1^v(x) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot g_2(x) \cdot G_2^v(x) \right)^\eta dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v \right)^\eta dx \right).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^j \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j-v} \cdot (1-\theta)^{v+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j}} \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(x; \alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \right)^v \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{2j} \binom{2j}{v} \cdot \frac{(-1)^{v+j} \cdot \pi^{2j+1} \cdot \theta^{2j+1}}{(2j)! \cdot 2^{2j+1}} \cdot \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left(\frac{B(x; a, b)}{B(a, b)} \right)^v \right)^\eta dx \right).$$

■

Agora será apresentada uma aplicação em dados reais utilizando a distribuição seno - gama, beta.

4.4.13 Aplicação em dados reais da distribuição seno - Gama, Beta

Para ilustrar a potencialidade da nova distribuição gerada pela classe aqui proposta foi realizada uma aplicação em dados reais de varicela, conhecida popularmente como catapora, que estão definidos a partir de Hipel e McLeod (1994)

sendo composto por 498 observações do número relatado mensalmente de varicela na Cidade de Nova Iorque entre 1931-1972, divididos por 1000. O código R utilizado está no Apêndice N e, os dados utilizados estão no Anexo A.

Analisando o gráfico comparativo entre a distribuição seno – Gama, Beta e os demais propostos, nota-se que os dados apresentam certa bimodalidade e, somente o modelo seno – Gama, Beta e a mistura de normais foram capazes de capturar a bimodalidade. No entanto, a distribuição normal não captou o excesso de valores próximos à zero e subestima bastante o segundo pico em torno de um.

Apesar do modelo seno – Gama, Beta superestimar o primeiro pico, no restante da distribuição, nota-se que ele modela bem, captando a bimodalidade do estudo em questão.

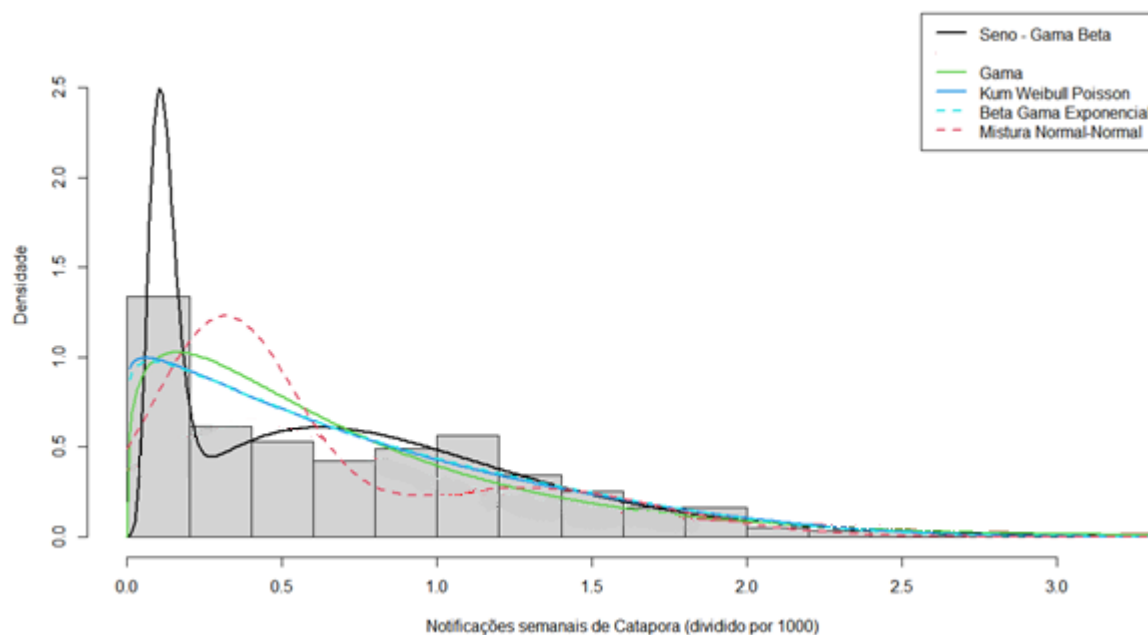


Figura 10: Comparação entre distribuições (autoria própria)

Acima tem-se o gráfico comparativo entre as distribuições seno – Gama, Beta; distribuição Gama; distribuição Kumaraswamy, distribuição Beta-gama Exponencial, e a mistura de normais.

Na tabela 4.4 de estimativas dos parâmetros α, β, a, b a seguir, tem-se que as primeiras linhas são as estimativas e os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.

Com intuito de evitar problemas de convergências, o valor de θ do modelo da mistura normal-normal foi fixado em 0,5, assim, não apresenta erro-padrão.

Tabela 4.4: valores estimados para distribuições

Distribuição	θ	α	β	a	b	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2
seno - Gama, Beta	0,15982 (0,01675)	2,26338 (0,21787)	1,63934 (0,17494)	6,27245 (1,05674)	46,63935 (9,19715)	-	-	-	-
Gama	-	1,28068 (0,07298)	1,74857 (0,12134)	-	-	-	-	-	-
Kum Weibull Poisson	0,22927 (0,08385)	1,95065 (1,08443)	4,60759 (1,75620)	0,97035 (0,75230)	0,40346 (0,10175)	-	-	-	-
Beta Gama Exponencial	0,05590 (0,02754)	5,96621 (2,92750)	19,36963 (10,30051)	1,06384 (0,18031)	-	-	-	-	-
Mistura: Normal x Normal	0,50000	-	-	-	-	0,31162 (0,03583)	0,23174 (0,03560)	1,28450 (0,04858)	0,44148 (0,02425)

Fonte: autoria própria a partir do *software R*

Agora, na tabela 4.5, apresentam-se os critérios de escolha, em que os valores menores ocorrem para os modelos mais bem ajustados. Fica notório que o modelo seno – Gama, Beta é o que apresentou menor AIC, CAIC, BIC e também no critério HQIC.

Tabela 4.5: critérios de escolha para distribuições

	AIC	CAIC	BIC	HQIC
seno - Gama, Beta	567,67	567,79	588,72	575,93
Gama	672,18	672,20	680,60	675,48
Kum Weibull Poisson	658,44	658,56	679,49	666,70
Beta Gama Exponencial	654,32	654,40	671,16	660,93
Mistura: Normal x Normal	810,63	810,71	827,48	817,24

Fonte: autoria própria a partir do *software R*

A seguir, apresenta-se a classe proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp e suas propriedades de caracterização em que serão vistos o modelo funcional da fdp da classe, o modelo funcional da fda da classe, as expansões da Função de Distribuição de Probabilidade, as expansões da Função de Distribuição Acumulada, a função Risco, a expansão para os momentos de ordem m , a expansão para a função geradora de momentos, a expansão para a função característica, a expansão para os momentos centrais de ordem m , a expansão para o coeficiente geral, a expansão para o Desvio

Médio e Desvio Quantílico, as Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros e, as entropias de Rényi e de Shannon para a classe beta $G - \gamma$.

4.5 Classe proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp e suas propriedades de caracterização

Como já exposto, serão apresentadas as propriedades de caracterização da classe proposta, iniciando com o modelo funcional da fdp da classe beta $G - \gamma$.

4.5.1 Modelo funcional da fdp da classe beta $G - \gamma$

Os cálculos para obtenção do modelo funcional da fdp da classe beta $G - \gamma$ serão apresentados nas próximas linhas.

Sejam $f(x; \underline{\lambda}) = f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}$ fdp da distribuição beta e $G(t; \underline{\theta})$ uma fda derivável. Como $C: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ é uma função bijetora e derivável e como $k(\underline{\lambda}, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(C(G(t; \underline{\theta})), \underline{\lambda}) \cdot \left[(C(G(x; \underline{\theta})))' \right]^\gamma dt$ e $\gamma \geq 0$, e como $C(G(t; \underline{\theta})) = G(t; \underline{\theta})$ e $\underline{\lambda} = (\alpha, \beta)$, então

$$f_G(x; \underline{\lambda}, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{1}{k(\underline{\lambda}, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot f(C(G(x; \underline{\theta})), \underline{\lambda}) \cdot \left[(C(G(x; \underline{\theta})))' \right]^\gamma$$

$$f_G(x, \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{1}{k(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot f(C(G(x, \underline{\theta})); \alpha, \beta) \cdot \left[(G(x; \underline{\theta}))' \right]^\gamma$$

$$f_G(x, \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{1}{k(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot f(C(G(x, \underline{\theta})); \alpha, \beta) \cdot [g(x; \underline{\theta})]^\gamma$$

$$K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha-1}(t, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(t, \underline{\theta}))^{\beta-1} dt$$

$$f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1}.$$

Portanto, gera-se a fdp uma classe de distribuições de probabilidades proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, conforme equação a seguir:

$$f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1}.$$

Agora, será apresentado o modelo funcional da fda da classe beta G - γ .

4.5.2 Modelo funcional da fda da classe beta G - γ

Para o modelo funcional da fda da classe beta G - γ , tem-se os seguintes cálculos:

Como $F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^x f_G(t; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) dt$, logo tem-se que:

$$F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^x f_G(t; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) dt$$

$$F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^x \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(t, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(t, \underline{\theta}))^{\beta-1} dt.$$

Portanto, gera-se a fda de uma classe de distribuições de probabilidades proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, conforme a seguinte equação:

$$F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^x \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(t, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(t, \underline{\theta}))^{\beta-1} dt.$$

No próximo tópico, tem-se a exposição das expansões da função de distribuição de probabilidade da classe beta G - γ .

4.5.3 Expansões da função de distribuição de probabilidade da classe beta G - γ

As expansões da função de distribuição de probabilidade da classe beta G - γ podem ser encontradas a partir do cálculo a seguir:

Como $(1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot G^j(x, \underline{\theta})$, logo tem-se que:

$$f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1}$$

$$f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot G^j(x, \underline{\theta})$$

$$f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}).$$

Portanto, a expansão da fdp da classe de distribuições de probabilidades proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, é obtida conforme equação abaixo:

$$f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}).$$

O próximo tópico a exposição das expansões da função de distribuição de acumulada da classe beta G - γ serão apresentadas.

4.5.4 Expansões da função de distribuição acumulada da classe beta G - γ

A expansão da função de distribuição acumulada da d classe beta G - γ . será obtida através do seguinte processo:

Como $F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^x f_G(t; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) dt$, logo tem-se que:

$$F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^x f_G(t; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) dt$$

$$F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(t, \underline{\theta}) dt.$$

$$F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^x g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(t, \underline{\theta}) dt.$$

Portanto, a expansão da fda da classe de distribuições acumulada proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, é obtida conforme equação a seguir:

$$F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^x g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(t, \underline{\theta}) dt.$$

No próximo tópico, será apresentada a função de risco usando a classe beta G - γ .

4.5.5 Função risco usando a classe beta G - γ

Pode-se obter a função risco usando a classe beta G - γ :

$$\mathcal{R}_G(x) = \frac{f_G(x)}{1 - F_G(x)}$$

$$\mathcal{R}_G(x) = \frac{f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{1 - F_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}$$

$$\mathcal{R}_G(x) = \frac{\frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1}}{1 - \int_{-\infty}^x \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha-1}(t, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(t, \underline{\theta}))^{\beta-1} dt}$$

$$\mathcal{R}_G(x) = \frac{\frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1}}{\int_x^{\infty} \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha-1}(t, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(t, \underline{\theta}))^{\beta-1} dt}$$

$$\mathcal{R}_G(x) = \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1}}{\int_x^{\infty} g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha-1}(t, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(t, \underline{\theta}))^{\beta-1} dt}$$

A expansão para os momentos de ordem m para a classe beta G - γ será apresentada a seguir.

4.5.6 Expansão para os momentos de ordem m para a classe beta $G - \gamma$

A seguir será introduzida a expressão dos momentos probabilisticamente ponderados e em seguida será visto o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos de ordem m para a classe beta $G - \gamma$:

Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x).$$

Logo, tem-se:

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$\mu_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx.$$

Portanto,

$$\mu_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \tau_{m, \gamma-1, \alpha+j-1}.$$

Em que

$$\tau_{m, \eta, r} = E(X^m f(X)^\eta F(X)^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)^\eta F(x)^r dF(x).$$

■

Em particular, obtém-se a seguinte expansão para a média para a classe beta $G - \gamma$:

Como $\mu = \mu_1$, então tem-se que:

$$\mu = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \tau_{1, \gamma-1, \alpha+j-1}.$$

■

No próximo tópico será desenvolvida a expansão para a função geradora de momentos para a classe beta $G - \gamma$.

4.5.7 Expansão para a função geradora de momentos para a classe beta G - γ

A seguir será proposto o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a para a classe beta G - γ :

Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x)$$

Tem-se

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx.$$

Como

$$e^{tx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!}$$

Logo, tem-se que:

$$M_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j t^m}{j! \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx.$$

Portanto,

$$M_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j t^m}{j! \cdot m!} \cdot \tau_{m, \gamma-1, \alpha+j-1}.$$

■

A exposição da expansão para a função característica para a classe beta G - γ será vista no tópico a seguir.

4.5.8 Expansão para a função característica para a classe beta G - γ

Agora será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função característica para a classe beta G - γ :

Como

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

Tem-se que:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx.$$

Como

$$e^{itx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!}$$

Então:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \cdot t^m \cdot x^m}{m!} \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot i^m \cdot t^m}{j! \cdot m!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx.$$

Portanto,

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot i^m \cdot t^m}{j! \cdot m!} \cdot \tau_{m, \gamma-1, \alpha+j-1}.$$

■

A exposição da expansão dos momentos centrais de ordem m para a classe beta G - γ será vista no próximo tópico.

4.5.9 Expansão para os momentos centrais de ordem m para a Classe beta $G - \gamma$

Agora serão desenvolvidos os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe beta $G - \gamma$:

como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{m-r}.$$

Como

$$\mu_{m-r} = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \tau_{m-r, \gamma-1, \alpha+j-1},$$

tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \tau_{m-r, \gamma-1, \alpha+j-1}.$$

Portanto,

$$\mu'_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{m}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{m-r, \gamma-1, \alpha+j-1}$$

■

Em particular, tem-se que a expansão da variância para a classe beta $G - \gamma$ é dada por:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{2-r, \gamma-1, \alpha+j-1}.$$

■

A exposição da expansão para o coeficiente geral para a classe beta $G - \gamma$ será trabalhada no tópico seguinte.

4.5.10 Expansão para o coeficiente geral para a classe beta G - γ

A seguir, desenvolver-se-ão os cálculos da expansão para o coeficiente geral para a classe beta G - γ :

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então tem-se:

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{m}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{m-r, \gamma-1, \alpha+j-1}}{\left(\frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{2-r, \gamma-1, \alpha+j-1} \right)^{\frac{m}{2}}}$$

$$C_g(m) = \frac{\left(K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) \right)^{\frac{m-2}{2}} \cdot \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{m}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{m-r, \gamma-1, \alpha+j-1}}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{2-r, \gamma-1, \alpha+j-1} \right)^{\frac{m}{2}}}.$$

■

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ teremos que a expansão para o coeficiente geral para a classe beta G - γ é dada por:

$$C_a = \frac{\frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{3}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{3-r, \gamma-1, \alpha+j-1}}{\left(\frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{2-r, \gamma-1, \alpha+j-1} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$C_a = \frac{\sqrt{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{3}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{3-r, \gamma-1, \alpha+j-1}}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{2-r, \gamma-1, \alpha+j-1} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

■

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$ teremos que a expansão para o coeficiente de curtose para a classe beta G - γ :

$$C_c = \frac{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) \cdot \sum_{r=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{4}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{4-r, \gamma-1, \alpha+j-1}}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \cdot \mu^r \cdot \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \tau_{2-r, \gamma-1, \alpha+j-1} \right)^2}.$$

■

No seguinte tópic, as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe beta G - γ serão apresentadas.

4.5.11 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe beta G - γ

Serão apresentados a seguir os cálculos do desenvolvimento das derivadas função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe beta G - γ :

Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \log f_G(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) &= -n \log (K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)) + \gamma \sum_{i=1}^n \log (g(x_i, \underline{\theta})) + \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log (G(x_i, \underline{\theta})) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n (1 - G(x_i, \underline{\theta})) \end{aligned}$$

Logo tem-se que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_G(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \gamma} + \sum_{i=1}^n \log (g(x_i, \underline{\theta}))$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_G(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^n \log (G(x_i, \underline{\theta}))$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_G(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \beta} = \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \beta} + \sum_{i=1}^n (1 - G(x_i, \underline{\theta}))$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_G(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)}{\partial \theta_j} + \gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log (g(x_i, \underline{\theta}))}{\partial \theta_j} +$$

$$+(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log(G(x_i, \underline{\theta}))}{\partial \theta_j} + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log(1 - G(x_i, \underline{\theta}))}{\partial \theta_j}$$

■

A entropia proposta neste trabalho será apresentada usando a classe beta G - γ , a seguir.

4.5.12 Entropia de Rényi usando a classe beta G - γ

Será visto o desenvolvimento dos cálculos da entropia para a classe beta G - γ , usando a entropia de Rényi:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1} \right)^\eta dx \right).$$

Como

$$(1 - G(x, \underline{\theta}))^{\eta\beta - \eta} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta\beta - \eta}{j} \cdot (-1)^j \cdot G^j(x, \underline{\theta}).$$

Logo

$$f_G^\eta(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{g^\eta(x, \underline{\theta})}{K^\eta(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\eta(\alpha-1)}(x, \underline{\theta}) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta(\beta-1)}{j} \cdot (-1)^j \cdot G^j(x, \underline{\theta})$$

$$f_G^\eta(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{g^\eta(x, \underline{\theta})}{K^\eta(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta(\beta-1)}{j} \cdot (-1)^j \cdot G^{\eta(\alpha-1)+j}(x, \underline{\theta}).$$

Assim,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^\eta(x, \underline{\theta})}{K^\eta(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta(\beta-1)}{j} \cdot (-1)^j \cdot G^{\eta(\alpha-1)+j}(x, \underline{\theta}) dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\frac{1}{K^\eta(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta(\beta-1)}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g^\eta(x, \underline{\theta}) G^{\eta(\alpha-1)+j}(x, \underline{\theta}) dx \right).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{K^\eta(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \binom{\eta(\beta-1)}{j} \cdot \tau_{0, \eta-1, \eta(\alpha-1)+j} \right).$$

■

4.5.13 Estudo do comportamento da classe beta G - γ através de gráficos para alguns valores dos parâmetros

As figuras M4 e M5 a seguir foram obtidas a partir da seguinte expressão da classe beta – G γ :

$$f_G(x; \alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma) = \frac{g^\gamma(x, \underline{\theta})}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(x, \underline{\theta}) \cdot (1 - G(x, \underline{\theta}))^{\beta-1},$$

em que foram atribuídos os valores para $\alpha = 0.5$, $\alpha = 2.0$ e $\alpha = 5.0$, $\beta = 0.5$ e $\gamma = 0.0$, $\gamma = 1.0$, $\gamma = 2.0$.

Nos gráficos da figura M4, para os valores adotados para $\alpha = 0.5$ nota-se o comportamento diferente para cada novo valor de γ , para $\alpha = 2.0$ e $\alpha = 5.0$ e $\gamma = 0.0$, em ambos os casos, os gráficos possuem a mesma forma e, de igual modo ocorrem quando $\alpha = 2.0$ e $\gamma = 1.0$; $\alpha = 2.0$ e $\gamma = 2.0$ e, quando $\alpha = 5.0$ e $\gamma = 2.0$.

Notadamente, é possível perceber nos diferentes formatos a flexibilidade, a simetria, a assimetria e a bimodalidade, mostrando a importância desta classe e que é possível obter essas modelagens.

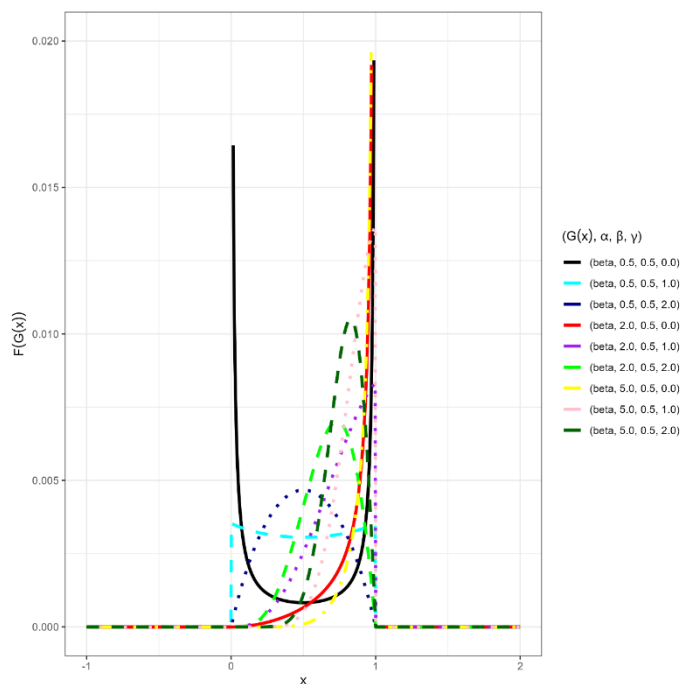


Figura M4 – Gráficos da fdp da classe beta $\text{Beta} - \gamma$

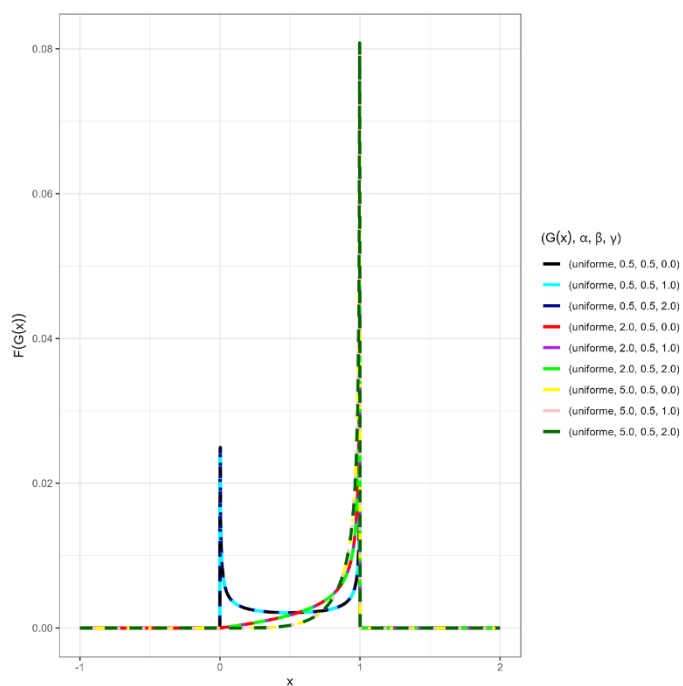


Figura M5 – gráficos da fdp da classe beta Uniforme $\text{Uniforme} - \gamma$

Outros gráficos podem ser encontrados no Apêndice M.

Na seção 4.6 será proposta uma distribuição oriunda do método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp e suas propriedades de caracterização em que serão vistos o modelo funcional da fdp da distribuição proposta pela classe beta $G - \gamma$, o modelo funcional da fda da distribuição, as expansões da Função de Distribuição de Probabilidade, as expansões da Função de Distribuição Acumulada, a função Risco, a expansão para os momentos de ordem m , a expansão para a função geradora de momentos, a expansão para a função característica, a expansão para os momentos centrais de ordem m , a expansão para o coeficiente geral, a expansão para o Desvio Médio e Desvio Quantílico, as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros e, as entropias de Rényi e de Shannon para a classe beta $G - \gamma$.

4.6 Distribuição proposta pela classe beta $G - \gamma$ e suas propriedades de caracterização

Agora, serão apresentadas as propriedades de caracterização da distribuição proposta, que neste caso, será a exponencial, iniciando com o modelo funcional da fdp desta distribuição.

4.6.1 Modelo funcional da fdp da distribuição beta Exponencial - γ

Para obtenção do modelo funcional da fdp da distribuição, os cálculos serão apresentados nas linhas a seguir.

Sejam $f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}$ fdp da distribuição beta e $G(t, \lambda)$ uma fda derivável. Como $C: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ é uma função bijetora e derivável e como $k(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(C(G(t; \lambda)); \alpha, \beta) \cdot \left[(C(G(x; \lambda)))' \right]^\gamma dt$ e $\gamma \geq 0$, e como $C(G(t; \lambda)) = G(t; \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$ e $g(t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$, então

$$f_G(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{1}{k(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot f(C(G(x; \lambda)); \alpha, \beta) \cdot \left[(C(G(x; \lambda)))' \right]^\gamma$$

$$f_G(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{1}{k(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot f(C(G(x; \lambda)); \alpha, \beta) \cdot [(G(x; \lambda))']^\gamma$$

$$f_G(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{1}{k(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot f(C(G(x; \lambda)); \alpha, \beta) \cdot [g(x; \lambda)]^\gamma$$

$$K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^\gamma(x; \lambda) \cdot G^{\alpha-1}(t; \lambda) \cdot (1 - G(t; \lambda))^{\beta-1} dt$$

$$f_G(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{g^\gamma(x; \lambda)}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(x; \lambda) \cdot (1 - G(x; \lambda))^{\beta-1}$$

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{(\lambda e^{-\lambda t})^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (1 - 1 + e^{-\lambda x})^{\beta-1}$$

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1}.$$

Portanto a fdp da distribuição exponencial é obtida pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, conforme equação abaixo:

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1}.$$

Será apresentado o modelo funcional da fda da distribuição beta Exponencial - γ , na próxima subseção.

4.6.2 Modelo funcional da fda da distribuição beta Exponencial - γ

Para o modelo funcional da fda da distribuição beta Exponencial - γ , tem-se os seguintes cálculos:

Como $F_G(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_{-\infty}^x f_G(t; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) dt$, logo:

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_0^x f_E(t; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) dt$$

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_0^x \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda t})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda t})^{\gamma+\beta-1} dt.$$

Portanto, a fda da distribuição exponencial é obtida pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, conforme equação a seguir:

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_0^x \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda t})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda t})^{\gamma+\beta-1} dt.$$

No próximo tópico tem-se a exposição das expansões da função de distribuição de probabilidade da distribuição beta Exponencial - γ

4.6.3 Expansões da função de distribuição de probabilidade da distribuição beta Exponencial - γ

As expansões da função de distribuição de probabilidade da distribuição beta Exponencial - γ podem ser encontradas a partir dos cálculos a seguir:

Como $(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-j\lambda x}$, tem-se que:

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1}$$

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-j\lambda x}$$

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-\lambda \cdot (\gamma+\beta+j-1)x}.$$

Portanto, a expansão da fdp da distribuição exponencial obtida pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, é escrita conforme equação abaixo:

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-\lambda \cdot (\gamma+\beta+j-1)x}.$$

O tópico seguinte trata da exposição das expansões da função de distribuição de acumulada da distribuição beta G - γ .

4.6.4 Expansões da função de distribuição acumulada da distribuição beta Exponencial - γ

A expansão da função de distribuição acumulada da classe beta Exponencial - γ será obtida através do seguinte processo:

Como $F_G(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_{-\infty}^x f_G(t; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) dt$, logo temos que:

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_0^x f_E(t; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) dt$$

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_0^x \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-\lambda \cdot (\gamma + \beta + j - 1)t} dt$$

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_0^x e^{-\lambda \cdot (\gamma + \beta + j - 1)t} dt$$

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^{\gamma-1}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot \frac{(-1)^{j+1} \cdot e^{-\lambda \cdot (\gamma + \beta + j - 1)x}}{\gamma + \beta + j - 1}.$$

Portanto, a expansão da fda da distribuição acumulada proposta pelo método gerador de classes de distribuições probabilísticas via composições de fdp, conforme equação a seguir:

$$F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^{\gamma-1}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot \frac{(-1)^{j+1} \cdot e^{-\lambda \cdot (\gamma + \beta + j - 1)x}}{\gamma + \beta + j - 1}.$$

Agora, será apresentada a função de risco usando a distribuição beta Exponencial - γ .

4.6.5 Função risco usando a distribuição beta Exponencial - γ

Pode-se obter a função risco usando a distribuição beta Exponencial - γ :

$$\mathcal{R}_G(x) = \frac{f_G(x)}{1 - F_G(x)}$$

$$\mathcal{R}_E(x) = \frac{f_E(x)}{1 - F_E(x)}$$

$$\mathcal{R}_E(x) = \frac{f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1 - F_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma)}$$

$$\mathcal{R}_E(x) = \frac{\frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-\lambda \cdot (\gamma + \beta + j - 1)x}}{1 - \frac{\lambda^{\gamma-1}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} \cdot \frac{(-1)^{j+1} \cdot e^{-\lambda \cdot (\gamma + \beta + j - 1)x}}{\gamma + \beta + j - 1}}$$

A expansão para os momentos de ordem m para a distribuição beta Exponencial - γ será apresentada a seguir.

4.6.6 Expansão para os momentos de ordem m para a distribuição beta Exponencial - γ

Para a distribuição em estudo será introduzida a expressão dos momentos probabilisticamente ponderados e em seguida será visto o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos de ordem m .

Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x)$$

Logo, tem-se:

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$\mu_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$\mu_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha+j-1} dx$$

$$\mu_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^l \cdot e^{-\lambda(\alpha+j-l-1)x} dx$$

$$\mu_m = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot e^{-\lambda(\alpha+j+\gamma-l-1)x} dx$$

$$\mu_m = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{[\lambda \cdot (\alpha+j+\gamma-l-1)]^{m+1}}$$

$$\mu_m = \frac{\lambda^{\gamma-m-1}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{m+1}}$$

Portanto,

$$\mu_m = \frac{\lambda^{\gamma-m-1}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{m+1}}.$$

■

Em particular, tem-se a seguinte expansão para a média para a distribuição beta Exponencial - γ :

Como $\mu = \mu_1$, então obtém-se:

$$\mu = \frac{\lambda^{\gamma-2}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{1}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^2}.$$

■

No tópico seguinte será desenvolvida a expansão para a função geradora de momentos para a classe beta Exponencial - γ .

4.6.7 Expansão para a função geradora de momentos para a distribuição beta Exponencial - γ

A seguir é proposto o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a para a distribuição beta Exponencial - γ :

Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x)$$

Tem-se

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{K(\alpha, \beta, \underline{\theta}, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \underline{\theta}) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \underline{\theta}) dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha+j-1} dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^l \cdot e^{-\lambda(\alpha+j-l-1)x} dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot e^{-\lambda(\alpha+j-l-1)x} dx$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-\lambda(\alpha+\gamma+j-l-1)x} dx$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[t-\lambda(\alpha+\gamma+j-l-1)]x} dx$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{1}{t - \lambda \cdot (\alpha + \gamma + j - l - 1)}$$

Portanto,

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{1}{t - \lambda \cdot (\alpha + \gamma + j - l - 1)}.$$

■

A exposição da expansão para a função característica para a distribuição beta Exponencial - γ será vista no tópico seguinte.

4.6.8 Expansão para a função característica para a distribuição beta Exponencial - γ

Agora será mostrado o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função característica para a distribuição beta Exponencial - γ :

Como

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

Tem-se que:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot g^\gamma(x, \lambda) \cdot G^{\alpha+j-1}(x, \lambda) dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha+j-1} dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^l \cdot e^{-\lambda(\alpha+j-l-1)x} dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^\gamma \cdot e^{-\lambda(\alpha+j-l-1)x} dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha+\gamma+j-l-1)x} dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[it-\lambda \cdot (\alpha+\gamma+j-l-1)]x} dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{1}{it - \lambda \cdot (\alpha + \gamma + j - l - 1)}.$$

Portanto,

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{1}{it - \lambda \cdot (\alpha + \gamma + j - l - 1)}.$$

■

A exposição da expansão dos momentos centrais de ordem m para a distribuição beta Exponencial - γ será proposta no próximo tópico.

4.6.9 Expansão para os momentos centrais de ordem m para a distribuição beta Exponencial - γ

A seguir será visto o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a distribuição beta Exponencial - γ :

Como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{m-r}.$$

Como

$$\mu_{m-r} = \frac{\lambda^{\gamma-m+r-1}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{\Gamma(m-r+1)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{m-r+1}}.$$

Tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \frac{\lambda^{\gamma-m+r-1}}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{j+l} \cdot \frac{\Gamma(m-r+1)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{m-r+1}}.$$

Portanto,

$$\mu'_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{m}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma-m+r-1} \cdot \Gamma(m-r+1)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{m-r+1}}.$$

■

Em particular, tem-se que a expansão da variância para a distribuição beta Exponencial - γ é dada por:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma+r-3} \cdot \Gamma(3-r)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{3-r}}.$$

■

A exposição da expansão para o coeficiente geral para a distribuição beta Exponencial - γ será trabalhada no tópico seguinte.

4.6.10 Expansão para o coeficiente geral para a distribuição beta Exponencial - γ

Em sequência será apresentado o desenvolvimento dos cálculos da expansão para o coeficiente geral para a distribuição beta Exponencial - γ :

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, tem-se:

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Em que,

$$\mu'_m = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{m}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma-m+r-1} \cdot \Gamma(m-r+1)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{m-r+1}}$$

$$\sigma^m = \left(\frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma+r-3} \cdot \Gamma(3-r)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{3-r}} \right)^{\frac{m}{2}}.$$

■

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ tem-se que a expansão para o coeficiente geral para a distribuição beta Exponencial - γ é dada por:

$$C_a = \frac{\mu'_3}{\sigma^3}.$$

Em que,

$$\mu'_3 = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{3}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma+r-4} \cdot \Gamma(4-r)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{4-r}}$$

$$\sigma^3 = \left(\frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma+r-3} \cdot \Gamma(3-r)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{3-r}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

■

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$ tem-se que a expansão para o coeficiente de curtose para a classe beta Exponencial - γ :

$$C_c = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}.$$

Em que,

$$\mu'_4 = \frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{4}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma-5+r} \cdot \Gamma(5-r)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{5-r}}$$

$$\sigma^4 = \left(\frac{1}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \cdot \binom{\beta-1}{j} \cdot \binom{\alpha+j-1}{l} \cdot (-1)^{r+j+l} \cdot \frac{\mu^r \cdot \lambda^{\gamma+r-3} \cdot \Gamma(3-r)}{(\alpha+j+\gamma-l-1)^{3-r}} \right)^2.$$

■

As derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição beta Exponencial - γ serão apresentadas no próximo tópico.

4.6.11 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição beta Exponencial - γ

A seguir, os cálculos do desenvolvimento das derivadas função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a distribuição beta Exponencial - γ serão apresentados.

Como

$$\sum_{i=1}^n \log f_E(x_i; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda x_i})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x_i})^{\gamma+\beta-1} \right) =$$

$$= n\gamma \log \lambda - n \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log (1 - e^{-\lambda x_i}) - \lambda(\gamma + \beta - 1) \sum_{i=1}^n x_i$$

Logo, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_E(x_i; \alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \alpha} = -n \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^n \log (1 - e^{-\lambda x_i})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_E(x_i; \alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \beta} = -n \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \beta} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_E(x_i; \alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda} = \frac{n\gamma}{\lambda} - n \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} - (\gamma + \beta - 1) \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_E(x_i; \alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \gamma} = n \log \lambda - n \frac{\partial \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{\partial \gamma} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

■

No tópicos 4.6.12 a entropia proposta neste trabalho será apresentada usando para a distribuição beta Exponencial - γ .

4.6.12 Entropia de Rényi usando a distribuição beta Exponencial - γ

A seguir, tem-se o desenvolvimento dos cálculos da expansão da entropia para a distribuição beta Exponencial - γ , usando a entropia de Rényi:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1} \right)^\eta dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\frac{\lambda^{\eta\gamma}}{K^{\eta}(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot \int_0^{+\infty} \left((1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1} \right)^\eta dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{\eta\gamma \log \lambda - \eta \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_0^{+\infty} \left((1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1} \right)^\eta dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{\eta\gamma \log \lambda - \eta \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x})^{\eta\alpha-\eta} \cdot (e^{-\lambda x})^{\eta\gamma+\eta\beta-\eta} dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{\eta\gamma \log \lambda - \eta \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta\alpha-\eta}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-\lambda \cdot j \cdot x} \cdot (e^{-\lambda x})^{\eta\gamma+\eta\beta-\eta} dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{\eta\gamma \log \lambda - \eta \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta\alpha - \eta}{j} \cdot (-1)^j \cdot e^{-\lambda \cdot \eta \cdot (\gamma + \beta + j - 1) \cdot x} dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{\eta\gamma \log \lambda - \eta \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta\alpha - \eta}{j} \cdot (-1)^j \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot \eta \cdot (\gamma + \beta + j - 1) \cdot x} dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{\eta\gamma \log \lambda - \eta \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta\alpha - \eta}{j} \cdot (-1)^j \cdot \frac{1}{\lambda \cdot \eta \cdot (\gamma + \beta + j - 1)} \right).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{\eta\gamma \log \lambda - \eta \log K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta\alpha - \eta}{j} \cdot (-1)^j \cdot \frac{1}{\lambda \cdot \eta \cdot (\gamma + \beta + j - 1)} \right).$$

■

No próximo tópico será vista uma aplicação em dados simulados utilizando a distribuição seno - Gama, Beta.

4.5.13 Aplicação em dados simulados da distribuição beta Exponencial - γ através de gráficos para alguns valores dos parâmetros

A seguir percebe-se que na tabela 4.6 apresenta-se o AIC entre a distribuição Gama e a distribuição beta Exponencial - γ em que foram gerados valores a partir da Gama (2,1) contaminados por N (5,1), valores para simulação, em que os dados com essas informações estão contidos nos códigos que geraram os gráficos no Apêndice N. O método de otimização aqui utilizado foi o Algoritmo Genético em que foram solicitadas os seguintes números:

Simulações: 100

População: 10

Crossover: 80%

Mutação: 30%

Função de *fitness*: $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i; \theta))^2}{f(x_i; \theta)}$, em que $f(x_i; \theta)$ é a densidade sob estimação e θ é o vetor paramétrico.

Tabela 4.6 – AIC para escolha de distribuição a partir de dados simulados

Modelo	α	β	λ	γ	AIC
Gama	3,5868	0,4470	-	-	240,0729
Beta - Exponencial	4,8847	0,4180	0,2613	1,8340	235,8027

Fonte: autoria própria a partir do *software* R

Assim, a distribuição Beta-Exponencial é melhor pelo critério do menor AIC. Vale ressaltar que o modelo funcional da fdp da distribuição beta Exponencial - γ utilizado deu-se a partir de:

$$f_E(x; \alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \frac{\lambda^\gamma}{K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \cdot (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1}$$

em que $K(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \int_0^{+\infty} \lambda^\gamma (e^{-\lambda x})^{\gamma+\beta-1} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} dx$.

A seguir, tem-se a figura 11 em que são apresentados os gráficos da distribuição Gama e da distribuição Beta Exponencial, juntamente com o histograma, confirmando que a distribuição Beta Exponencial que obteve o melhor AIC é a que melhor modela os dados simulados aqui propostos.

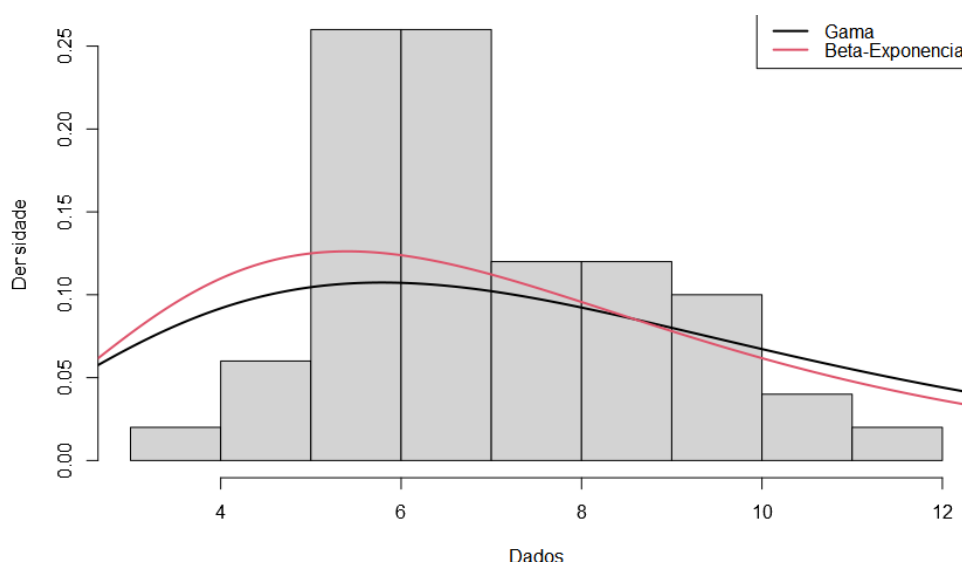


Figura 11: Gráfico comparativo entre as distribuições (autoria própria)

Na figura 11 tem-se o histograma e os gráficos das distribuições Gama e a distribuição proposta Beta Exponencial.

Apesar das diversas propostas de generalizações e extensões, como as encontradas nos trabalhos de Mudholkar *et al* (1995), Gupta e Kundu (1999), Nadarajah (2011), Adamski, Human e Bekker (2012), Nadarajah e Kotz (2006a), Tahir e Nadarajah (2015), McDonald (1984), Cordeiro e Castro (2011), Marshall e Olkin (1997), Jayakumar e Mathew (2008), Zografos (2008), Zografos e Balakrishnan (2009), Kundu, Jamlizadeh e Silva (2013) e Silva (2013), Pescim *et al* (2012), Eugene *et al* (2002), Mudholkar *et al* (1995), Brito (2014), entre outros, aqui, foi proposta uma que difere das demais, quando há geração de distribuições e classes de distribuições a partir da fdp.

Após apresentar as aplicações das distribuições aqui propostas, A seguir, tem-se o capítulo 5 que está dedicado às conclusões deste trabalho, bem como a apresentação de contribuições e possibilidades de trabalhos futuros, apontando assim relevância para comunidade na área estatística e científica.

5. Conclusões

Observou-se que dois métodos geradores de distribuições e classes de distribuições foram produzidos, em que o primeiro deles teve como base duas proposições que demonstram esses métodos utilizando composições de funções de distribuições acumuladas – fda's com misturas de *baselines* a partir da construção de funções de ligações monotônicas obtendo o tipo 1 e o tipo 2 - MGM-fda 1 e MGM fda 2. De igual modo, mais duas proposições foram apresentadas para criação dos métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas via composições de funções de distribuições de probabilidades – fdp's a partir da construção de funções bijetoras de ligações com misturas de *baselines* obtendo-se os tipos 1 e 2, sendo denominados de MGM-fdp 1 e MGM-fdp 2.

Dada as condições impostas para criação dos métodos, nota-se a generalização de distribuições e classes de distribuições já existentes na literatura e, também da formação de classes e distribuições probabilísticas inéditas que poderão ser encontradas ao fazer uso dos subcasos apresentados a partir da escolha de alguns valores, pares de funções e derivadas que servem para alimentar as devidas expressões matemáticas formando os métodos construtores de distribuições com seus respectivos suportes.

Os resultados podem demonstrar que as novas distribuições são apropriadas para aplicações em dados simulados, similarmente a primeira também é apropriada para dados reais. Dessa forma, tem-se que os modelos propostos para gerar classes e, conseqüentemente distribuições trazem importantes contribuições na área da probabilidade, cabendo mais investigações em outros fenômenos reais, inclusive nas Ciências Agrárias.

Pode-se perceber que este método gera uma quantidade enumerável de funções geradoras de classes de distribuições, podendo ser observados na lista proposta nas tabelas – que são apenas algumas propostas, e por conseqüência, o mesmo para modelos probabilísticos, que podem ser aplicados em trabalhos futuros das mais diversas áreas.

Neste trabalho foram utilizados apenas alguns casos particulares que seriam convenientes. Assim, acrescenta-se que não se esgotam as possibilidades de

resultados que podem ser obtidos, deixando como continuação a ampliação de novas distribuições e, de aplicações nos mais variados campos do conhecimento.

Como possíveis contribuições, tem-se algumas listas de subcasos do método gerador que servem para desenvolver outras distribuições de probabilidades, além disso, é apresentado o método via fdp de forma inédita como gerador de distribuições, também com alguns subcasos desse método. Ainda pode-se contar com a criação da classe seno - G_1 , G_2 e sua aplicação que gera, entre outras, a distribuição seno - Gama, Beta e, de forma similar, tem-se a criação da classe beta $G - \gamma$ e a distribuição beta Exponencial - γ .

Como trabalho futuro, é possível desenvolver outras classes distribuições de probabilidades e distribuições de probabilidades com suas propriedades a partir dos subcasos já propostos, para realização de pesquisas com aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ADAMSKI, K.; HUMAN, S.W.; BEKKER, A.; ROUX, J. J. J. Noncentral generalized multivariate beta type II distribution. **REVSTAT – Statistical Journal**, v. 11, n. 1, p. 17–43. 2013.
- ADAMSKI, K., HUMAN, S.W., BEKKER, A. A generalized multivariate beta distribution: control charting when the measurements are from a n exponential distribution, **Statistical Papers**, v. 53, p. 1045–1064. 2012.
- ADEMOLA, A. J., AHAMEFULA, M. U. Multivariate Generalized Poisson Distribution for Interference on Selected Non-Communicable Diseases in Lagos State, Nigeria. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**, v. 11, n. 2, p. 524-529. 2012.
- AL-BABTAIN, A. A., ELBATAL, I., CHESNEAU, C., ELGARHY, M. Sine Topp-Leone-G family of distributions: Theory and applications. **Open Physics**, v. 18, n 1, 2020, p. 574-593. 2020.
- AL-FARIS, R. Q., KHAN, S. Sine Square Distribution: A New Statistical Model Based on the Sine Function. **Journal of Applied Probability & Statistics**, v. 3, n. 1, p. 163-173. 2008
- ALCOFORADO, E. da S. **Análise de tempo de sobrevivência via bootstrap de habitantes com câncer da região urano-fosfática do estado de Pernambuco.** Tese (Doutorado em Ciências) Universidade Federal de Pernambuco - Departamento de Energia Nuclear. Recife. 90 f. 2013.
- ALVES, E. J. **Métodos de bootstrap e aplicações em problemas biológicos.** Dissertação (Mestrado em Matemática Universitária) Universidade Estadual Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro. 131 f. 2016.
- ALZAATREH, A., LEE, C., FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **METRON** , v. 71 , p. 63–79. 2013.
- AHMAD, Z., HAMEDANI, G., BUTT, N. S. Recent developments in distribution theory: A brief survey and some new generalized classes of distributions. **Pakistan Journal of Statistics and Operation Research**, v. 15, n. 1, p. 87–110. 2019.
- AKAIKE, H. Use of an information theoretic quantity for statistical model identification. IN: Hawaii International Conference on System Sciences, 5th, 1972, Hawaii. **Proceedings...**, Hawaii, Western Periodicals Co., p. 249-250.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- AKINSETE, A., FAMOYE, F., LEE, C. The beta-Pareto distribution. **Statistics**, v. 42, n. 6, p. 547-563. 2008.

ANDERSON, E. The species problem in *Iris*. **Annals of the Missouri Botanical Garden**, v. 23, n. 3, p. 457–509, 1936.

ANDERSON, T.W. & DARLING, D. A. Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 23, p. 193–212. 1952.

ARSLAN, O. Family of multivariate generalized t distributions. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 89, p. 329–337. 2004.

BARROS, K. N. N. O. **Abordagem clássica e Bayesiana em modelos simétricos transformados aplicados à estimativa de crescimento em altura de *Eucalyptus urophylla* no Polo Gesseiro do Araripe-PE**. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 84f. 2010.

BARROS, K. N. N. de O. **Classe de distribuições Marshall-Olkin generalizada exponenciada**. Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 15f. 2014.

BARROS, P. S. N. **Classe de distribuições Weibull Generalizada: Teoria e aplicações**. Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 186f. 2015.

BOX, G. E. P. MILLER, M. E. A note on the generation of Random Normal Deviates. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 29, n. 2, p. 610-611, 1958.

BROYDEN, C. G. The convergence of a class of Double-rank minimization algorithms 1. General considerations. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 6, n. 1, p. 76-90, 1970.

BRITO, C. C. R. **Correção de Bartlett nos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos**. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 160f. 2009.

BRITO, C. C. R. **Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas**. Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, 241f, 2014.

BRITO, C. C. R. de; GOMES-SILVA, F. S; REGO, L. C., OLIVEIRA, W. R. A new class of gamma distribution. **Acta Scientiarum**, v. 39, n. 1, p. 79-87. 2017.

BRITO, C. C. R. de, OLIVEIRA, W. R. de, REGO, L. C., GOMES-SILVA, F. S. Method for generating distributions and classes of probability distributions: the univariate case. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, v. 48, n. 3, p. 897–930. 2019.

BURNHAM, K. P., ANDERSON, D. R. **Model selection and multi-model inference: a practical information-theoretic approach**. 2 ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

CABRAL NETO, J. G. **Distribuições estatísticas e correlações temporais de alguns parâmetros hidrológicos de uma bacia hidrográfica semiárida de Pernambuco**. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, 67f, 2013.

CARDEÑO, L., NAGAR, D. K., SÁNCHEZ, L. E. Beta Type 3 Distribution and Its Multivariate Generalization. **Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences**, v.21, n. 2, p. 225-241. 2005.

CHEN, G., BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, v. 27, p. 154-161, 1995.

CHESNEAU, C., ARTAULT, A. On a comparative study on some trigonometric classes of distributions by the analysis of practical data sets. **Journal of nonlinear modeling and analysis**, v. 3, n. 2, p. 226–227. 2021.

CHESNEAU, C., BAKOUCH, H. S., HUSSAIN, T. A new class of probability distributions via cosine and sine functions with applications. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 48, n. 1. p. 1-14. 2018.

CHOULAKIAN, V., STEPHENS, M.A. Goodness-of-fit for the generalized Pareto distribution, **Technometrics**, v. 43, n. 4, p. 478–484. 2001.

COLES, S. **An introduction to statistical modeling of extreme values**. 1 ed. London: Springer-Verlag, 2001.

COLOSIMO, E. A., GIOLO, S. R. **Análise de sobrevivência aplicada**. 1ª ed. São Paulo: Blüxher, 2006.

CONSUL, P. C., FAMOYE, F. **Lagrangian Probability Distributions**. Birkhäuser Boston: Boston, 2006.

CORDEIRO, G. M. Introdução à teoria Assintótica. IN: **Colóquio brasileiro de matemática**, 22º, 1999, Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

CORDEIRO, C. M. H. **Métodos de reamostragem em modelos de previsão**. Tese (Doutorado em em Matemática e Estatística), Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 203f, 2011.

CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 81, n. 7, p. 883–898, 2011. Disponível em <<http://www.researchgate.net/publication/232946591>>. Acesso em 02/03/2023.

CORDEIRO, G.M. ALIZADEH, M. SILVA, R.B. A New Wider Family of Continuous Models: The Extended Cordeiro and de Castro Family. **Hacettepe Journal of Mathematics and Sttistics**. v. 47 n. 151, 2017.

CORDEIRO, G. M., LEMONTE, A. J. The McDonald inverted beta distribution. **Journal of the Franklin Institute**, v. 349, p. 1174-1197, 2012.

CORDEIRO, N. M. **Classe normal de distribuições generalizadas: propriedades e aplicações**. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, 241f. 2021.

CORDEIRO, N. M., GOMES-SILVA, F., BRITO, C. C. R. de, JALE, J. da S., VASCONCELOS, J. M. de. Normal-tangent-logarithm- (G_1, G_2) : a class of probabilistic distributions depending on two baselines. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 45, n.1. 2023.

CYSNEIROS, F. J. A., PAULA, G. A., GALEA, M. **Modelos Simétricos Aplicados**. 9ª Escola de Modelos de Regressão. Águas de São Pedro: SP. 100p. 2005.

DALPOSSO, G. H. **Método bootstrap na agricultura de precisão**. Tese (Engenharia Agrícola) – Universidade estadual do oeste do Paraná, Cascavel. 90f. 2017.

DARLING, D. A. The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises Tests. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 28, n. 4, p. 823–838. 1957.

EMILIANO, P. C. **Critérios de informação: como eles se comportam em diferentes modelos**. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária). Universidade Federal de Lavras. Lavras 193f. 2013.

EUGENE, N., LEE, C. FAMOYE, F. Beta-normal Distribution and its applications. **Communication in Statistics – Theory and Methods**, v. 31, n. 4, p. 497-512. 2002.

FISHER, N. I. **Statistical Analysis of Directional Data**. Cambridge University Press: Cambridge. 1993.

FLETCHER, R. A new approach to variable metric algorithms. **The computer journal**, v. 13, n. 3, p 317-322, 1970.

FORBES, C., EVANS, M. HASTINGS, N. PEACOCK, B. **Statistical Distributions**. 4ª ed. Hoboen (New Jersey): Wiley, 2010.

FORBES, C., EVANS, M., HASTINGS, N., PEACOCK, B. **Statistical Distributions**. 4ª ed. New York, Wiley. 2011.

FREIRE, S. M. **Bioestatística Básica**. (livro eletrônico). Rio de Janeiro. Editora do Autor, 2021.

FUNG, T., SENETA, E. Extending the multivariate generalised t and generalised VG distributions. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 101, n. 1, pp. 154-164. 2010.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. Addison-Wesley Publishing Company Incorporation. 1989.

GOLDFARB, D. A. A family of variable-metric methods derived by variational means. **Mathematics of Computation**, v. 24, n. 109, p. 23-26, 1970.

GONÇALVES, L., MACRINI, L. Rényi entropy and Cauchy-Schwartz mutual information applied to MIFS-U variable selection algorithm: A comparative study. **Pesquisa Operacional**, v. 31, n. 3, p. 499-519. 2011.

GUPTA, R. D., KUNDU, D. Generalized exponential distributions. **Australian and New Zealand Journal of Statistics**, v. 41, n. 2, p. 173 – 188. 1999.

HANNAN, E. J., QUINN, B. G. The determination of the order of an autoregression. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 41, n. 2, p. 190–195. 1979.

HIPEL, K. W., MCLEOD, A. I. **Time series modelling of water resources and environmental systems**. 1 ed. Elsevier Science. 1994.

HOLANDA, R. F. L.; BARROS, K. N. N. O. Searching for cosmological signatures of the Einstein equivalence principle breaking. **Physical Review D**, v. 94, n. 2, p. 023524, 2016.

JAMAL, F., CHESNEAU, C., BOUALI, D.L., UI HASSAN, M. Beyond the Sin-G family: The transformed Sin-G family. **PLoS One**, v. 16, n. 5. 2021.

JAYAKUMAR, K., MATHEW, T. On a generalization to Marshall-Olkin scheme and its application to Burr type XII distribution. **Statistical Papers**, v. 49, p. 421–439. 2008.

JAYAKUMAR, D. G.S. S., SOLAIRAJU, A., SULTHAN. A. A New Generalisation of Sam-Solai's Multivariate Additive Beta Distribution of Kind-2 of Type-A. **Research Journal of Management Sciences**, v. 1, n. 2, p. 15-23. 2012.

KENT, J. T., TYLER, D. E. Maximum likelihood estimation for the wrapped Cauchy distribution. **Journal of Applied Statist**, v. 15, p. 247-254. 1988.

KOTSIANTIS, S. B., PINTELAS, P. E. Logitboost of Simple Bayesian Classifier. **Informática**, v. 29, p. 53-59. 2005

KUNDU, D., BALAKRISHNAN, N., JAMALIZADEH, A. **Generalized multivariate Birnbaum-Saunders distributions and related inferential issues**, **Journal of Multivariate Analysis**, v. 116, p. 230-244. 2013.

LIMA FILHO, L. M. de A. **Modelos simétricos transformados não-lineares com diferentes distribuições dos erros: aplicações em ciências florestais**. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 90f, 2009.

LIMA, F. P. **Inferência Bootstrap em modelos de regressão beta**. Tese (Doutorado em Estatística) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e a Natureza, Estatística. Recife, 136f. 2017

LIN, J., LI, X. Multivariate Generalized Marshall–Olkin Distributions and Copulas. **Methodology and Computing in Applied Probability**, v. 16, p. 53-78. 2014

MAES, M. L. **Ajuste de distribuição de probabilidades de variáveis de custo fixo e variável na produção de suínos no estado de Santa Catarina**. TCC (Bacharel em Estatística). Universidade Federal da Uberlândia. Uberlândia. 49f. 2015.

MAHMOOD, Z., CHESNEAU, C., TAHIR, M. H. A new sine-G family of distributions: properties and applications. **Bull Comput Appl Math**, v. 7, n. 1, p. 53–81. 2019.

MARSHALL, A. W., OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. **Biometrika**, v. 84, n. 3, p. 641–652. 1997.

MACHADO, E. C. **A distribuição Kumaraswamy normal: propriedades, modelos de regressão linear e diagnóstico**. Tese (Doutorado em Ciências), Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, São Paulo, 64p, 2019.

McDONALD, J. B. Some generalized functions for the size distribution of income. **Econometrica**, v. 52, n. 3, p. 647–665. 1984.

MELO FILHO, J. F., LIBARDI, P. L., De JONG Van LIER, Q., CORRENTE, J. E. Método convencional e "Bootstrap" para estimar o número de observações na determinação dos parâmetros da função K ('teta'). **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, v. 26, n. 4, p. 895-903. 2002.

MOORE, D. S., MCCABE, G. P., DUCKWORTH, W. M., SLOVE, S. L. **A prática da estatística empresarial: como usar dados para tomar decisões**. LTC, 2006.

MUDHOLKAR, G. S., SRIVASTAVA, D. K., FREIMER, M. The Exponentiated Weibull Family: A Reanalysis of the Bus-Motor-Failure Data. **Technometrics**, v. 37, p. 436-445. 1995.

MUIRHEAD, R. J. **Aspects of multivariate statistical Theory**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 2005.

MUHAMMAD, M., BANTAN, R.A.R., LIU, L., CHESNEAU, C., TAHIR, M.H., JAMAL, F., ELGARHY, M. A New Extended Cosine-G Distributions for Lifetime Studies. **Mathematics**, v. 9, n. 21. 2021.

NAGHETTINI, M., PINTO, E. J. de A. **Hidrologia estatística**. 4. ed. Belo Horizonte: CPRM, 2007.

NADARAJAH, S. The exponentiated exponential distribution: a survey. **ASTA - Advances in Statistical Analysis**, 2011.

NADARAJAH, S., KOTZ, S. The beta exponential distribution. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 91, n. 6, p. 689-697. 2006a.

NADARAJAH, S., KOTZ, S. Beta Trigonometric Distribution. **Portuguese Economic Journal**, v. 5, n. 3, p. 207-224. 2006b.

PAIXÃO, A. C. P. **New Extended Lifetime Distributions**. 2014. 116 p. Tese (Doutorado em Matemática Computacional) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

PAULINO, C. D., TURKMAN, A. A., MURTEIRA, B. J. **Estatística bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

PESCIM, R.R., CORDEIRO, G. M., DEMÉTRIO, C. G. B., ORTEGA, E. M. M., NADARAJAH, S. The new class of Kummer beta generalized distribution. **SORT**, v. 36, n. 2, p. 153-180. 2012.

POPOVIĆ, B. V., CORDEIRO, G. M. & PASCOA, M. A. R. A new extended mixture normal distribution, **Mathematical Communications**, v.. 22, n. 1, p. 53–73, 2017.

RAMOS, M. W. A. **Some new extended distributions: theory and applications**. 2014. 88 f. Tese (Doutorado em Matemática Computacional). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

RICHADSON, R. J. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. 4. Ed. revista, atualizada e ampliada. São Paulo: Atlas, 2017.

RISTIC, M. M., BALAKRISHNAN, N. The gamma-exponentiated exponential γ distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 82, n. 8, p. 1191–1206, 2012.

RIZZO, A. L. T., CYMROT, R. Utilização da técnica de reamostragem bootstrap em aplicação na engenharia de produção. **In: X Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e VI Encontro Latino Americano de Pós-Graduação**, 2006, São José dos Campos. Anais de trabalhos completos. São José dos Campos: Universidade do Vale do Paraíba, 2006.

ROOTZÉN, H. TAJVIDI, N. Multivariate generalized Pareto distributions. **Bernoulli**, v. 12, n. 5, p. 917-930. 2006.

RUBIN, D. B. Comment: a noniterative sampling/importance resampling alternative to the data augmentation algorithm for creating a few imputations when fractions of missing information are modest: the SIR algorithm. **Journal of the American Statistical Association**, v. 82, n. 398, p. 543–546. 1987.

SANTOS, R. S. **Estudo sobre algumas famílias de distribuições de probabilidades generalizadas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 102f. 2012.

SARABIA, J. M., GÓMEZ-DÉNIZ, E. Construction of multivariate distributions: A review of some recent results, **SORT**, v. 32, n. 1, p. 3-36. 2008.

SCHMIDT, R., HRYCEJ, T., STÜTZLE, E. Multivariate distribution models with generalized hyperbolic margins. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 50, n. 8, p. 2065–2096. 2006.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, v. 6, n.2, p. 461-464r. 1978.

SHANNO, D. F. Conditioning of quase-newton methods for function minimization. **Mathematics of computation**, v. 24, n. 111, p. 647-656, 1970.

SILVA, R. B. **Essays on distribution theory and a modified moment estimator for the precision parameter in a class of regression models**. 2013. 101 f. Tese (Doutorado em Estatística). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SILVA, R. B., BOURGUIGNON, M., DIAS, C. R. B., CORDEIRO, G. M. The compound class of extended Weibull power series distributions. **Computational Statistical and Data Analysis**, v. 58, p. 352-367. 2013.

SILVA, R. V. **Some new lifetime models: properties and applications**. 2014. 106 f. Tese (Doutorado em Matemática Computacional). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SILVA, G. O., ORTEGA, E. M. M., CORDEIRO, G. M. The beta modified Weibull distribution. **Lifetime data analysis**, v. 16, p. 409-430, 2010.

SILVEIRA, F. V. J., GOMES-SILVA, F., BRITO, C. C. R., CUNHA-FILHO, M., GUSMÃO, F. R. S., XAVIER-JÚNIOR, S. F. A. Normal-G class of probability distributions: Properties and applications. **Symmetry**, v. 11, n. 11, p. 1407. 2019.

SILVEIRA, F. V. J., GOMES-SILVA, F., BRITO, C. C. R., JALE, J. S., GUSMÃO, F. R. S., XAVIER-JÚNIOR, S. F. A, ROCHA, J.S. Modelling wind speed with a univariate probability distribution depending on two baseline functions. **Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics**, v. 52 n. 3, p. 808-827, 2023.

SMITH, A. F., GELFAND, A. E. Bayesian statistics without tears: a sampling – resampling perspective. **The American Statistician**, v. 46, n. 2, p. 84-88, 1992.

SOUZA, L. **New trigonometric classes of probabilistic distributions**. Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, 214f, 2015.

SOUZA, G. T. **Nova generalização para a classe Beta-G de distribuições de probabilidade**. Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, 69f, 2016.

SOUZA, G. T. de, OLIVEIRA JÚNIOR, W. R. de, BRITO, C. C. R. de, GOMES-SILVA, F., SILVA, R. V. da. Nova generalização para a classe Beta-G de distribuições de probabilidade. **Braslian Journal of Biometrics**, v.35, n.4, p.785-809, 2017.

SOUZA, L., OLIVEIRA JÚNIOR, W. R. de, BRITO, C. C. R. de, CHESNEAU, C., FERNANDES, R. L., FERREIRA, T. A. E. Tan-G class of trigonometric distributions and its applications. **Cubo**, v. 23, n. 1, pp. 1-20. 2021.

SUGIURA, N. Further Analysis of the Data by Akaike's Information Criterion and the Finite Corrections. **Communications in Statistics - Theory and Methods A**, v. 7, p. 13-26. 1978.

TAHIR, M. H.; NADARAJAH, S. Parameter induction in continuous univariate distributions: Well-established G-classes. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v. 87, n. 2, p. 539-568. 2015.

TOMY, L., SATISH, G. A review study on trigonometric transformations of statistical distributions. **Biometrics & Biostatistics International Journal**, v. 10, n. 4, p. 130-136. 2021.

TORABI, H., HEDESH, N. M. The gamma-uniform distribution and its applications. **Kybernetika**, v. 48, n. 1, p. 16–30, 2012.

TUNG, A. K. H., XU, X. & OOI, C. B. CURLER: Finding and visualizing nonlinear correlated clusters. *In: Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*, 2005.

VALENTIN, J. L., GUIMARÃES, M. A. A modelagem ecológica em Limnologia. In: BICUDO, C.E.M.; BICUDO, D.C. (Org.). **Amostragem em Limnologia**. São Carlos: Rima, 2004. 251 p.

VARGAS, P. A. **Sistemas Classificadores para redução de perdas em redes de distribuição de energia elétrica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, 98f ,2000.

VODA, V. G. A method constructing density functions: the case of a generalized Rayleigh variable. **Applications of Mathematics**, v. 54, n. 5, p. 417-431. 2009.

WENJING, H., AFIFY, Z., GOUAL, H. The arcsine exponentiated-X family: validation and insurance application. **Complexity**, v. 2020, pp. 1–18. 2020.

ZHONG P., FUKUSHIMA M. A Regularized Nonsmooth Newton Method for Multi-class Support Vector Machines. **Optimization Methods and Software**, v. 22, n. 1, p. 225 – 236. 2007.

ZOGRAFOS, K. On some beta generated distributions and their maximum entropy characterization: The beta-Weibull distribution. *In: N.S. Barnett, S.S. Dragomir (Eds.), Advances in Inequalities from Probability Theory & Statistics*, Nova Science Publishers, New Jersey, p. 237-260. 2008.

ZOGRAFOS, K., BALAKRISHNAN, N. On the families of beta - and generalized gamma - generated distribution and associated inference, **Statistical Methodology**. v. 6, n. 4, p. 344-362. 2009.

APÊNDICE

Apêndice A: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1 , G_2

As figuras foram obtidas por $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

As figuras referentes a este apêndice estão no corpo da tese.

Apêndice B: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

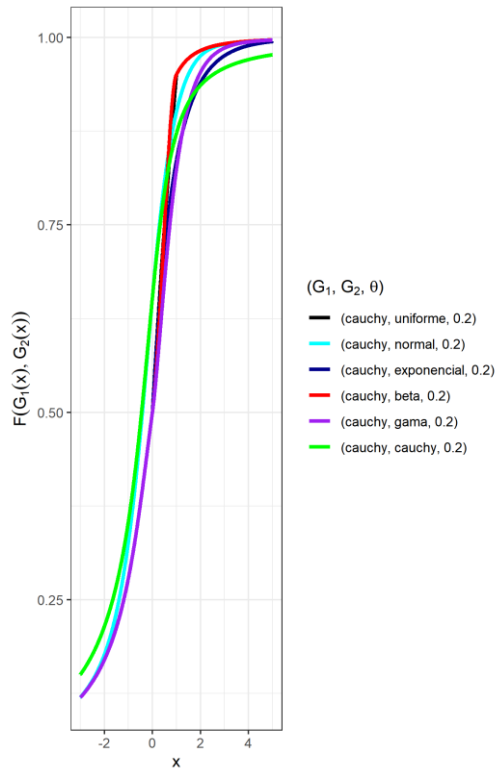


Figura B1 – fda para $\theta = 0.2$

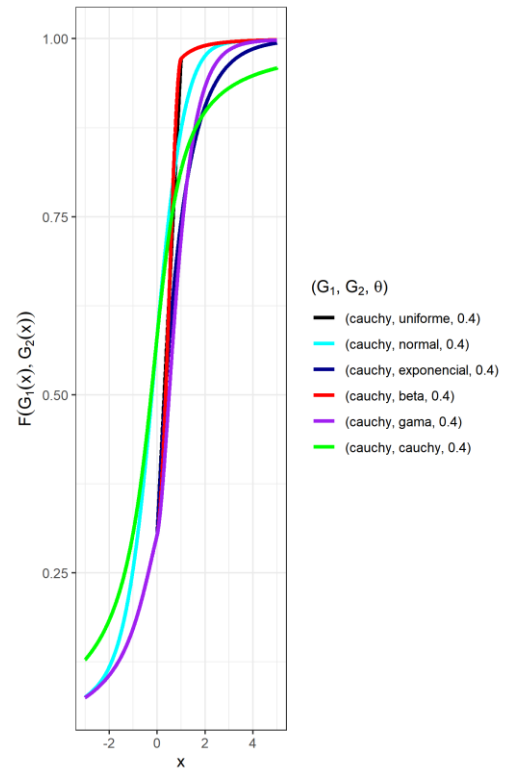
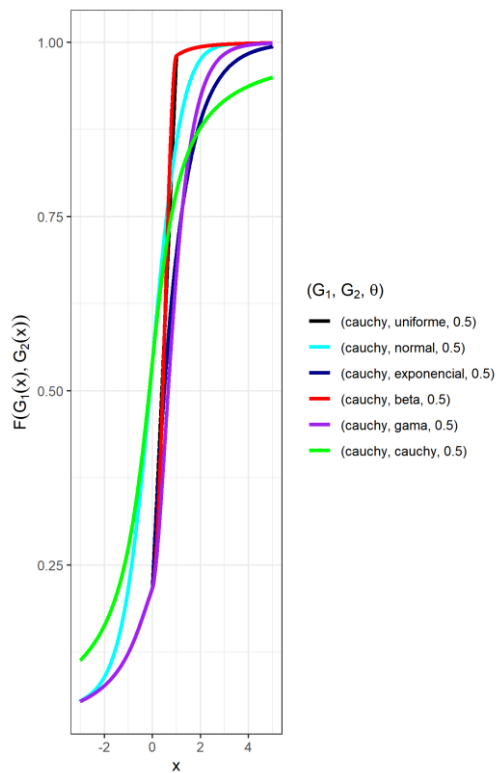
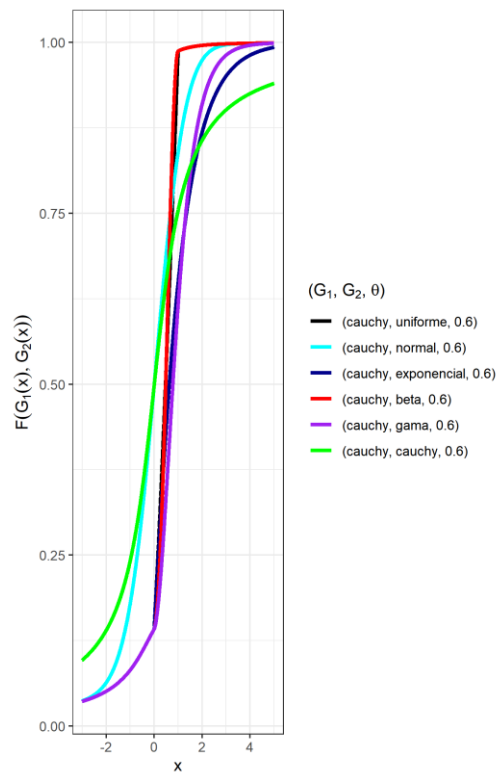
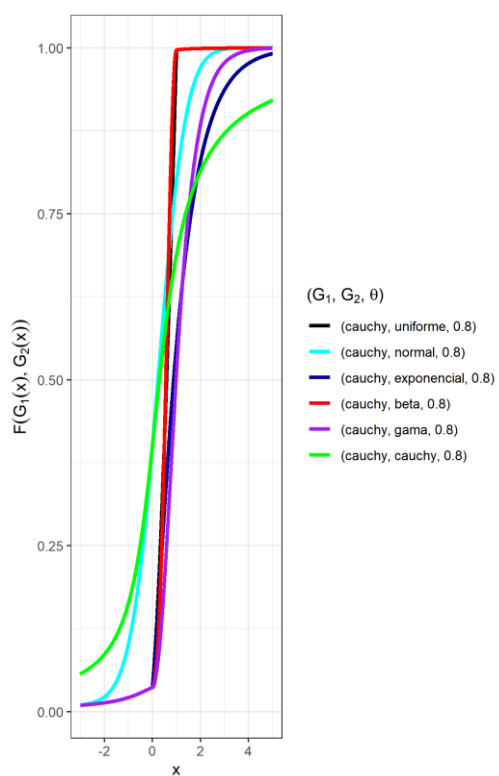


Figura B2 – fda para $\theta = 0.4$

Figura B3 – fda para $\theta = 0.5$ Figura B4 – fda para $\theta = 0.6$ Figura B5 – fda para $\theta = 0.8$

Apêndice C: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

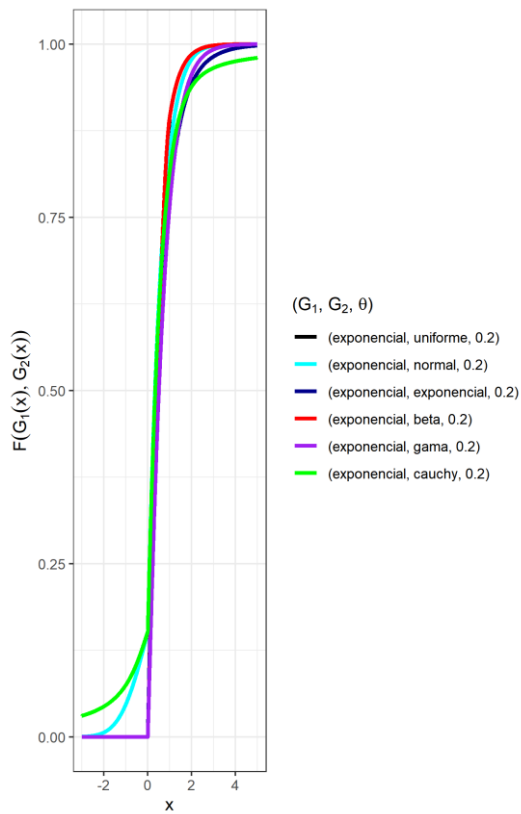


Figura C1 – fda para $\theta = 0.2$

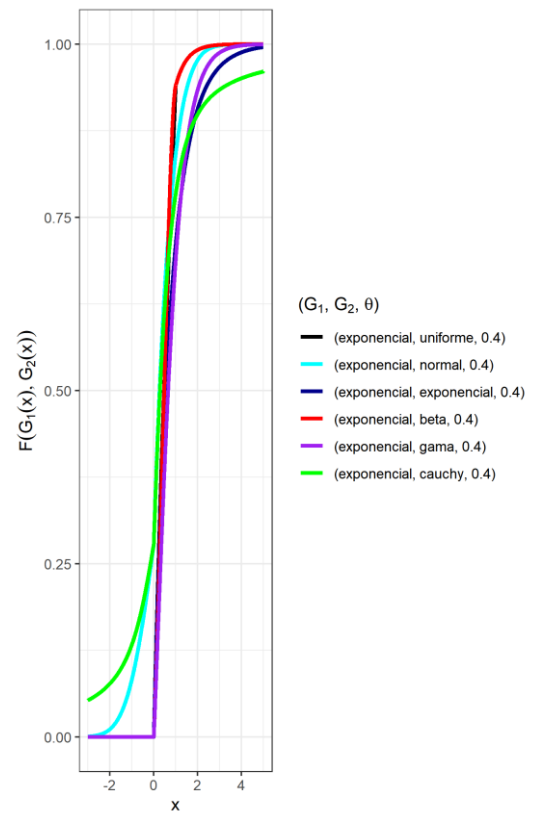
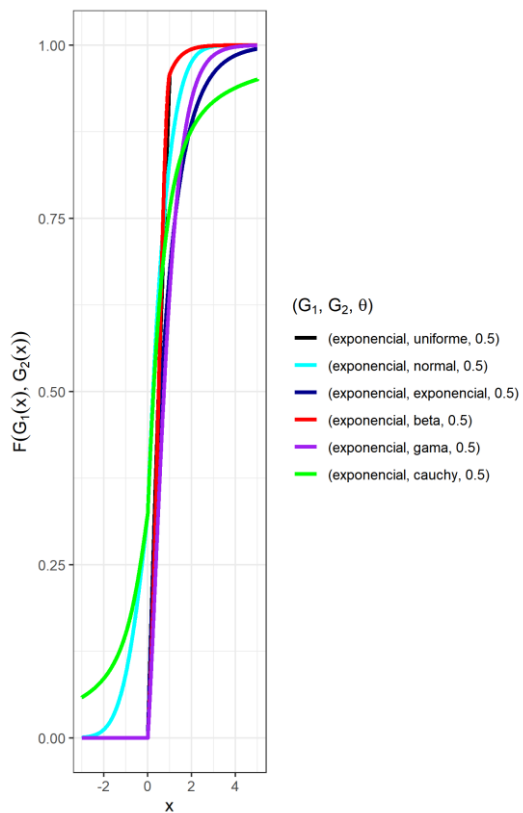
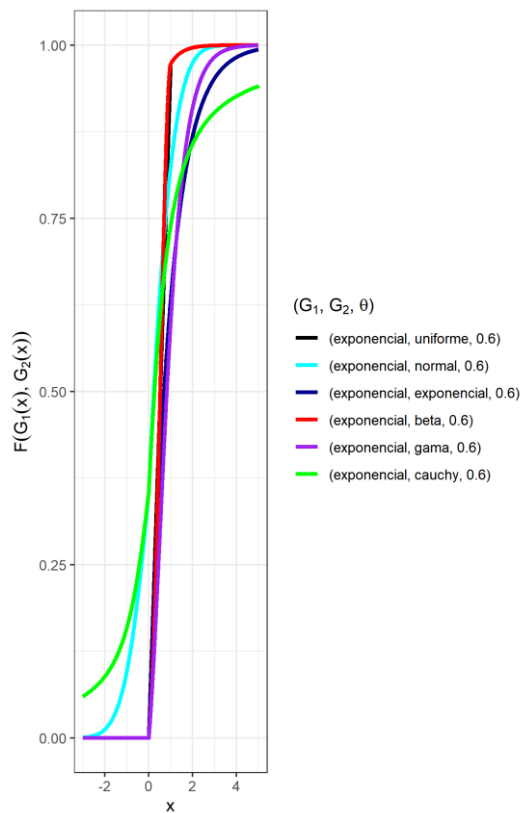
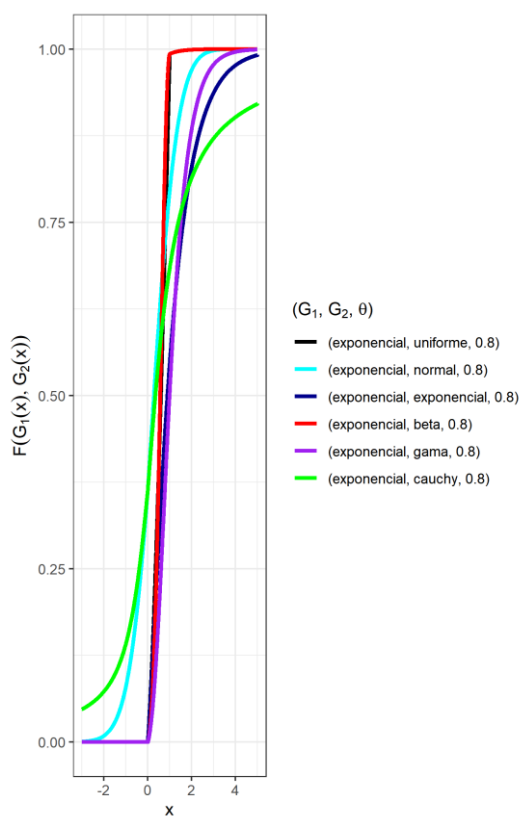


Figura C2 – fda para $\theta = 0.4$

Figura C3 – fda para $\theta = 0.5$ Figura C4 – fda para $\theta = 0.6$ Figura C5 – fda para $\theta = 0.8$

Apêndice D: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras foram obtidas por $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

As figuras referentes a este apêndice estão no corpo da tese.

Apêndice E: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

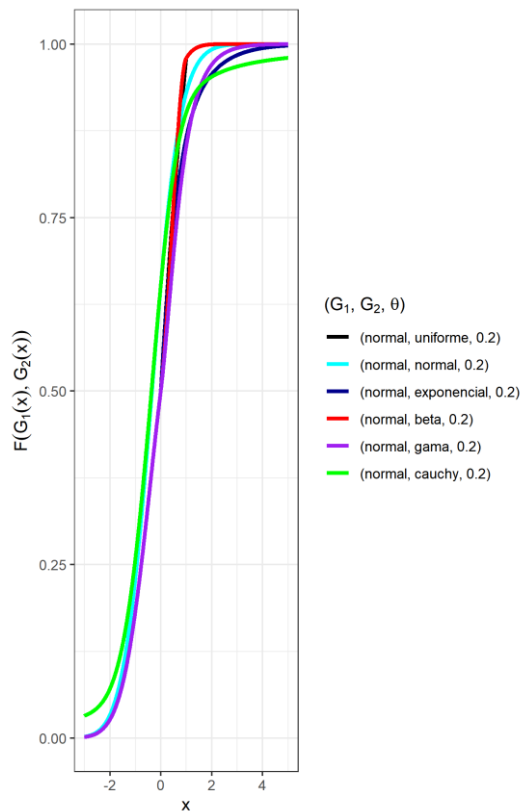


Figura E1 – fda para $\theta = 0.2$

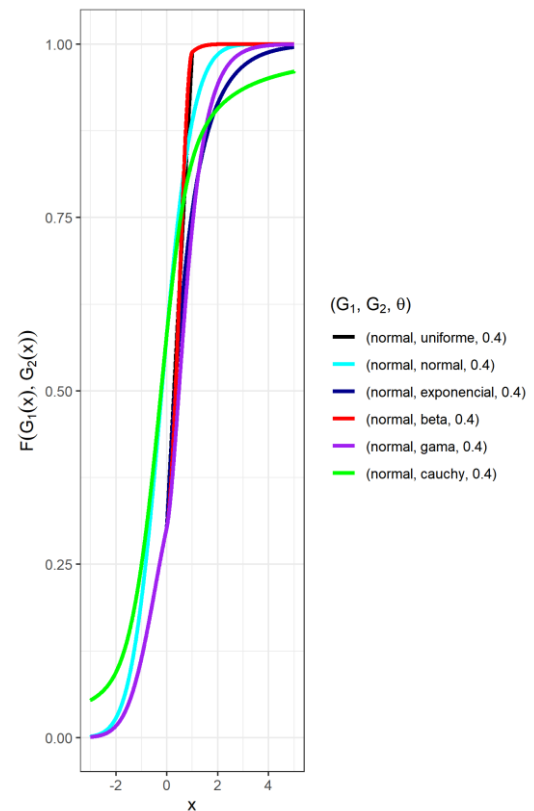
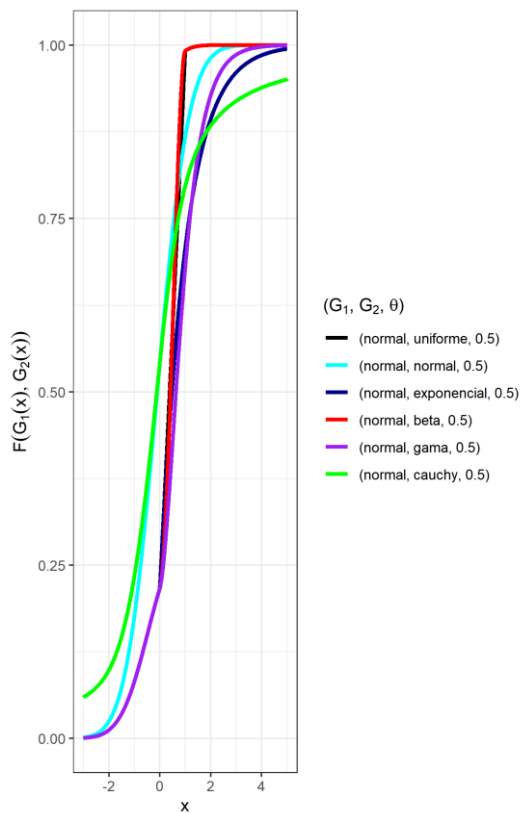
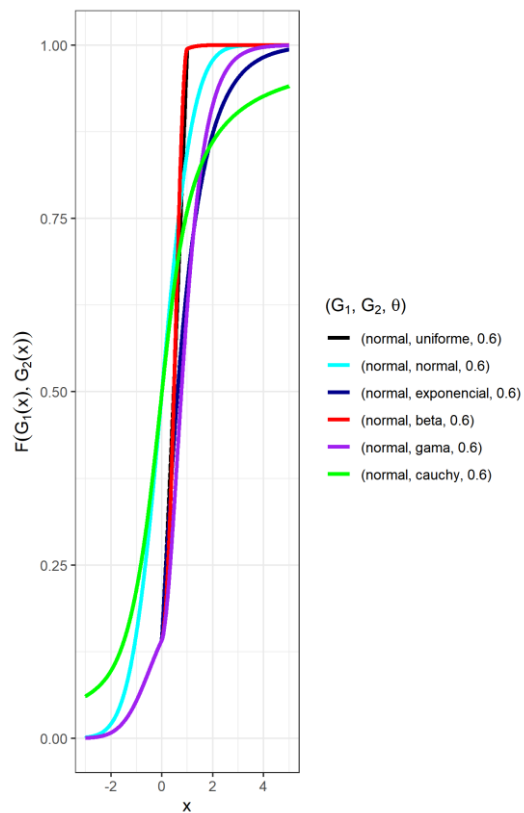
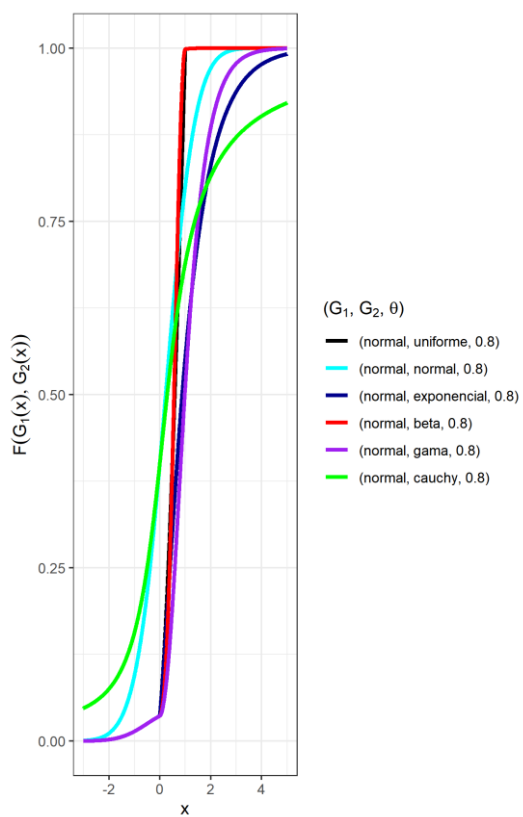


Figura E2 – fda para $\theta = 0.4$

Figura E3 – fda para $\theta = 0.5$ Figura E4 – fda para $\theta = 0.6$ Figura E5 – fda para $\theta = 0.8$

Apêndice F: Gráficos das fda's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $F_{G_1, G_2}(x) = \text{Sen} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] - \text{Sen} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

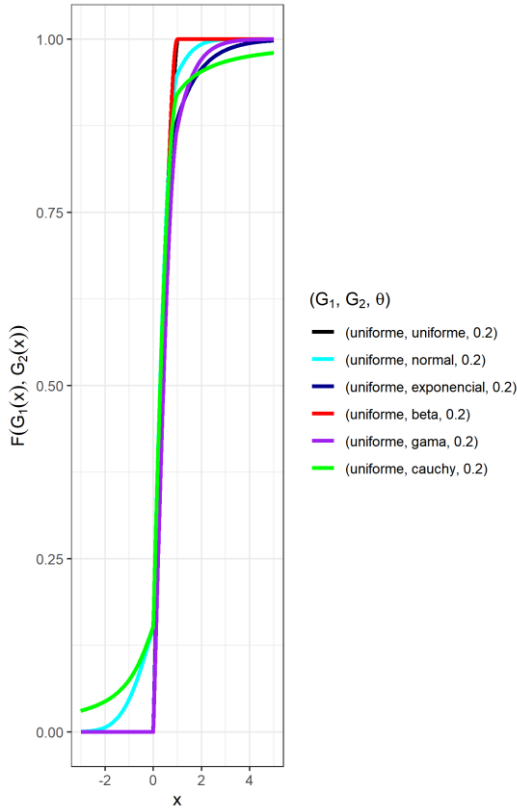


Figura F1 – fda para $\theta = 0.2$

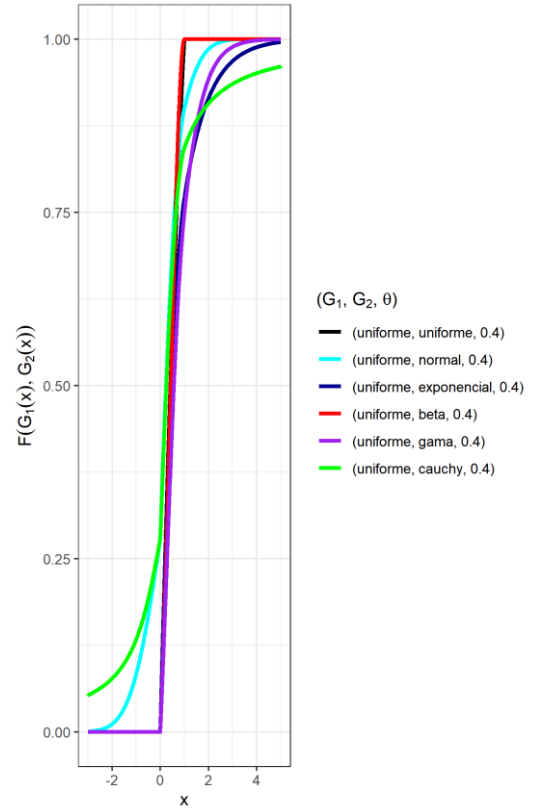
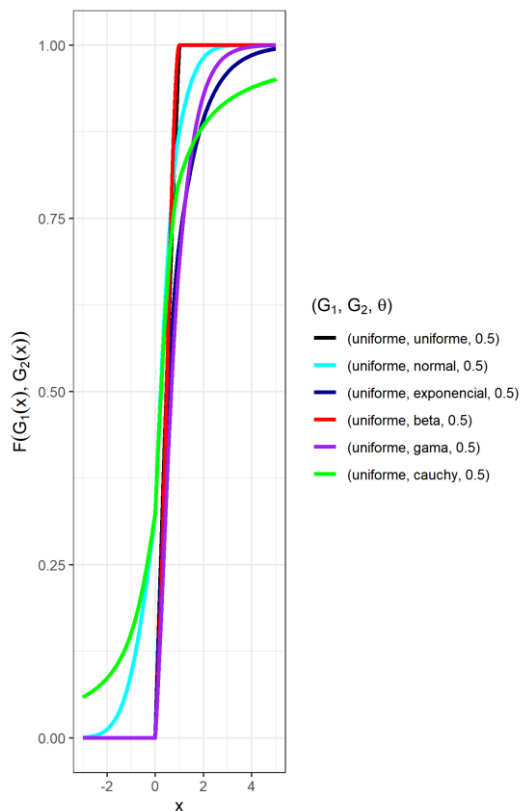
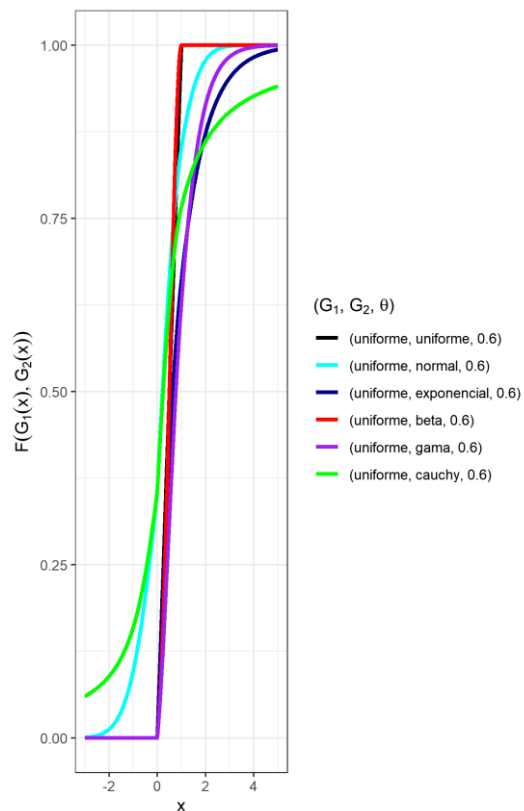
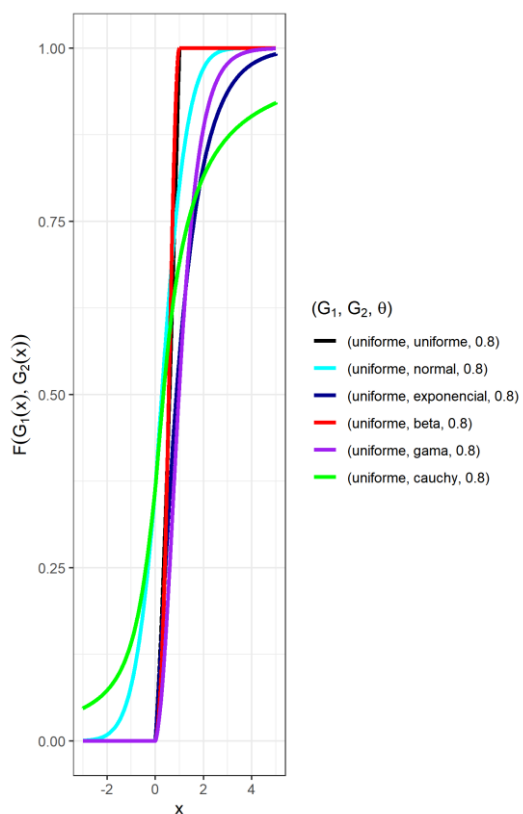


Figura F2 – fda para $\theta = 0.4$

Figura F3 – fda para $\theta = 0.5$ Figura F4 – fda para $\theta = 0.6$ Figura F5 – fda para $\theta = 0.8$

Apêndice G: Gráficos das fdp's para a classe seno – G₁, G₂

As figuras foram obtidas por $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{COS} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{COS} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

As figuras deste apêndice estão contidas no texto da tese

Apêndice H: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

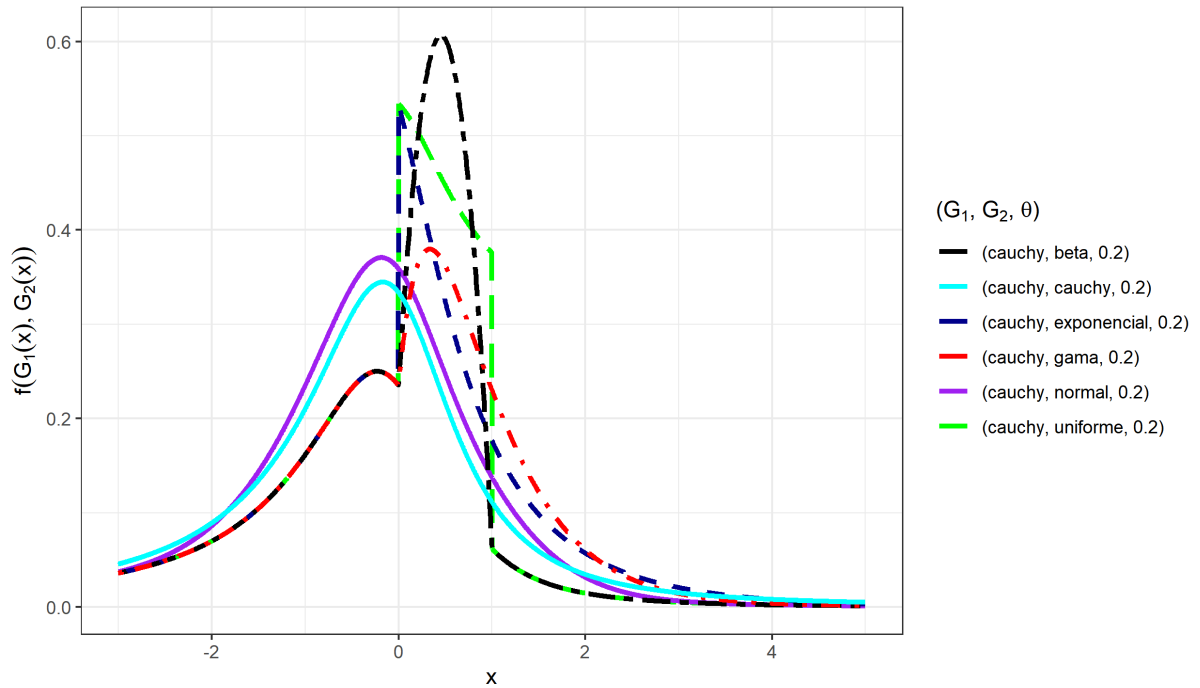


Figura H1 – fdp para $\theta = 0.2$

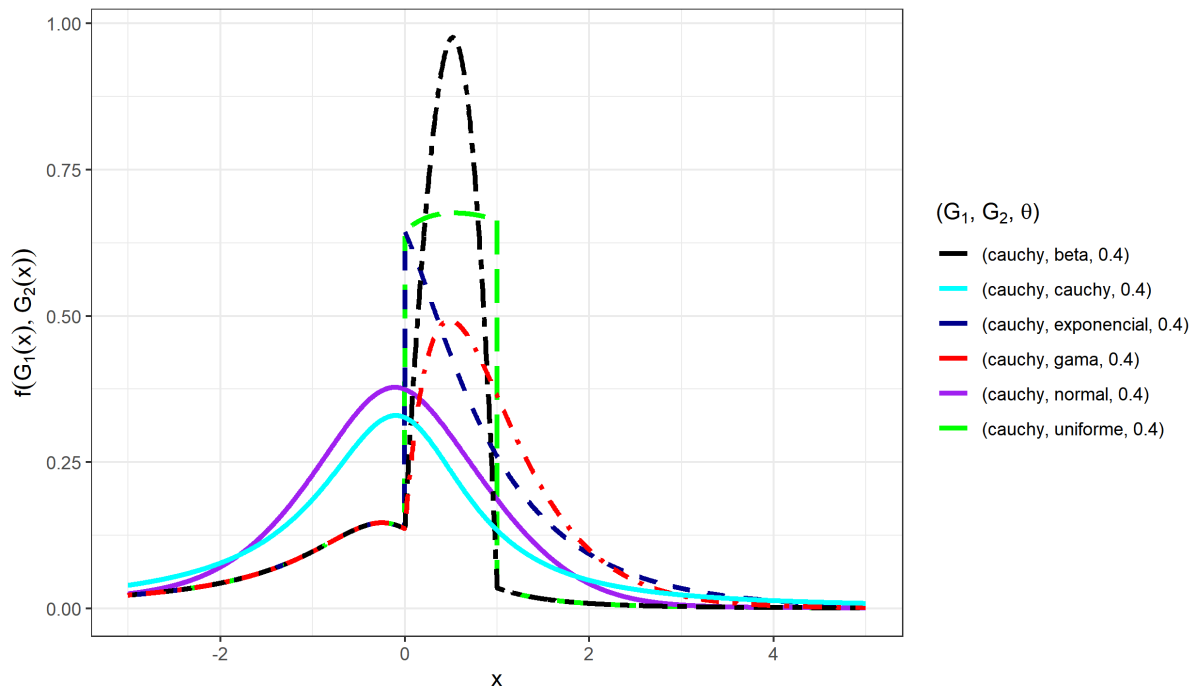
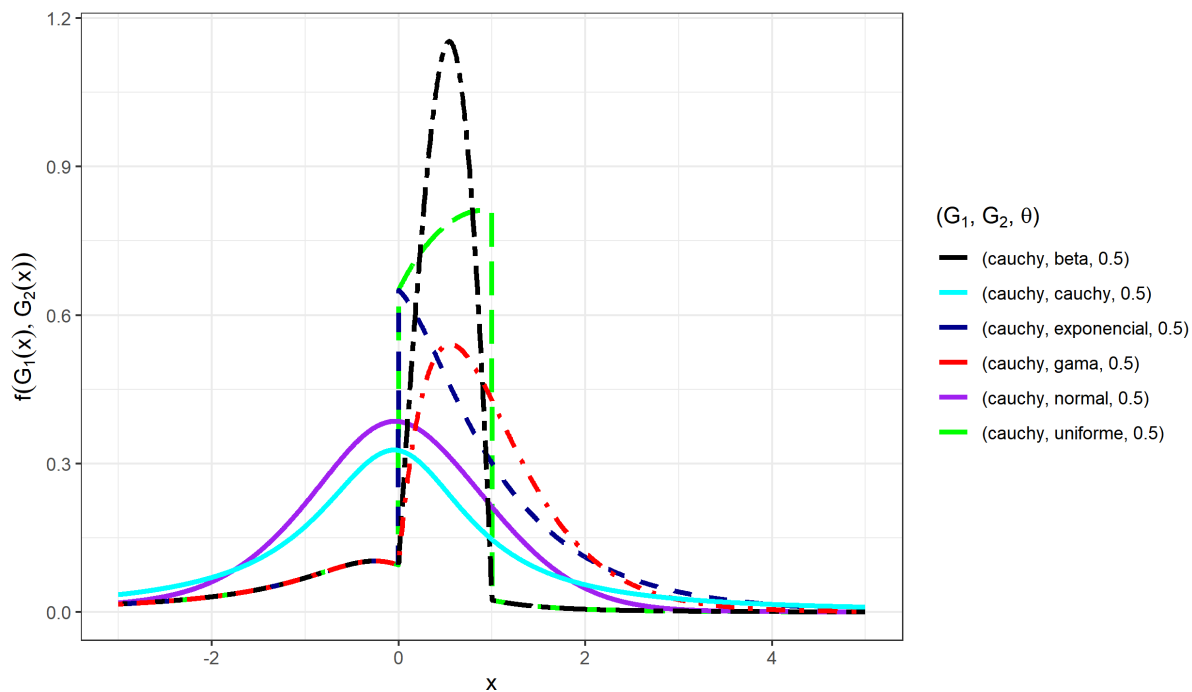
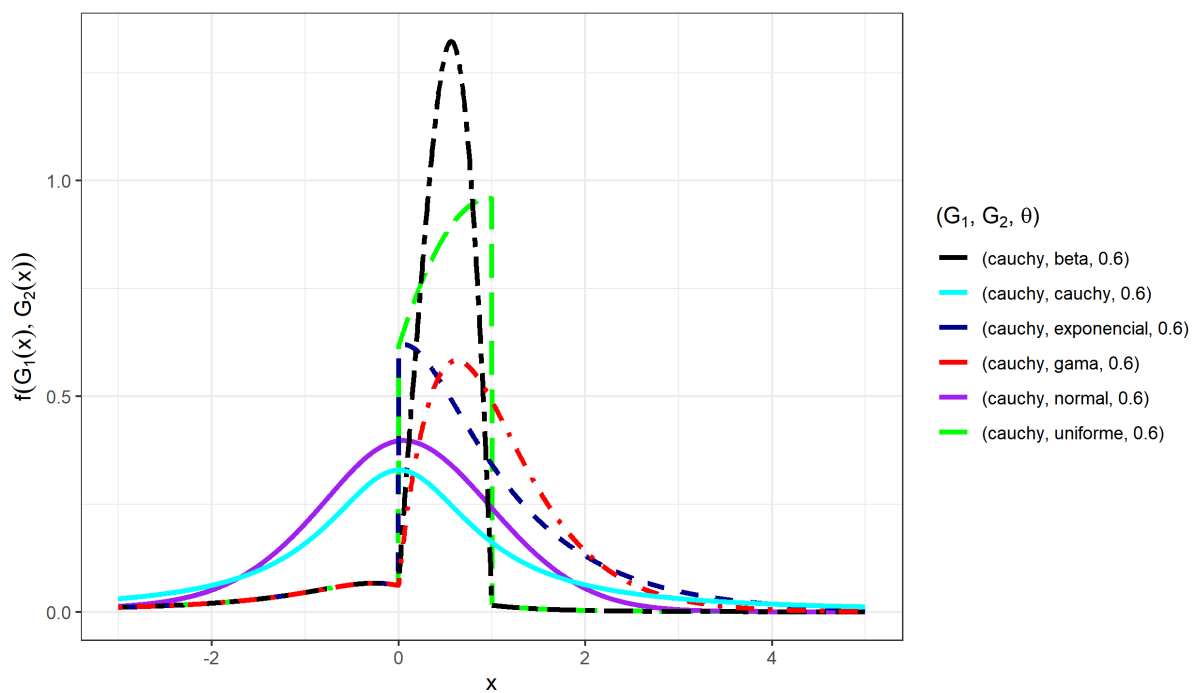
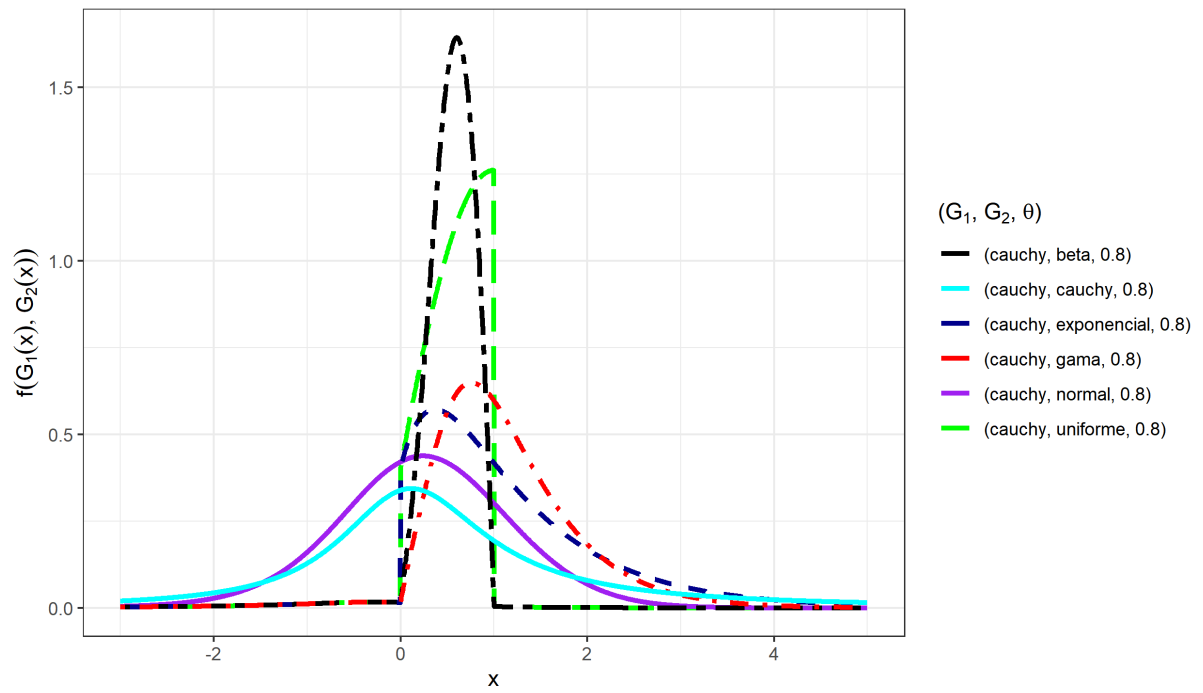


Figura H2 – fdp para $\theta = 0.4$

Figura H3 – fdp para $\theta = 0.5$ Figura H4 – fdp para $\theta = 0.6$

Figura H5 – fdp para $\theta = 0.8$

Apêndice I: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

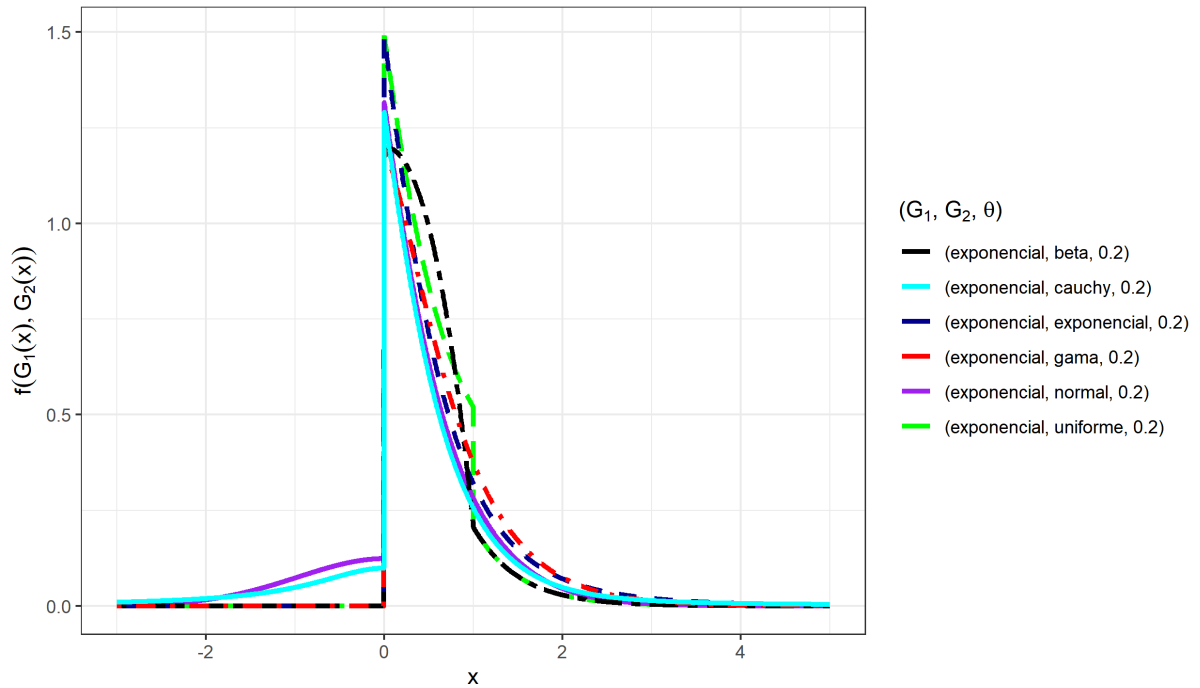


Figura I1 – fdp para $\theta = 0.2$

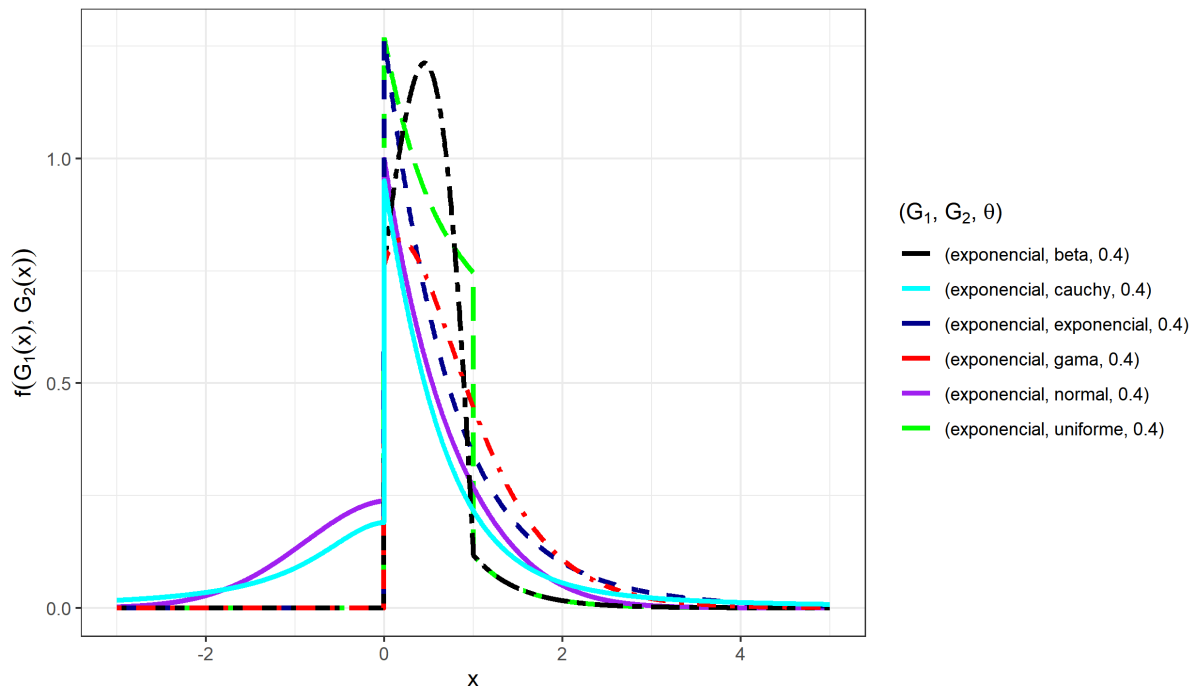
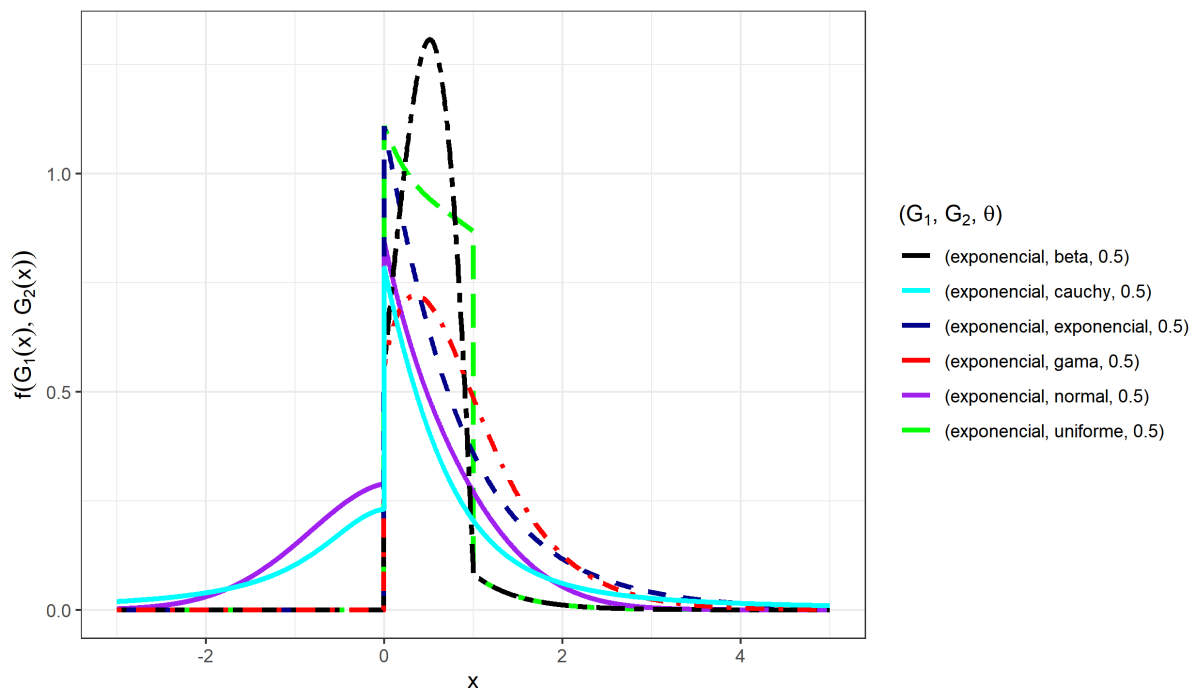
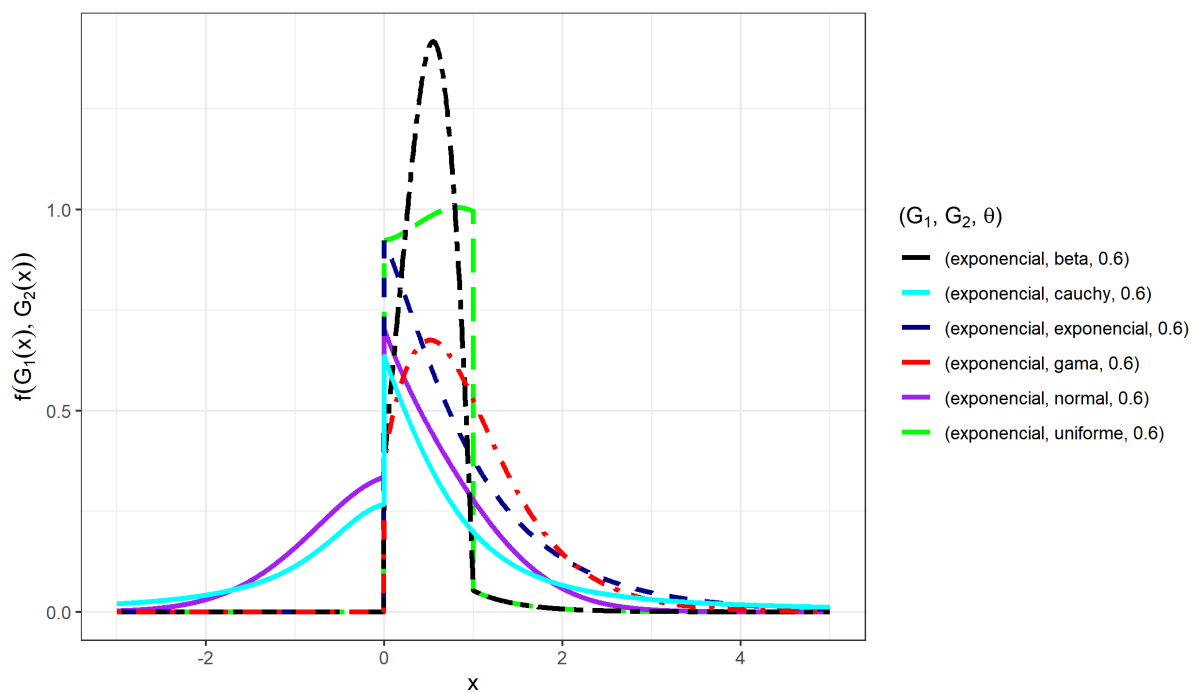
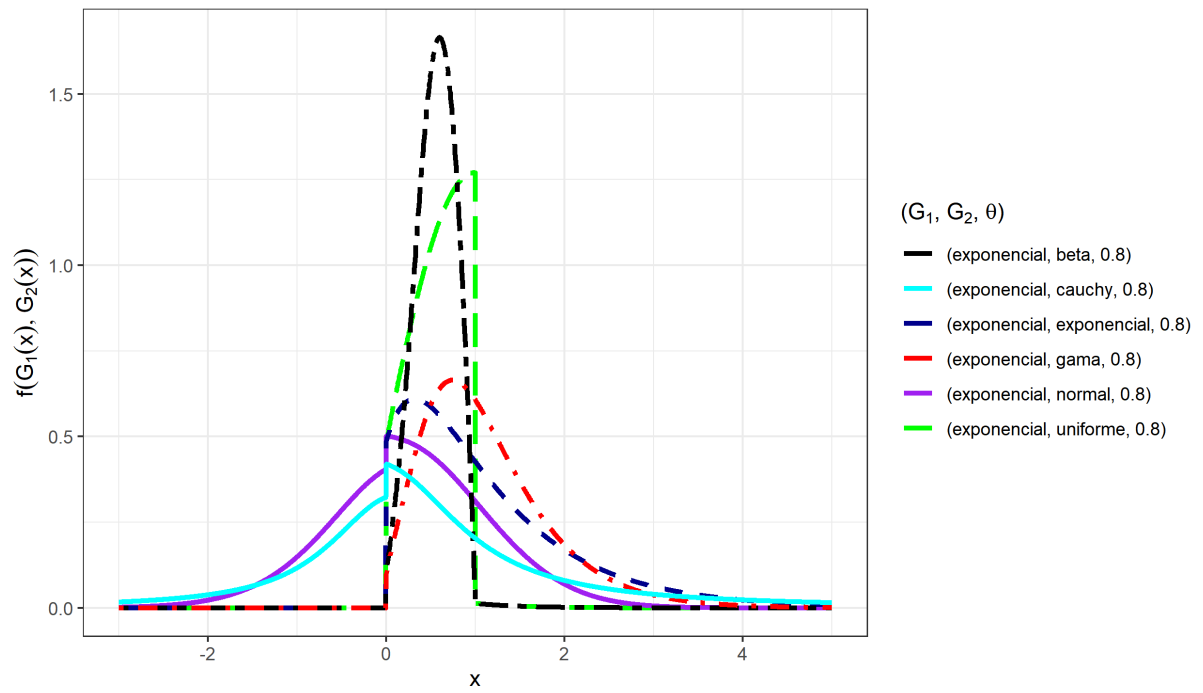


Figura I2 – fdp para $\theta = 0.4$

Figura I3 – fdp para $\theta = 0.5$ Figura I4 – fdp para $\theta = 0.6$

Figura I5 – fdp para $\theta = 0.8$

Apêndice J: Gráficos das fdp's para a classe seno – G₁, G₂

As figuras foram obtidas por $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{COS} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x) + \pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{COS} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

As figuras referentes a este apêndice estão no corpo da tese.

Apêndice K: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

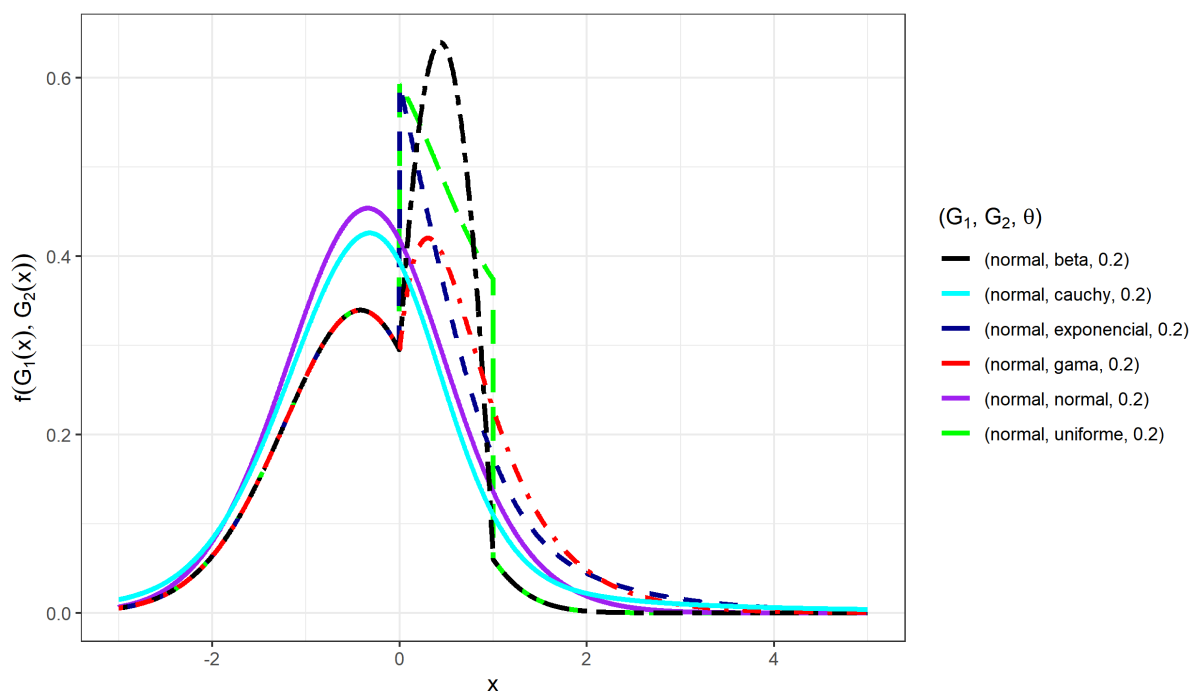


Figura K1 – fdp para $\theta = 0.2$

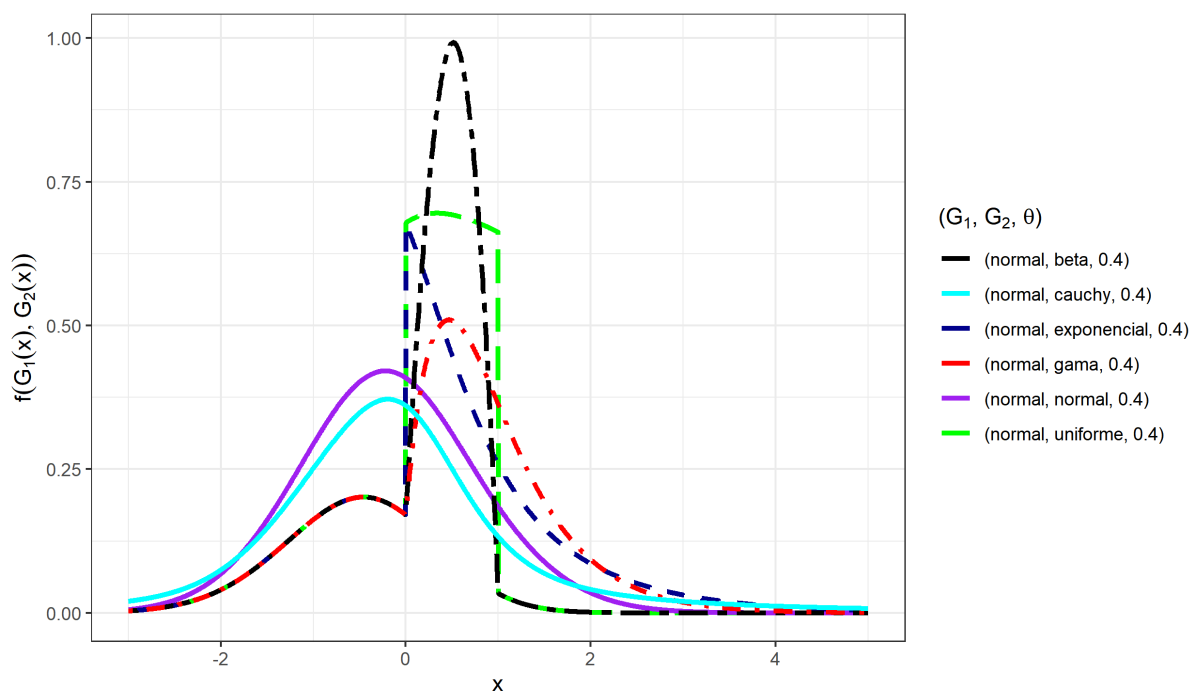
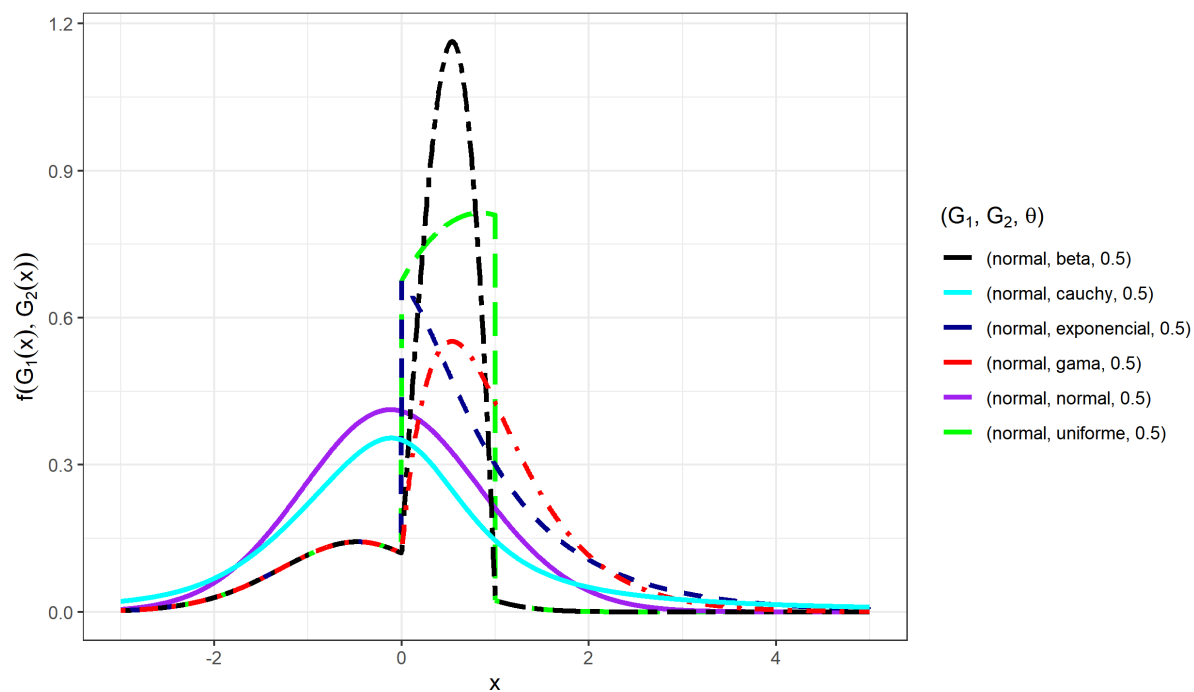
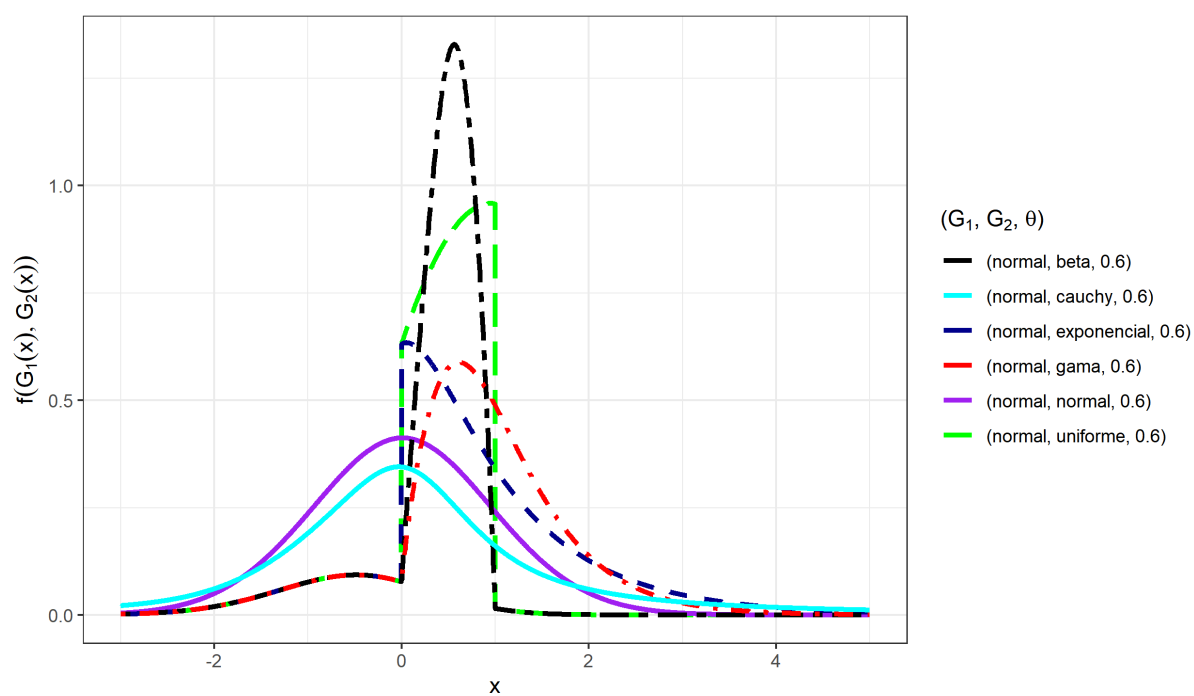
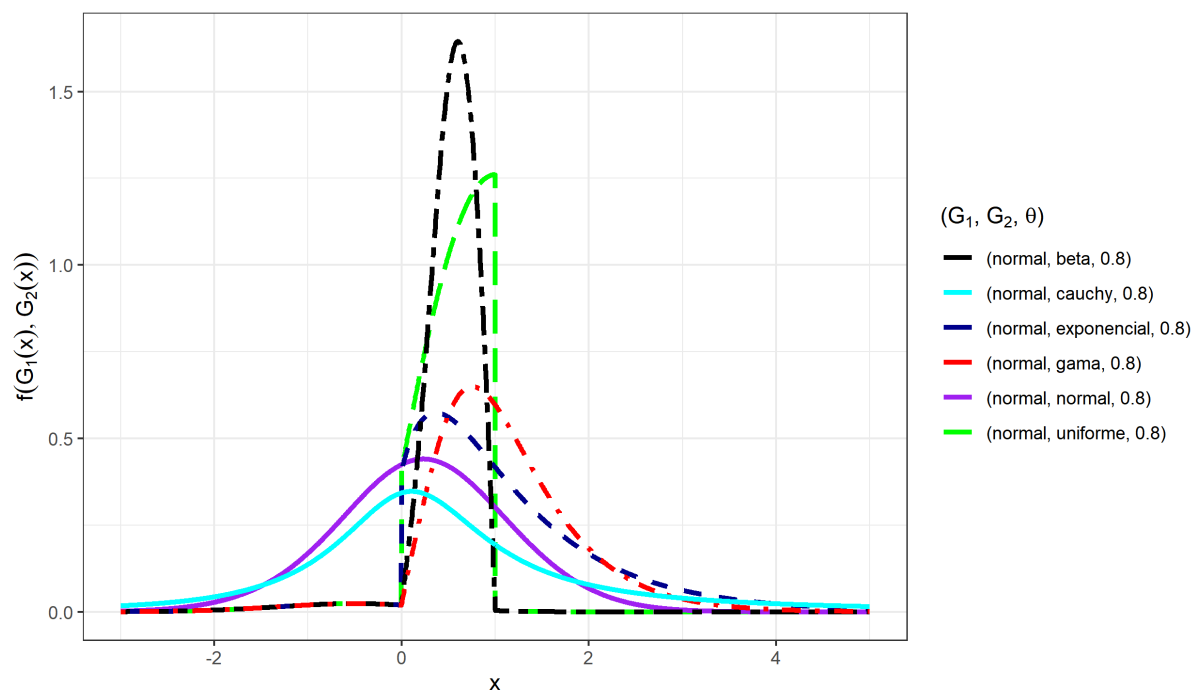


Figura K2 – fdp para $\theta = 0.4$

Figura K3 – fdp para $\theta = 0.5$ Figura K4 – fdp para $\theta = 0.6$

Figura K5 – fdp para $\theta = 0.8$

Apêndice L: Gráficos das fdp's para a classe seno – G_1, G_2

As figuras obtidas a seguir foram dadas por $f_{G_1, G_2}(x) = \frac{\pi(1-\theta)g_1(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi(1-\theta)G_1(x)+\pi\theta}{2} \right] + \frac{\pi\theta g_2(x)}{2} \text{Cos} \left[\frac{\pi\theta(1-G_2(x))}{2} \right]$

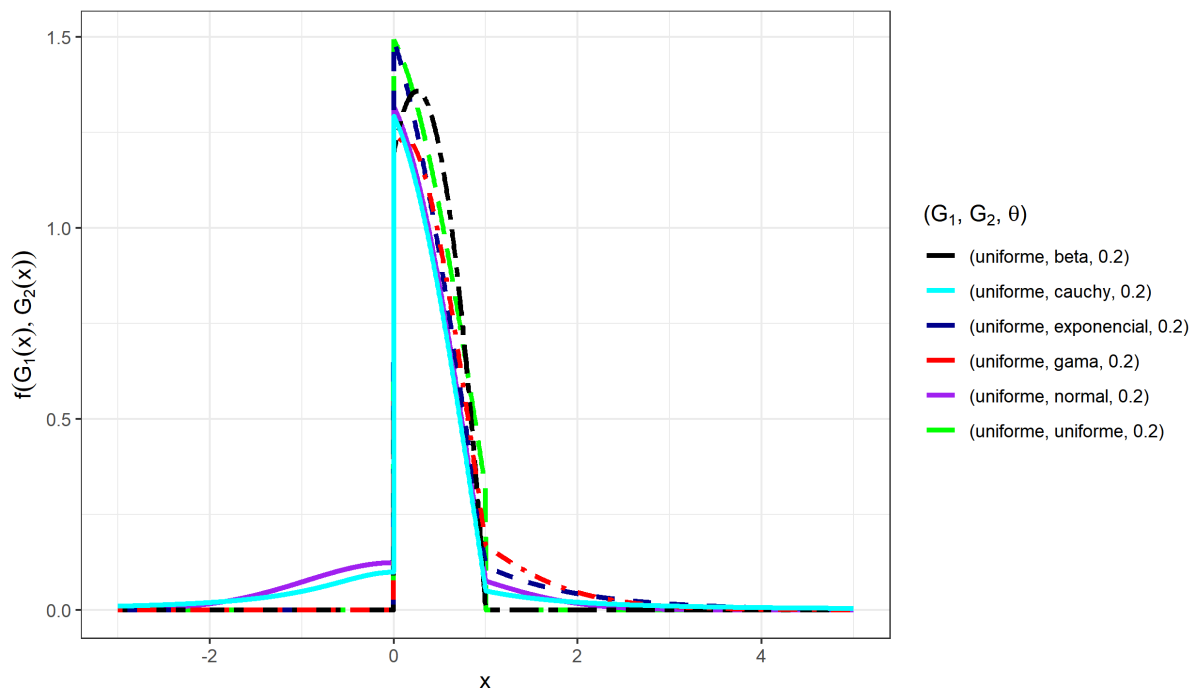


Figura L1 – fdp para $\theta = 0.2$

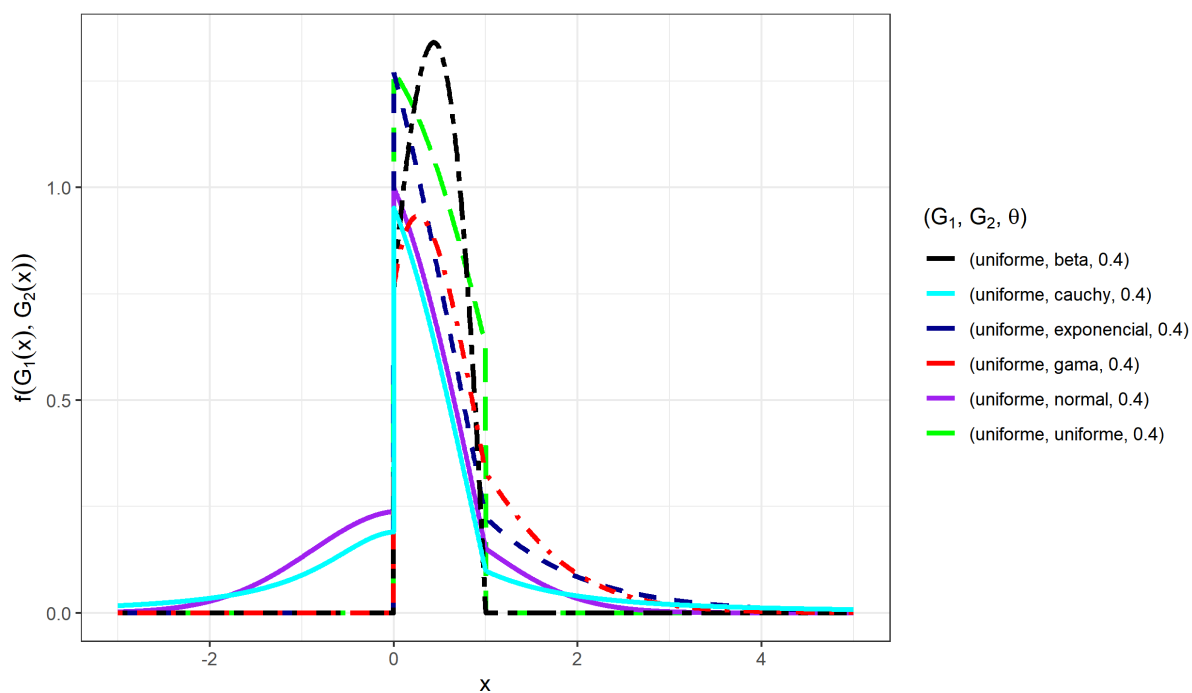
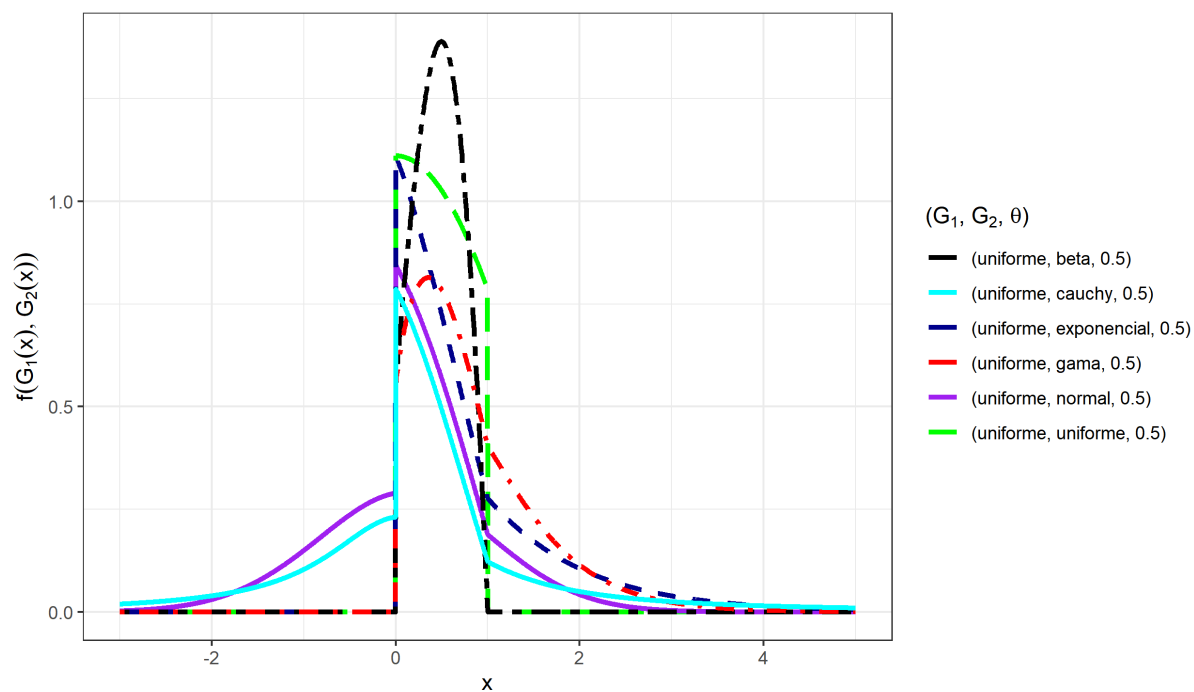
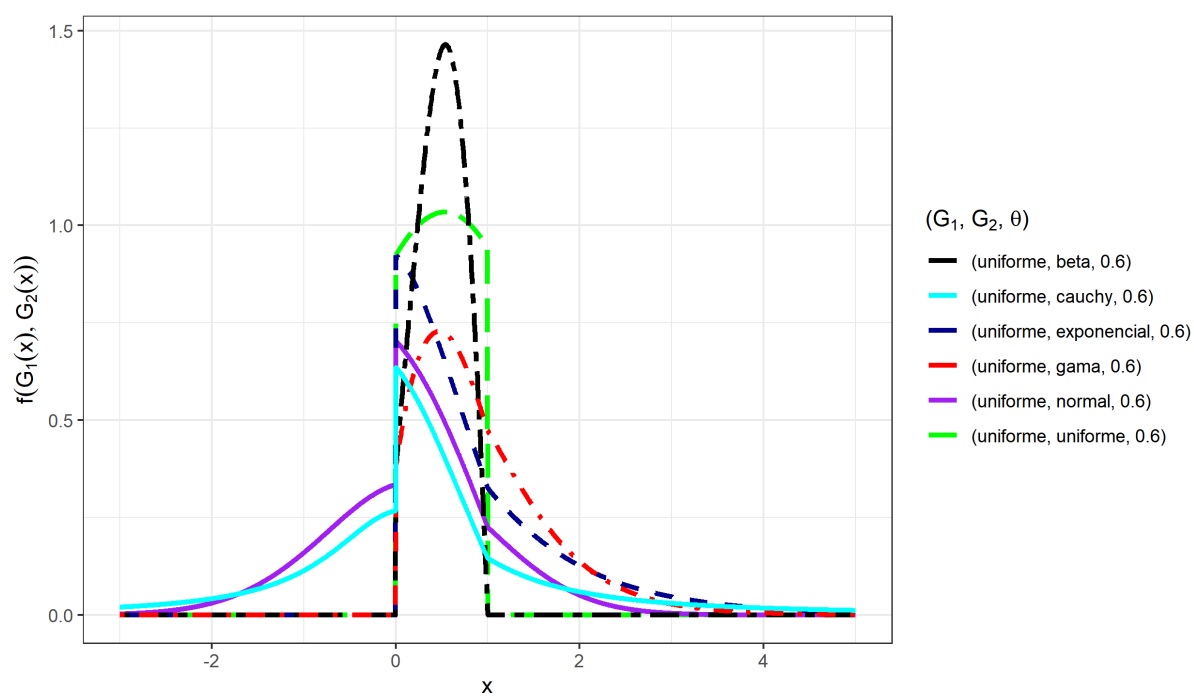
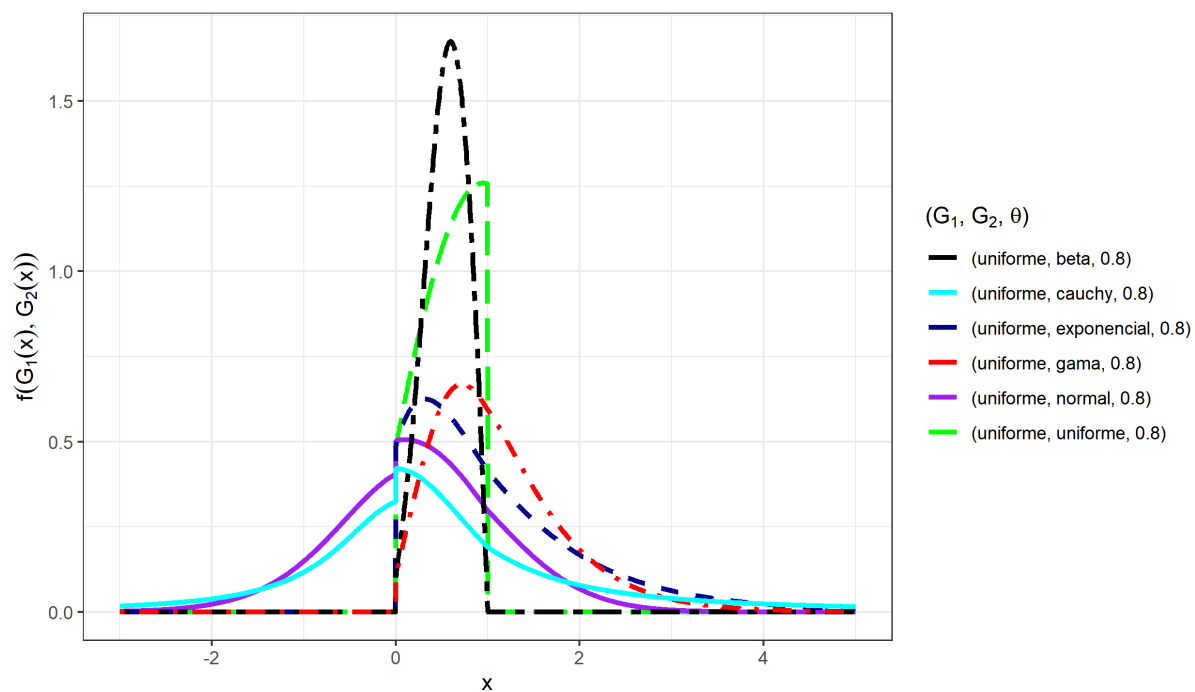


Figura L2 – fdp para $\theta = 0.4$

Figura L3 – fdp para $\theta = 0.5$ Figura L4 – fdp para $\theta = 0.6$

Figura L5 – fdp para $\theta = 0.8$

Apêndice M: Gráficos das fdp's para a classe beta G - γ

As figuras obtidas a seguir foram geradas a partir da seguinte expressão:

$$F_G(x; \alpha, \beta, \theta, \gamma) = \int_{-\infty}^x \frac{g^\gamma(x, \theta)}{K(\alpha, \beta, \theta, \gamma)} \cdot G^{\alpha-1}(t, \theta) \cdot (1 - G(t, \theta))^{\beta-1} dt$$

$$f_{G_1, G_2}(x) = \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(C(G_1(x))) \cdot f^\delta(C(G_1(x))) \cdot [C(G_1(x))]'^\gamma + \frac{1}{k} \cdot F^\lambda(D(G_2(x))) \cdot f^\delta(D(G_2(x))) \cdot [-D(G_2(x))]'^\gamma$$

Em que adotaram-se os valores para $\alpha = 0.5$, $\alpha = 2.0$ e $\alpha = 5.0$, $\beta = 0.5$ e $\gamma = 0.0$, $\gamma = 1.0$, $\gamma = 2.0$.

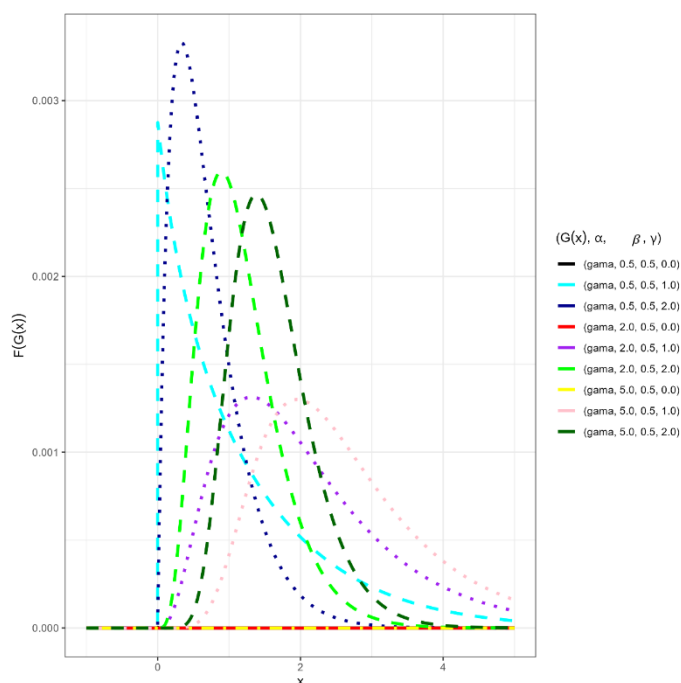


Figura M1 – gráficos da fdp da classe beta Gama - γ

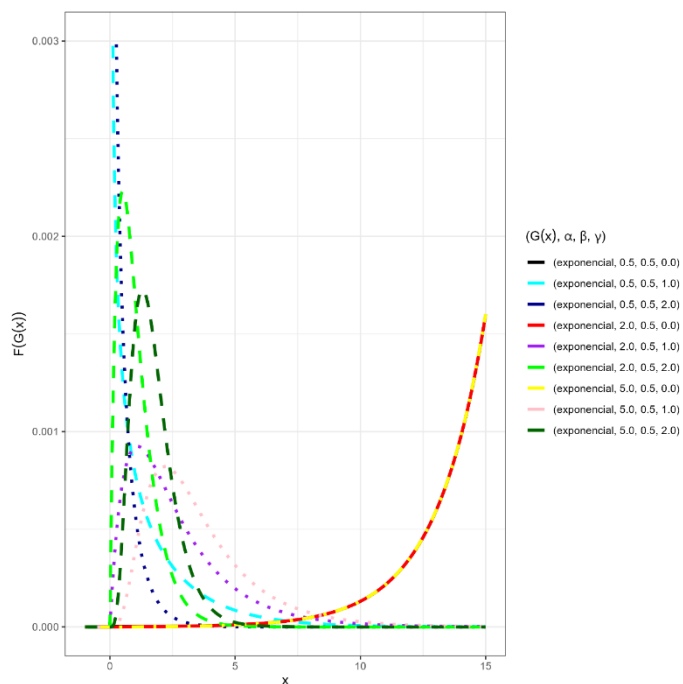


Figura M2 – gráficos da fdp da classe beta Exponencial - γ

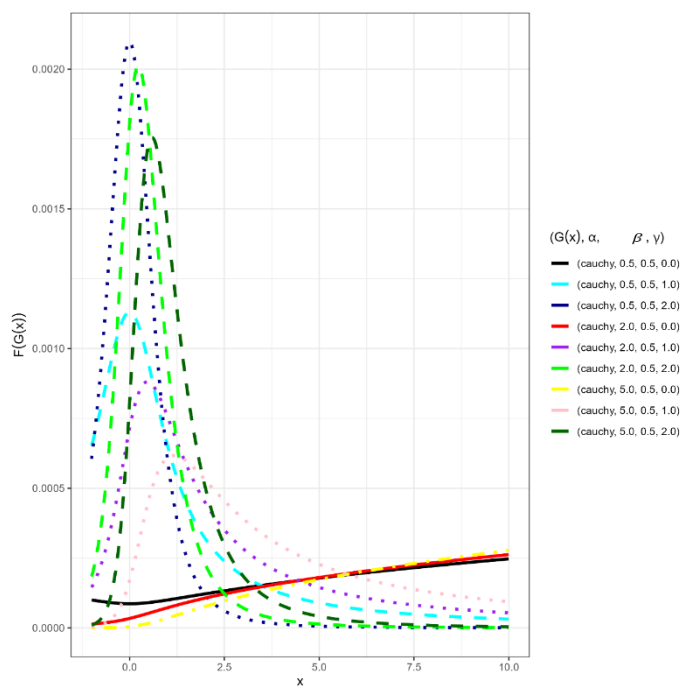


Figura M3 – gráficos da fdp da classe beta Cauchy - γ

As figuras M4 e M5 referentes a este apêndice estão no corpo da tese.

Apêndice N: Códigos do R para construção de gráficos e tabelas

CÓDIGO PARA AS DENSIDADES ACUMULADAS DA CLASSE SENO

FDA - Classe Seno

```
fdpplot = function(ng1, ng2, th){
  if(ng1 == 'uniforme'){
    G1 = punif(x)
  } else if(ng1 == 'normal'){
    G1 = pnorm(x)
  } else if(ng1 == 'beta'){
    G1 = pbeta(x, 2, 2)
  } else if(ng1 == 'gama'){
    G1 = pgamma(x, 2, 2)
  } else if(ng1 == 'exponencial'){
    G1 = pexp(x)
  } else if(ng1 == 'cauchy'){
    G1 = pcauchy(x)
  }

  if(ng2 == 'uniforme'){
    G2 = punif(x)
  } else if(ng2 == 'normal'){
    G2 = pnorm(x)
  } else if(ng2 == 'beta'){
    G2 = pbeta(x, 2, 2)
  } else if(ng2 == 'gama'){
    G2 = pgamma(x, 2, 2)
  } else if(ng2 == 'exponencial'){
    G2 = pexp(x)
  } else if(ng2 == 'cauchy'){
    G2 = pcauchy(x)
  }

  z = rep(0, N)

  for(i in 1:N){
    n1 = pi*(1-th)*G1[i] + pi*th
    n2 = pi*th*(1-G2[i])
    z[i] = sin(n1/2) - sin(n2/2)
  }

  list(x = x, G1 = G1, G2 = G2, z = z, ng1 = ng1, ng2 = ng2, th = th)
}
```

```

library(ggplot2)
library(dplyr)
N = 2000
x = seq(-3, 5, l = N)
df = data.frame(x=x)

distrib = c('uniforme','normal', 'exponencial', 'beta', 'gama', 'cauchy')
theta = c(0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8)

for(k in 1:5){
  for(i in 1:6){
    for(j in 1:6){
      fdp = fdpplot(distrib[i], distrib[j], theta[k])
      assign(paste0('z_', distrib[i], '_', distrib[j], '_', theta[k]), fdp$z)
      df[[paste0('z_', distrib[i], '_', distrib[j], '_', theta[k]) ]] = fdp$z
    }
  }
}

# Gráficos - fda

p = df %>%
  ggplot() +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_uniforme_0.8, colour="(uniforme, uniforme,
0.8)"), size=1.2) +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_normal_0.8, colour="(uniforme, normal, 0.8)"),
size=1.2) +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_exponencial_0.8, colour="(uniforme,
exponencial, 0.8)"), size=1.2) +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_beta_0.8, colour="(uniforme, beta, 0.8)"),
size=1.2) +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_gama_0.8, colour="(uniforme, gama, 0.8)"),
size=1.2) +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_cauchy_0.8, colour="(uniforme, cauchy, 0.8)"),
size=1.2) +
  labs(x = 'x', y = expression(F(G[1](x), G[2](x)))) +
  scale_color_manual(name = expression(paste(' ', G[1], ', ', G[2], ', ', theta, ' ')),
    values = c(
      "(uniforme, uniforme, 0.8)" = "black",
      "(uniforme, normal, 0.8)" = "cyan",
      "(uniforme, exponencial, 0.8)" = "darkblue",
      "(uniforme, beta, 0.8)" = "red",
      "(uniforme, gama, 0.8)" = "purple",
      "(uniforme, cauchy, 0.8)" = "green"
    )) +
  theme_bw()
p

```

CÓDIGO PARA AS DENSIDADES DE PROBABILIDADE DA CLASSE SENO

FDP - Classe Seno

```

fdpplot = function(ng1, ng2, th){
  if(ng1 == 'uniforme'){
    G1 = punif(x)
    g1 = dunif(x)
  } else if(ng1 == 'normal'){
    G1 = pnorm(x)
    g1 = dnorm(x)
  } else if(ng1 == 'beta'){
    G1 = pbeta(x, 2, 2)
    g1 = dbeta(x, 2, 2)
  } else if(ng1 == 'gama'){
    G1 = pgamma(x, 2, 2)
    g1 = dgamma(x, 2, 2)
  } else if(ng1 == 'exponencial'){
    G1 = pexp(x)
    g1 = dexp(x)
  } else if(ng1 == 'cauchy'){
    G1 = pcauchy(x)
    g1 = dcauchy(x)
  }
}

if(ng2 == 'uniforme'){
  G2 = punif(x)
  g2 = dunif(x)
} else if(ng2 == 'normal'){
  G2 = pnorm(x)
  g2 = dnorm(x)
} else if(ng2 == 'beta'){
  G2 = pbeta(x, 2, 2)
  g2 = dbeta(x, 2, 2)
} else if(ng2 == 'gama'){
  G2 = pgamma(x, 2, 2)
  g2 = dgamma(x, 2, 2)
} else if(ng2 == 'exponencial'){
  G2 = pexp(x)
  g2 = dexp(x)
} else if(ng2 == 'cauchy'){
  G2 = pcauchy(x)
  g2 = dcauchy(x)
}

z = rep(0, N)

for(i in 1:N){
  m1 = pi*(1-th)*g1[i]/2

```

```

    m2 = pi*th*g2[i]/2
    n1 = pi*(1-th)*G1[i] + pi*th
    n2 = pi*th*(1-G2[i])
    z[i] = m1*cos(n1/2) + m2*cos(n2/2)
  }

  list(x = x, G1 = G1, G2 = G2, z = z, ng1 = ng1, ng2 = ng2, th = th)
}

N = 2000
x = seq(-3, 5, l = N)
df = data.frame(x=x)

distrib = c('uniforme','normal', 'exponencial', 'beta', 'gama', 'cauchy')
theta = c(0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8)

for(k in 1:5){
  for(i in 1:6){
    for(j in 1:6){
      fdp = fdplot(distrib[i], distrib[j], theta[k])
      assign(paste0('z_', distrib[i], '_', distrib[j], '_', theta[k]), fdp$z)
      df[[paste0('z_', distrib[i], '_', distrib[j], '_', theta[k]) ]] = fdp$z
    }
  }
}

# Gráficos - fdp

p = df %>%
  ggplot() +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_uniforme_0.8, colour="(uniforme, uniforme, 0.8)"), size=1.2, linetype = "longdash") +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_normal_0.8, colour="(uniforme, normal, 0.8)"), size=1.2) +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_exponencial_0.8, colour="(uniforme, exponencial, 0.8)"), size=1.2, linetype = "dashed") +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_beta_0.8, colour="(uniforme, beta, 0.8)"), size=1.2, linetype = "twodash") +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_gama_0.8, colour="(uniforme, gama, 0.8)"), size=1.2, linetype = "dotdash") +
  geom_line(aes(x=x, y=z_uniforme_cauchy_0.8, colour="(uniforme, cauchy, 0.8)"), size=1.2) +
  labs(x = 'x', y = expression(f(G[1](x), G[2](x)))) +
  scale_color_manual(name = expression(paste('( ', G[1], ', ', G[2], ', ', theta, ' )')),
    values = c(
      "black",
      "cyan",

```

```

        "darkblue",
        "red",
        "purple",
        "green"
      )) +
    theme_bw()
  p

```

CÓDIGO PARA A SIMULAÇÃO BOOTSTRAP

```

##### Simulação bootstrap

library(tidyverse)

n = 10000
aa = 0
bb = 1
x = rnorm(n, aa, bb)

th = 0.3
a = 1; b = 1
c = 3; d = 4

dens_beta_beta = function(x, th, a, b, c, d){
  g1 = dbeta(x, a, b)
  G1 = pbeta(x, a, b)
  g2 = dbeta(x, c, d)
  G2 = pbeta(x, c, d)

  m1 = pi*(1-th)*g1/2
  m2 = pi*th*g2/2
  n1 = (pi*(1-th)*G1 + pi*th)/2
  n2 = pi*th*(1-G2)/2
  p = m1*cos(n1) + m2*cos(n2)
}

p = dens_beta_beta(x, th, a, b, c, d)
w = p/sum(p)

xn = sample(x, replace = T, prob = w)

xn %>%
  as.tibble() %>%
  mutate(x = value) %>%
  ggplot(aes(x=x)) +
  geom_histogram(aes(y=..density..), bins = 15,
                 colour="black", fill="blue",
                 alpha = 0.2) +
  stat_function(fun = ~dens_beta_beta(.x, th, a, b, c, d),
               geom = "area", alpha = 0.2, fill = 'red') +

```

```
labs(x = 'x', y = expression(f(G[1](x), G[2](x)))) +
theme_bw()
```

```
x.n %>% as.data.frame() %>%
  summarise(Média = mean(x.n),
            DP = sd(x.n),
            Q1 = quantile(x.n, 0.25),
            MD = quantile(x.n, 0.50),
            Q3 = quantile(x.n, 0.75),
            Min = min(x.n),
            Máx = max(x.n)) %>%
  mutate(across(everything(), round, 3))
```

ARQUIVO PARA VARICELA (ANEXO A)

Dados para a EMV

```
ChickenPox = c(0.956, 0.927, 1.585, 1.536, 1.448, 1.272, 0.303,
0.068, 0.062, 0.116, 0.275, 0.565, 0.922, 0.928, 0.925, 1.121,
1.282, 1.142, 0.411, 0.114, 0.082, 0.22, 0.646, 1.069, 1.32,
1.473, 2.305, 2.094, 1.694, 1.043, 0.39, 0.127, 0.056, 0.148,
0.426, 0.89, 1.5, 1.442, 1.799, 1.556, 1.926, 1.635, 0.379,
0.09, 0.068, 0.21, 0.667, 0.905, 1.124, 1.192, 1.85, 1.941,
1.505, 1.016, 0.429, 0.058, 0.078, 0.251, 0.605, 0.817, 0.97,
0.86, 0.977, 1.143, 0.92, 0.94, 0.426, 0.193, 0.099, 0.186,
0.525, 1.085, 1.22, 1.157, 1.974, 2.301, 2.277, 1.746, 0.413,
0.129, 0.078, 0.16, 0.448, 0.82, 1.154, 1.277, 1.841, 1.981,
1.304, 1.288, 0.387, 0.114, 0.097, 0.278, 0.604, 0.787, 1.01,
0.968, 1.195, 1.2, 1.218, 1.183, 0.334, 0.145, 0.066, 0.252,
0.536, 0.996, 1.624, 1.626, 1.603, 1.74, 1.9, 1.424, 0.711,
0.191, 0.135, 0.302, 0.612, 1.178, 1.409, 1.218, 1.543, 1.477,
0.987, 0.935, 0.495, 0.126, 0.109, 0.197, 0.397, 0.88, 1.097,
1.164, 1.652, 1.8, 1.941, 1.419, 0.444, 0.136, 0.07, 0.171,
0.424, 0.66, 1.05, 1.177, 1.559, 1.513, 1.371, 1.042, 0.205,
0.067, 0.083, 0.143, 0.469, 0.611, 0.745, 1.039, 1.389, 1.284,
1.288, 0.871, 0.299, 0.087, 0.089, 0.155, 0.446, 0.749, 1.037,
1.08, 1.289, 1.211, 1.076, 1.08, 0.372, 0.132, 0.078, 0.133,
0.203, 0.214, 0.347, 0.407, 0.78, 1.182, 1.082, 0.899, 0.479,
0.123, 0.086, 0.18, 0.326, 0.695, 1.235, 1.399, 1.854, 2.406,
2.026, 1.378, 0.522, 0.136, 0.076, 0.109, 0.259, 0.521, 0.996,
1.174, 1.751, 1.554, 1.428, 1.308, 0.438, 0.15, 0.088, 0.151,
0.395, 0.781, 1.389, 2.059, 3.058, 2.589, 1.488, 1.048, 0.253,
0.082, 0.079, 0.125, 0.226, 0.47, 0.936, 1.026, 1.244, 0.935,
1.079, 0.884, 0.349, 0.144, 0.079, 0.26, 0.445, 0.592, 1.427,
1.545, 1.951, 2.2, 1.964, 1.284, 0.523, 0.142, 0.093, 0.148,
0.198, 0.374, 0.915, 0.963, 1.154, 1.393, 1.227, 1.158, 0.478,
0.084, 0.044, 0.113, 0.331, 1.052, 1.747, 1.796, 2.625, 2.411,
1.877, 1.052, 0.543, 0.11, 0.067, 0.124, 0.16, 0.43, 0.726,
1.101, 1.769, 1.599, 1.035, 0.988, 0.424, 0.147, 0.076, 0.105,
0.281, 0.524, 1.044, 1.247, 2.023, 1.903, 1.653, 1.247, 0.372,
0.107, 0.075, 0.094, 0.224, 0.487, 0.989, 1.639, 1.991, 1.905,
```

1.846, 1.381, 0.451, 0.176, 0.083, 0.15, 0.272, 0.55, 0.798,
 0.902, 1.316, 1.443, 1.102, 0.705, 0.272, 0.119, 0.106, 0.072,
 0.115, 0.337, 0.677, 0.885, 1.142, 1.59, 1.355, 1.198, 0.565,
 0.136, 0.089, 0.115, 0.174, 0.477, 0.741, 1.034, 1.401, 1.316,
 1.056, 0.882, 0.506, 0.136, 0.08, 0.062, 0.149, 0.368, 0.683,
 0.993, 1.205, 1.485, 1.349, 1.067, 0.369, 0.173, 0.095, 0.113,
 0.175, 0.335, 0.619, 0.691, 1.022, 0.858, 0.953, 0.913, 0.332,
 0.127, 0.082, 0.062, 0.147, 0.384, 0.711, 0.928, 1.152, 1.134,
 1.277, 0.961, 0.509, 0.173, 0.17, 0.193, 0.29, 0.415, 0.707, 0.724,
 1.105, 1.065, 0.938, 0.755, 0.442, 0.17, 0.091, 0.15, 0.219, 0.317,
 0.561, 0.631, 0.829, 0.857, 0.955, 0.808, 0.398, 0.111, 0.082, 0.147,
 0.276, 0.528, 0.746, 0.889, 1.274, 1.164, 1.024, 0.863, 0.436, 0.27,
 0.156, 0.139, 0.156, 0.306, 0.362, 0.438, 0.624, 0.543, 0.642, 0.659,
 0.286, 0.086, 0.043, 0.068, 0.168, 0.253, 0.526, 0.601, 0.809, 0.759,
 0.95, 1.088, 0.452, 0.198, 0.082, 0.072, 0.154, 0.206, 0.316, 0.569,
 0.549, 0.671, 0.736, 0.659, 0.287, 0.132, 0.051, 0.085, 0.079, 0.133,
 0.177, 0.21, 0.372, 0.562, 0.623, 0.626, 0.296, 0.142, 0.082, 0.096,
 0.166, 0.288, 0.416, 0.459, 0.576, 1.042, 0.873, 0.704, 0.366, 0.137,
 0.058, 0.134, 0.071, 0.142, 0.211, 0.331, 0.471, 0.639, 0.569, 0.718,
 0.391, 0.123, 0.072, 0.063, 0.086, 0.141, 0.32, 0.463, 0.69, 0.847,
 1.121, 1.048)

CÓDIGO USADO PARA AS DENSIDADES DE PROBABILIDADE

FDPs

#----- Kumaraswamy Beta -----#

Kumaraswamy Beta - Probability density function.

```
pdf_kwbeta <- function(par,x){
  a = par[1]
  beta = par[2]
  b = par[3]
  alpha = par[4]
  (a*b*x^(alpha-1)*(1-x)^(beta-1)*(pbeta(x,alpha,beta))^(a-1)*
  (1-pbeta(x,alpha,beta)^a)^(b-1))/beta(alpha,beta)
}
```

Kumaraswamy Beta - Cumulative distribution function.

```
cdf_kwbeta <- function(par,x){
  a = par[1]
  beta = par[2]
  b = par[3]
  alpha = par[4]
  1 - (1 - pbeta(x,alpha,beta)^a)^b
}
```

#----- Exponentiated Weibull -----#

Exponentiated Weibull - Probability density function.

```
pdf_expweibull <- function(par,x){
```



```

a = par[1]
c = par[2]
beta = par[3]
a * beta * c * exp(-(beta*x)^c) * (beta*x)^(c-1) * (1 - exp(-(beta*x)^c))^(a-1)
}
# Exponentiated Weibull - Cumulative distribution function.
cdf_expweibull <- function(par,x){
  a = par[1]
  c = par[2]
  beta = par[3]
  (1 - exp(-(beta*x)^c))^a
}

```

```

#----- Kumaraswamy Weibull Poisson -----#
# Kumaraswamy Weibull Poisson - Probability density function.
pdf_kwweibullpoisson <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  c = par[3]
  lambda = par[4]
  beta = par[5]
  (a*b*c*lambda*(beta^c)*(x^(c-1))*((1-exp(-(x*beta)^c))^(a-1)) *
  ((1-(1-exp(-(beta*x)^c))^a)^(b-1)) *
  exp(-lambda*(1-(1-(1-exp(-(beta*x)^c))^a)^b
  - (beta*x)^c))/(1-exp(-lambda))
}
# Kumaraswamy Weibull Poisson - Cumulative distribution function.
cdf_kwweibullpoisson <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  c = par[3]
  lambda = par[4]
  beta = par[5]
  (1 - exp(lambda*(-(1-(1-(1-exp(-(x*beta)^c))^a)^b)))/(1-exp(-lambda))
}

```

```

#----- BGE -----#
pdf_bge <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  alpha = par[3]
  lamb = par[4]
  g = alpha*lamb * exp(-lamb*x)*(1-exp(-lamb*x))^(alpha-1)
  G = (1 - exp(-lamb*x))^alpha
  1/beta(a,b)*g*G^(a-1)*(1-G)^(b-1)
}

```

```

cdf_bge <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  alpha = par[3]
  lamb = par[4]
  G = (1 - exp(-lamb*x))^alpha
  pbeta(G,a,b)
}

#----- Weibull -----#
# Weibull - Probability density function.
pdf_weib <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  lamb*th*(lamb*x)^(th-1)*exp(-(lamb*x)^th)
}
# Weibull - Cumulative distribution function.
cdf_weib <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  1 - exp(-(lamb*x)^th)
}

#----- Fretchet -----#
# Fretchet - Probability density function.
pdf_fret <- function(par,x){
  m = 0
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  z=(x-m)/lamb
  th/lamb*z^(-1-th)*exp(-z^(-th))
}
# Fretchet - Cumulative distribution function.
cdf_fret <- function(par,x){
  m = 0
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  z=(x-m)/lamb
  exp(-z^(-th))
}

#----- Gumbel -----#
# Gumbel - Probability density function.
pdf_gumb <- function(par,x){
  mu = par[1]
  sig = par[2]
  z=(x-mu)/sig

```

```

    1/sig*exp(-(z+exp(-z)))
  }
# Gumbel - Cumulative distribution function.
cdf_gumb <- function(par,x){
  mu = par[1]
  sig = par[2]
  z=(x-mu)/sig
  exp(-exp(-z))
}

#-----# Gama -----#
# Gama - Probability density function.
pdf_gama <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  x^(a-1)*b^a*exp(-b*x)/gamma(a)
}
# Gama - Cumulative distribution function.
cdf_gama <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  integrand <- function(x) {x^(a-1)*b^a*exp(-b*x)/gamma(a)}
  integrate(integrand, lower = 0, upper = Inf)$value
}

```

AQUI COMEÇA A CLASSE SENO NOVAMENTE? ARQUIVO 04 PARA CAP 4.4.13?

```

#-----# SC_Beta_Unif -----#
# SC_Beta_Unif - Probability density function.
pdf_sc_gama_beta <- function(par,x){
  th = par[1]
  a = par[2]
  b = par[3]
  c = par[4]
  d = par[5]
  G1 = pgamma(x, a, b)
  g1 = dgamma(x, a, b)
  G2 = pbeta(x, c, d)
  g2 = dbeta(x, c, d)
  m1 = pi*(1-th)*g1/2
  m2 = pi*th*g2/2
  n1 = pi*(1-th)*G1 + pi*th
  n2 = pi*th*(1-G2)
  m1*cos(n1/2) + m2*cos(n2/2)
}
# SC_Beta_Unif - Cumulative distribution function.
cdf_sc_gama_beta <- function(par,x){
  th = par[1]
  a = par[2]

```

```

    b = par[3]
    c = par[4]
    d = par[5]
  integrand <- function(x) {
    G1 = pgamma(x, a, b)
    g1 = dgamma(x, a, b)
    G2 = pbeta(x, c, d)
    g2 = dbeta(x, c, d)
    m1 = pi*(1-th)*g1/2
    m2 = pi*th*g2/2
    n1 = pi*(1-th)*G1 + pi*th
    n2 = pi*th*(1-G2)
    m1*cos(n1/2) + m2*cos(n2/2)
  }
  integrate(integrand, lower = 0, upper = Inf)$value
}

#----- SC_normal_cauchy -----#
# SC_normal_cauchy - Probability density function.
pdf_sc_normal_cauchy <- function(par,x){
  th = par[1]
  a = par[2]
  b = par[3]
  c = par[4]
  d = par[5]
  G1 = pnorm(x, a, b)
  g1 = dnorm(x, a, b)
  G2 = pcauchy(x, c, d)
  g2 = dcauchy(x, c, d)
  m1 = pi*(1-th)*g1/2
  m2 = pi*th*g2/2
  n1 = pi*(1-th)*G1 + pi*th
  n2 = pi*th*(1-G2)
  m1*cos(n1/2) + m2*cos(n2/2)
}
# SC_normal_cauchy - Cumulative distribution function.
cdf_sc_normal_cauchy <- function(par,x){
  th = par[1]
  a = par[2]
  b = par[3]
  c = par[4]
  d = par[5]
  integrand <- function(x) {
    G1 = pnorm(x, a, b)
    g1 = dnorm(x, a, b)
    G2 = pcauchy(x, c, d)
    g2 = dcauchy(x, c, d)
    m1 = pi*(1-th)*g1/2
    m2 = pi*th*g2/2

```

```

    n1 = pi*(1-th)*G1 + pi*th
    n2 = pi*th*(1-G2)
    m1*cos(n1/2) + m2*cos(n2/2)
  }
  integrate(integrand, lower = -Inf, upper = Inf)$value
}

```

```

#----- Mistura de Normais -----#
# Mistura de Normais - Probability density function.
pdf_norm_norm <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  c = par[3]
  d = par[4]
  #th = par[5]
  0.7*dnorm(x, a, b) + 0.3*dnorm(x,c,d)
}
# Mistura de Normais - Cumulative distribution function.
cdf_norm_norm <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  c = par[3]
  d = par[4]
  #th = par[5]
  integrand <- function(x) {
    0.5*dnorm(x, a, b) + 0.5*dnorm(x,c,d)
  }
  integrate(integrand, lower = -Inf, upper = Inf)$value
}

```

Código fonte para a EMV

```

library(AdequacyModel)
library(tidyverse)

```

```

data = ChickenPox %>%
  data.frame() %>%
  rename(., x = .) %>%
  drop_na()

```

```

aj_gama_beta = goodness.fit(pdf=pdf_sc_gama_beta, cdf=cdf_sc_gama_beta,
  starts = c(0.3, 3, 3, 0.8, 2.3), data = data$x,
  method="P", S = 20, domain=c(0,Inf), lim_inf = c(0.1, 0.1, 0.1, 0.1,
0.1),
  lim_sup = c(0.99, 5, 5, 4, 4), mle=NULL)

```

```

aj_normal_cauchy = goodness.fit(pdf=pdf_sc_normal_cauchy,
cdf=cdf_sc_normal_cauchy,
    starts = c(0.3, 0, 3, 2, 2.3), data = data$x,
    method="P", S = 20, domain=c(-Inf,Inf), lim_inf = c(0.1, -3, 0.1, -
3, 0.1),
    lim_sup = c(0.99, 3, 5, 3, 5), mle=NULL)

aj_expweibull = goodness.fit(pdf=pdf_expweibull, cdf=cdf_expweibull,
    starts = c(0.3, 1, 1), data = data$x,
    method="P", S = 20, domain=c(0,Inf), lim_inf = c(0.1, 0.1, 0.1),
    lim_sup = c(5,5,5), mle=NULL)

aj_kwweibullpoisson = goodness.fit(pdf=pdf_kwweibullpoisson,
cdf=cdf_kwweibullpoisson,
    starts = c(1.4, 5, 0.7, 1, .3), data = data$x,
    method="P", S = 20, domain=c(0,Inf), lim_inf = c(0.1, 0.1, 0.1,
0.1, 0.1),
    lim_sup = c(5,5,5,5,5), mle=NULL)

aj_bge = goodness.fit(pdf=pdf_bge, cdf=cdf_bge,
    starts = c(0.5, 1.3, 1.8, 1.2), data = data$x,
    method="P", S = 20, domain=c(0,Inf), lim_inf = c(0.1, 0.1, 0.1,
0.1),
    lim_sup = c(5,5,5,5), mle=NULL)

hist(data$x, freq = F, main="")
x = seq(0, 4, l = 100)
mle_aj_gama_beta = aj_gama_beta$mle
lines(x, pdf_sc_gama_beta(par = mle_aj_gama_beta, x))

mle_aj_normal_cauchy = aj_normal_cauchy$mle
lines(x, pdf_sc_normal_cauchy(par = mle_aj_normal_cauchy, x), col = 2)

mle_aj_expweibull = aj_expweibull$mle
lines(x, pdf_expweibull(par = mle_aj_expweibull, x), col = 3)

mle_aj_kwweibullpoisson = aj_kwweibullpoisson$mle
lines(x, pdf_kwweibullpoisson(par = mle_aj_kwweibullpoisson, x), col = 4)

mle_aj_bge = aj_bge$mle
lines(x, pdf_bge(par = mle_aj_bge, x), col = 5)

rbind(c('mle_aj_gama_beta', round(mle_aj_gama_beta,5)),
    c('mle_aj_normal_cauchy', round(mle_aj_normal_cauchy,5)),
    c('mle_aj_expweibull', round(mle_aj_expweibull,5), NA, NA),
    c('mle_aj_kwweibullpoisson', round(mle_aj_kwweibullpoisson,5)),
    c('mle_aj_bge', round(mle_aj_bge,5), NA)
)

```

Código de ajuste para distribuição Beta-Exponencial:

```
x = c(
  7.2, 9.5, 8.4, 8.3, 9.2, 6.9, 9.7, 5.3, 6.1, 9.4, 5.8, 4.4, 4.8, 10.7, 8.3,
  8.6, 11.2, 6.1, 5.8, 8.1, 5.6, 6.2, 6.4, 11.0, 7.4, 6.3, 5.4, 7.0, 5.9, 6.9,
  7.0, 7.5, 5.1, 7.7, 3.9, 6.5, 7.6, 5.7, 5.2, 4.8, 8.9, 5.8, 9.8, 5.4, 5.1,
  5.3, 7.5, 6.6, 6.3, 6.8
)
```

```
alfa = 3.5868478
beta = 0.4469744
```

```
dgama = dgamma(x, alfa, beta)
AICg = -2*sum(log(dgama)) + 2*2
AICg
```

```
hist(x, freq = F, main = "", ylab = 'Densidade', xlab='Dados')
xx = seq(0.1, 15, l = 500)
dgama = dgamma(xx, alfa, beta)
lines(xx, dgama, lwd = 2)
```

```
alfa = 4.8847475
beta = 0.4180293
lamb = 0.2613106
gama = 1.8340104
```

```
integrand <- function(x) {
  lamb^gama*(1-exp(-lamb*x))^(alfa-1)*(exp(-lamb*x))^(gama+beta-1)
}
```

```
K = integrate(integrand, lower = 0, upper = 20)$v
```

```
dbetaexp = lamb^gama*(1-exp(-lamb*x))^(alfa-1)*(exp(-lamb*x))^(gama+beta-1)/K
AICbe = -2*sum(log(dbetaexp)) + 2*4
AICbe
```

```
dbetaexp = lamb^gama*(1-exp(-lamb*xx))^(alfa-1)*(exp(-lamb*xx))^(gama+beta-1)/K
lines(xx, dbetaexp, col = 2, lwd = 2)
```

```
legend('topright', c('Gama', 'Beta-Exponencial'), col=1:2, lwd = 2)
```

```
AICg
AICbe
```

ANEXOS

Anexo A: Tabela com dados reais aplicados para a distribuição seno – G_1 , G_2

Tabela A1 - dados reais aplicados para a distribuição seno – G_1 , G_2

0,956	0,927	1,585	1,536	1,448	1,272	0,303	0,068	0,062	0,116	0,275	0,565	0,922
0,928	0,925	1,121	1,282	1,142	0,411	0,114	0,082	0,220	0,646	1,069	1,320	1,473
2,305	2,094	1,694	1,043	0,390	1,127	0,056	0,148	0,426	0,890	1,500	1,442	1,799
1,556	1,926	1,635	0,379	0,090	0,068	0,210	0,667	0,905	1,124	1,192	1,850	1,941
1,505	1,016	0,429	0,058	0,078	0,251	0,605	0,817	0,970	0,860	0,977	1,143	0,920
0,940	0,426	0,193	0,099	0,186	0,525	1,085	1,220	1,157	1,974	2,301	2,277	1,746
0,413	0,129	0,078	0,160	0,448	0,820	1,154	1,277	1,841	1,981	1,304	1,288	0,387
0,114	0,097	0,278	0,604	0,787	1,010	0,968	1,195	1,200	1,218	1,183	0,334	0,145
0,066	0,252	0,536	0,996	1,624	1,626	1,603	1,74	1,900	1,424	0,711	0,191	0,135
0,302	0,612	1,178	1,409	1,218	1,543	1,477	0,987	0,935	0,495	0,126	0,109	0,197
0,397	0,880	1,097	1,164	1,652	1,800	1,941	1,419	0,444	0,136	0,070	0,171	0,424
0,660	1,050	1,177	1,559	1,513	1,371	1,042	0,205	0,067	0,083	0,143	0,469	0,611
0,745	1,039	1,389	1,284	1,288	0,871	0,299	0,087	0,089	0,155	0,446	0,749	1,037
1,080	1,289	1,211	1,076	1,080	0,372	0,132	0,078	0,133	0,203	0,214	0,347	0,407
0,780	1,182	1,082	0,899	0,479	0,123	0,086	0,180	0,326	0,695	1,235	1,399	1,854
2,406	2,026	1,378	0,522	0,136	0,076	0,109	0,259	0,521	0,996	1,174	1,751	1,554
1,428	1,308	0,438	0,150	0,088	0,151	0,395	0,781	1,389	2,059	3,058	2,589	1,488
1,048	0,253	0,082	0,079	0,125	0,226	0,470	0,936	1,026	1,244	0,935	1,079	0,884
0,349	0,144	0,079	0,260	0,445	0,592	1,427	1,545	1,951	2,200	1,964	1,284	0,523
0,142	0,093	0,148	0,198	0,374	0,915	0,963	1,154	1,393	1,227	1,158	0,478	0,084
0,044	0,113	0,331	1,052	1,747	1,796	2,625	2,411	1,877	1,052	0,543	0,110	0,067
0,124	0,160	0,430	0,726	1,101	1,769	1,599	1,035	0,988	0,424	0,147	0,076	0,105
0,281	0,524	1,044	1,247	2,023	1,903	1,653	1,247	0,372	0,107	0,075	0,094	0,224
0,487	0,989	1,639	1,991	1,905	1,846	1,381	0,451	0,176	0,083	0,150	0,272	0,550
0,798	0,902	1,316	1,443	1,102	0,705	0,272	0,119	0,106	0,072	0,115	0,337	0,677
0,885	1,142	1,590	1,355	1,198	0,565	0,136	0,089	0,115	0,174	0,477	0,741	1,034
1,401	1,316	1,056	0,882	0,506	0,136	0,080	0,062	0,149	0,368	0,683	0,993	1,205
1,485	1,349	1,067	0,369	0,173	0,095	0,113	0,175	0,335	0,619	0,691	1,022	0,858
0,953	0,913	0,332	0,127	0,082	0,062	0,147	0,384	0,711	0,928	1,152	1,134	1,277
0,961	0,509	0,173	0,170	0,193	0,290	0,415	0,707	0,724	1,105	1,065	0,938	0,755
0,442	0,170	0,091	0,150	0,219	0,317	0,561	0,631	0,829	0,857	0,955	0,808	0,398
0,111	0,082	0,147	0,276	0,528	0,746	0,889	1,274	1,164	1,024	0,863	0,436	0,270
0,156	0,139	0,156	0,306	0,362	0,438	0,624	0,543	0,642	0,659	0,286	0,086	0,043
0,068	0,168	0,253	0,526	0,601	0,809	0,759	0,950	1,088	0,452	0,198	0,082	0,072
0,154	0,206	0,316	0,569	0,549	0,671	0,736	0,659	0,287	0,32	0,051	0,085	0,079
0,133	0,177	0,210	0,372	0,562	0,623	0,626	0,296	0,142	0,082	0,096	0,166	0,288
0,416	0,459	0,576	1,042	0,873	0,704	0,366	0,137	0,058	0,134	0,071	0,142	0,211
0,331	0,471	0,639	0,569	0,718	0,391	0,123	0,072	0,063	0,086	0,141	0,320	0,463
0,690	0,847	1,121	1,048									

Fonte: Hipel e McLeod (1994)