

**Thaíze Fernandes Oliveira de Assis**

**CÓPULAS PARA COMBINAÇÃO DE MODELOS DE  
SÉRIES TEMPORAIS**

**Recife**

**3 de janeiro de 2017**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**CÓPULAS PARA COMBINAÇÃO DE MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Doutora.

**Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada.**

**Orientador: Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira**  
**Coorientador: Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino**

**Recife**

**3 de janeiro de 2017**

---

Thaíze Fernandes Oliveira de Assis  
CÓPULAS PARA COMBINAÇÃO DE MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS/  
Thaíze Fernandes Oliveira de Assis. – Recife, 3 de janeiro de 2017-  
105 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira

– UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLI-  
CADA, 3 de janeiro de 2017.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III.  
Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**CÓPULAS PARA COMBINAÇÃO DE MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

Thaíze Fernandes Oliveira de Assis

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutora em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 29/06/2016 pela Banca Examinadora.

Orientador:

---

**Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola  
Ferreira**

Universidade Federal Rural de Pernambuco

Coorientador:

---

**Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino**  
Universidade Federal do Cariri

Banca examinadora:

---

**Prof. Dr. Adriano Lorena Inácio de  
Oliveira**  
Universidade Federal de Pernambuco

---

**Prof. Dr. Manoel Wallace Alves  
Ramos**  
Instituto Federal da Paraíba

---

**Prof. Dr. Paulo Salgado Gomes de  
Mattos Neto**  
Universidade Federal de Pernambuco

---

**Prof. Dr. Ronaldo Venâncio da Silva**  
Colégio Militar do Recife - Ministério da  
Defesa

# Agradecimentos

A Deus Pai, Filho e Espírito Santo por todas as graças derramadas em minha vida. E a Nossa Senhora pela sua intercessão e proteção de mãe. Obrigada Senhor pela força e inspiração nos momentos de assumir com responsabilidade, competência e amor a missão a mim confiada.

Aos meus pais, José Nilson de Oliveira e Tânia Maria Fernandes Oliveira, pela vida, exemplo de educação, trabalho e amor.

Ao meu esposo, Emerson Souza de Assis, por está sempre presente na minha vida, apoiando e incentivando esta jornada acadêmica. Ao nosso filho, Davi Fernandes Oliveira de Assis, que com sua alegria e amor renova minhas energias.

Aos meus irmãos, Bruno Fernandes Oliveira e Victor Hugo Fernandes Oliveira e cunhadas, Luanda e Rânica, que com muito amor estão sempre acompanhando meus passos.

Aos meus familiares (materno e paterno) que me apoiaram, direta ou indiretamente, nessa caminhada. Bem como, aos meus sogros, Fernando Artur e Vera Lúcia, cunhados, Ewerton e Éder, cunhadas, Chris e Karla, e demais familiares. E amigos presentes na nossa família pela torcida na conquista desta realização pessoal e profissional.

A meus orientadores Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira e Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino; vocês são exemplos de competência, dedicação e amor à Profissão Docente. Agradeço por todo aprendizado, companheirismo e amizade.

Aos amigos do doutorado e mestrado que ingressaram em 2012 no Programa de Pós-graduação em Biometria e Estatística Aplicada/UFRPE. Em especial a Samuel, Lêda, Alessandro, Evelyn e Diego. Neste programa de pós-graduação eu construí uma família, tenho todos os meus amigos como irmãos. Ao amigo-irmão-científico Rivardo Tavares. Não deixando de lembrar de todos os amigos que convivi ao longo dos anos em que morei em Recife, Rosilda, Hérica, Rodrigo, Carlão, Francisca, Pedro, Rivelino, Ricardo José, Djalma, Neilson, Edneide, Luiz Henrique, André Luiz e Fernando Henrique. Também aos amigos pernambucanos Ângelo e Marcela, que sempre estiveram presentes nessa caminhada.

Ao programa de Pós-graduação em Biometria e Estatística Aplicada (PPGBEA) da Universidade Federal Rural de Pernambuco representado pelos professores Dr. Borko Stosic, Dra Tatijana Stosic e Dr. Paulo José Duarte Neto. Como também ao secretário

Marco Antônio Gomes dos Santos por toda ajuda.

A todos os professores do PPGBEA que tive a honra de ser aluna.

Aos professores da banca examinadora pela disponibilidade e sugestões para melhoria deste trabalho.

À CAPES(Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior) por ter investido na minha formação.

Ao Departamento Estadual de Trânsito (DETRAN) do Rio Grande do Norte, órgão que trabalho, pelo apoio e incentivo durante a fase de conclusão deste trabalho. Em especial, a Janadir, Emanuela, Antonino, Branca e Karina.

E a todas as pessoas que apesar de não ter citado os nomes, contribuíram direta ou indiretamente no decorrer deste trabalho.

**Meus sinceros agradecimentos.**

# Resumo

Previsões combinadas de séries temporais têm mostrado resultados superiores aos modelos individuais tanto em termos de acurácia quanto de eficiência. Uma das alternativas de agregação bastante adotadas são as combinações lineares, que contemplam métodos como a média simples (SA do inglês *Simple Average*) e a média ponderada, resultante do método de mínima variância, aqui nomeado de Modelo Clássico (MC), devido a coincidir com o estimador de máxima verossimilhança sob a suposição de que os erros dos modelos individuais seguem uma distribuição normal multivariada. Desta maneira, tem sido usual supor a normalidade dos erros dos modelos individuais. Contudo, a suposição inadequada de normalidade pode resultar em estimadores viesados e, assim, estimativas equivocadas do modelo agregado. A presente tese propõe um método para obter preditores de máxima verossimilhança voltados à agregação de modelos de previsão de séries temporais por meio de cópulas, onde os erros desses modelos individuais podem não ser normalmente distribuídos. Os modelos via cópulas são funções multivariadas que operam na distribuição de probabilidade marginal, permitindo modelar os resíduos de previsão e, em seguida, a estrutura de dependência entre estes preditores. A utilidade do modelo combinado proposto mediante as cópulas Frank e Gumbel é ilustrada por meio do estudo de oito fenômenos do mundo real: três séries de crescimento de peixes (espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*), quatro séries financeiras (Nasdaq (ND), Google (GG), S&P500 (SP) e Dow Jones (DJ)) e uma série de precipitação. Para as séries de crescimento de peixes, os seguintes modelos individuais foram agregados: VBGM (*Von Bertalanffy Growth Model*), Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards. Em relação às séries financeiras ND, GG, SP e DJ, os modelos individuais para cada caso são: ANN (*Artificial Neural Network*), TAEF (*Time-delay Added Evolutionary Forecasting*) e ARIMA (Auto-regressivo integrado de média móvel). E para a série de precipitação, são envolvidos nove modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*). O desempenho do modelo combinado proposto é destacado pela comparação com os modelos individuais e combinados SA e MC, através do Erro Quadrático Médio (EQM). Neste sentido, observa-se claramente a utilidade do estimador combinado proposto via cópulas Frank e Gumbel. Estes estimadores combinados apresentam-se ainda com mais destaque quando se trata do caso em que pelo menos uma das distribuições marginais dos erros dos modelos individuais não seguem uma distribuição normal. Discussões sobre o melhor desempenho destas cópulas em combinar determinados modelos, em detrimento de todos aqueles disponíveis, são também apresentadas.

**Palavras-chaves:** Combinação não-linear de previsões; estimador baseado em cópula; previsões de máxima verossimilhança.



# Abstract

Time series combined forecasts have shown better results than individual models in terms of both accuracy as efficiency. Alternatives of aggregation well adopted are linear combination, which include methods such as the simple average and the weighted average resultant method of minimum variance here named Classic Model (CM) due to coincide with the maximum likelihood estimator under the assumption that the errors of the individual models follow a multivariate normal distribution. Thus, it has been usual to assume the normality of the errors of the individual models. However, improper assumption of normality may result in biased estimators and thus misleading estimates of the aggregated model. This thesis proposes a method for maximum likelihood predictors focused on aggregating time series forecasting models through copulas, where the errors of these individual models can not be normally distributed. The models via copulas are multivariate functions that operate on the marginal probability distribution, allowing the modeling of the prediction errors, and after, the dependency structure between these predictors. The usefulness of the proposed combined model via copula Frank and Gumbel is illustrated by study eight phenomena of the real world: three fish growth series (yellow tuna, striped seabream and bigeye tuna species), four financial series (Nasdaq (ND), Google (GG), S&P500 (SP) and Dow Jones (DJ) and one time series of precipitation. For fish growth series, the following individual models were considered: VBGM (Von Bertalanffy Growth Model), Gompertz, logistic, generalized VBGM and Schnute-Richards. Regarding financial ND series, GG, SP and DJ, the individual models for each case are: ANN (Artificial Neural Network) TAEF (Time-delay Added Evolutionary Forecasting) and ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average). And for the series of precipitation, nine GARCH (Generalized Autoregressive Conditional heteroscedasticity) are involved. The performance of the proposed combined model is highlighted by means of a comparison with the individual and combined models SA and MC through the Mean Squared Error (MSE). In this sense, it can clearly be seen the usefulness of the combined estimator proposed via Frank and Gumbel copulas. These combined estimators achieve better results when at least one marginal distribution of errors of individual models not follow a normal distribution. Discussions about the best performance of these copulas in combining determined models, to the detriment of all those available, are also presented.

**Key-words:** Copula-based estimator; non-linear combination of forecasts; maximum likelihood forecasts.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Rede MLP de três camadas totalmente conectada. . . . .	11
Figura 2 – Arquitetura proposta para previsão combinada via cópula. A etapa de Modelagem Individual corresponde à usual elaboração dos modelos de previsão. A Modelagem dos Erros é a fase na qual a função de distribuição acumulada marginal (FDA) dos erros é inferida. A Modelagem Combinada é dedicada a obter a distribuição de probabilidades conjunta dos erros, permitindo a previsão combinada pelo Método de Máxima Verossimilhança. . . . .	22
Figura 3 – Representação gráfica da abordagem proposta via cópula. . . . .	28
Figura 4 – Representação gráfica da função <i>CombiningForecasts</i> utilizada para combinar os modelos individuais. . . . .	29
Figura 5 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série de crescimento de peixes da espécie <i>yellow tuna</i> . . . . .	43
Figura 6 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série de crescimento de peixes da espécie <i>striped seabream</i> . . . . .	44
Figura 7 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série de crescimento de peixes da espécie <i>bigeye tuna</i> . . . . .	45
Figura 8 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série ND. . . . .	54
Figura 9 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série GG. . . . .	55
Figura 10 – Ajuste do modelo VBGM referente a espécie <i>yellow tuna</i> . . . . .	71
Figura 11 – Ajuste do modelo Gompertz referente a espécie <i>yellow tuna</i> . . . . .	72
Figura 12 – Ajuste do modelo logístico referente a espécie <i>yellow tuna</i> . . . . .	72
Figura 13 – Ajuste do modelo VBGM generalizado referente a espécie <i>yellow tuna</i> . . . . .	73
Figura 14 – Ajuste do modelo Schnute-Richards referente a espécie <i>yellow tuna</i> . . . . .	73
Figura 15 – Ajuste do modelo VBGM referente a espécie <i>striped seabream</i> . . . . .	74
Figura 16 – Ajuste do modelo Gompertz referente a espécie <i>striped seabream</i> . . . . .	74
Figura 17 – Ajuste do modelo logístico referente a espécie <i>striped seabream</i> . . . . .	75
Figura 18 – Ajuste do modelo VBGM generalizado referente a espécie <i>striped seabream</i> . . . . .	75
Figura 19 – Ajuste do modelo Schnute-Richards referente a espécie <i>striped seabream</i> . . . . .	76
Figura 20 – Ajuste do modelo VBGM referente a espécie <i>bigeye tuna</i> . . . . .	76
Figura 21 – Ajuste do modelo Gompertz referente a espécie <i>bigeye tuna</i> . . . . .	77
Figura 22 – Ajuste do modelo logístico referente a espécie <i>bigeye tuna</i> . . . . .	77

Figura 23 – Ajuste do modelo VBGM generalizado referente a espécie bigeye tuna. . . . .	78
Figura 24 – Ajuste do modelo Schnute-Richards referente a espécie bigeye tuna. . . . .	78
Figura 25 – Resíduos do modelo VBGM para a espécie yellow tuna. . . . .	84
Figura 26 – Resíduos do modelo Gompertz para a espécie yellow tuna. . . . .	85
Figura 27 – Resíduos do modelo logístico para a espécie yellow tuna. . . . .	85
Figura 28 – Resíduos do modelo VBGM generalizado para a espécie yellow tuna. . . . .	86
Figura 29 – Resíduos do modelo Schnute-Richards para a espécie yellow tuna. . . . .	86
Figura 30 – Resíduos do modelo VBGM para a espécie striped seabream. . . . .	87
Figura 31 – Resíduos do modelo Gompertz para a espécie striped seabream. . . . .	87
Figura 32 – Resíduos do modelo logístico para a espécie striped seabream. . . . .	88
Figura 33 – Resíduos do modelo VBGM generalizado para a espécie striped seabream. . . . .	88
Figura 34 – Resíduos do modelo Schnute-Richards para a espécie striped seabream. . . . .	89
Figura 35 – Resíduos do modelo VBGM para a espécie bigeye tuna. . . . .	89
Figura 36 – Resíduos do modelo Gompertz para a espécie bigeye tuna. . . . .	90
Figura 37 – Resíduos do modelo logístico para a espécie bigeye tuna. . . . .	90
Figura 38 – Resíduos do modelo VBGM generalizado para a espécie bigeye tuna. . . . .	91
Figura 39 – Resíduos do modelo Schnute-Richards para a espécie bigeye tuna. . . . .	91
Figura 40 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal ND. . . . .	92
Figura 41 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal ND. . . . .	92
Figura 42 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal ND. . . . .	93
Figura 43 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal GG. . . . .	93
Figura 44 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal GG. . . . .	94
Figura 45 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal GG. . . . .	94
Figura 46 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal SP. . . . .	95
Figura 47 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal SP. . . . .	95
Figura 48 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal SP. . . . .	96
Figura 49 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal DJ. . . . .	96
Figura 50 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal DJ. . . . .	97
Figura 51 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal DJ. . . . .	97
Figura 52 – Resíduos do modelo garch11 para a série de precipitação. . . . .	98
Figura 53 – Resíduos do modelo garch12 para a série de precipitação. . . . .	98
Figura 54 – Resíduos do modelo garch13 para a série de precipitação. . . . .	99
Figura 55 – Resíduos do modelo garch21 para a série de precipitação. . . . .	99
Figura 56 – Resíduos do modelo garch22 para a série de precipitação. . . . .	100
Figura 57 – Resíduos do modelo garch23 para a série de precipitação. . . . .	100
Figura 58 – Resíduos do modelo garch31 para a série de precipitação. . . . .	101
Figura 59 – Resíduos do modelo garch32 para a série de precipitação. . . . .	101

Figura 60 – Resíduos do modelo garch33 para a série de precipitação. . . . . 102

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Ilustração do processo de transformação da instância $\mathbf{x}_{t,i}$ em $\mathbf{e}_{t,i}$ , via erros aditivos. . . . .	23
Tabela 2 – Propriedades das séries temporais referentes as espécies yellow tuna, striped seabream e bigeye tuna. . . . .	35
Tabela 3 – Estatísticas descritivas dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para as espécies <i>yellow tuna</i> , <i>striped seabream</i> e <i>bigeye tuna</i> . . . . .	37
Tabela 4 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards e os respectivos p-valor do teste de hipótese para espécie <i>yellow tuna</i> . . . . .	38
Tabela 5 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards e os respectivos p-valor do teste de hipótese para a espécie <i>striped seabream</i> . . . . .	38
Tabela 6 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards e os respectivos p-valor do teste de hipótese para a espécie <i>bigeye tuna</i> . . . . .	39
Tabela 7 – p-valor dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, com relação aos modelos individuais sob estudo - Espécies <i>yellow tuna</i> , <i>striped seabream</i> e <i>bigeye tuna</i> . . . . .	40
Tabela 8 – EQM dos modelos individuais e combinados referentes as espécies <i>yellow tuna</i> , <i>striped seabream</i> e <i>bigeye tuna</i> . Para a espécie <i>yellow tuna</i> , os modelos individuais logístico e Schnute Richards compõem estes estimadores; para a espécie <i>striped seabream</i> são os modelos Gompertz e logístico; e para a espécie <i>bigeye tuna</i> os modelos Gompertz e VBGM Generalizado. . . . .	41
Tabela 9 – Medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank para as espécies <i>yellow tuna</i> , <i>striped seabream</i> e <i>bigeye tuna</i> . Para a espécie <i>yellow tuna</i> , os modelos individuais logístico e Schnute Richards compõem estes estimadores; para a espécie <i>striped seabream</i> são os modelos Gompertz e logístico; e para a espécie <i>bigeye tuna</i> os modelos Gompertz e VBGM Generalizado. . . . .	41

Tabela 10 – Pesos dos modelos individuais para cópula normal (MC) - Espécies <i>yellow tuna</i> , <i>striped seabream</i> e <i>bigeye tuna</i> . . . . .	42
Tabela 11 – Propriedades básicas das séries temporais reais (ND, GG, SP, DJ) para estudos do modelo combinado proposto. . . . .	46
Tabela 12 – Estatísticas descritivas dos resíduos dos modelos individuais (nomeia-se: 1-ANN, 2-TAEF e 3-ARIMA) para cada série temporal sob estudo (ND, GG, SP e DJ) . . . . .	47
Tabela 13 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA para cada série temporal sob estudo . . . . .	48
Tabela 14 – <i>p-valor</i> dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para checar a normalidade dos modelos ANN e ARIMA (erros aditivos) e a log-normalidade do modelo TAEF (erro multiplicativo) e t-Student para verificação de viés dos modelos ANN, ARIMA e TAEF, com relação a série temporal ND. . . . .	49
Tabela 15 – <i>p-valor</i> dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA em relação a série GG. . . . .	49
Tabela 16 – <i>p-valor</i> dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA em relação a série SP. . . . .	49
Tabela 17 – <i>p-valor</i> dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA em relação a série DJ. . . . .	50
Tabela 18 – EQM dos modelos individuais e combinados em relação as séries temporais ND, GG, SP e DJ. Os modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA compõem os estimadores combinados. . . . .	50
Tabela 19 – Medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank de acordo com o fenômeno sob estudo . . . . .	51
Tabela 20 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico em relação as séries ND, GG, SP e DJ . . . . .	51
Tabela 21 – EQM dos modelos individuais (ANN, TAEF e ARIMA) e combinados (cópulas MC, Frank e Gumbel) em relação às séries temporais ND, GG, SP e DJ. Para as séries temporais ND e SP, os modelos individuais ANN e TAEF compõem esses estimadores; e para as séries temporais GG e DJ são os modelos individuais TAEF e ARIMA. . . . .	52

Tabela 22 – Medida de dependência da cópula Frank e da cópula Gumbel. Para as séries temporais ND e SP, os modelos individuais ANN e TAEF compõem esses estimadores combinados; e para as séries temporais GG e DJ são os modelos individuais TAEF e ARIMA. . . . .	53
Tabela 23 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico (MC). Para as séries temporais ND e SP, os modelos individuais ANN e TAEF compõem o MC; e para as séries temporais GG e DJ são os modelos individuais TAEF e ARIMA. . . . .	53
Tabela 24 – Propriedades da série temporal real para estudo do modelo combinado proposto. . . . .	56
Tabela 25 – Estatísticas descritivas dos resíduos dos modelos individuais. . . . .	56
Tabela 26 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais e os respectivos p-valor do teste de hipótese. . . . .	57
Tabela 27 – p-valor dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, com relação aos modelos individuais sob estudo. . . . .	58
Tabela 28 – EQM dos modelos individuais e combinados. Os modelos garch11, garch21 e garch31 compõem os estimadores combinados. . . . .	58
Tabela 29 – Medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank. Os modelos garch11, garch21 e garch31 compõem os estimadores combinados. . . . .	59
Tabela 30 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico (MC). Os modelos garch11, garch21 e garch31 compõem o MC . . . . .	59
Tabela 31 – EQM dos modelos combinados e medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank. Os 9 modelos GARCH compõem os estimadores combinados. . . . .	60
Tabela 32 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico (MC). Os 9 modelos GARCH compõem o MC . . . . .	60
Tabela 33 – Coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$ Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie yellow tuna. . . . .	79
Tabela 34 – Coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$ Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie striped seabream. . . . .	80

Tabela 35 – Coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$ Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie bigeye tuna. . . . .	80
Tabela 36 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie yellow tuna. . . . .	81
Tabela 37 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie striped seabream. . . . .	81
Tabela 38 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie bigeye tuna. . . . .	81
Tabela 39 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal ND. . . . .	82
Tabela 40 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal GG. . . . .	82
Tabela 41 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal SP. . . . .	82
Tabela 42 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal DJ. . . . .	82
Tabela 43 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais garch11, garch12, garch13, garch21, garch22, garch23, garch31, garch32 e garch33 referente a série de precipitação. . . . .	83
Tabela 44 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal ND. . . .	103
Tabela 45 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal GG. . . .	103
Tabela 46 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal SP. . . .	103
Tabela 47 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA para série temporal DJ e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal DJ. . . . .	104



# Lista de abreviaturas e siglas

ANN	<i>Artificial Neural Network</i> - Rede Neural Artificial
AR( $p$ )	<i>Autoregressive</i> - Modelo auto-regressivo de ordem $p$
ARMA( $p, q$ )	<i>Autoregressive Moving Average</i> - Modelo auto-regressivo de médias móveis de ordem $p$ e $q$
ARIMA( $p, d, q$ )	<i>Autoregressive Integrated Moving Average</i> - Modelo auto-regressivo integrado de médias móveis de ordem $p$ , $d$ e $q$
CV	Coefficiente de Variação
DE	Distribuição dos erros
EQM	Erro Quadrático Médio
EST.DESCR	Estatísticas Descritivas
FDA	Função de Distribuição Acumulada Marginal
GARCH( $p, q$ )	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity</i> - Modelo auto-regressivo condicional heterocedástico generalizado
gl	Graus de liberdade
IFM	<i>Inference for marginals</i> - Inferência para marginais
iid	Independentes e identicamente distribuídos
KS	Kolmogorov- Smirnov
MA( $q$ )	<i>Moving Average</i> - Modelo de Médias Móveis de ordem $q$
Máx	Máximo
MC	Modelo Clássico
Med	Mediana
Mín	Mínimo

MLP	<i>Multilayer Perceptron</i> - Perceptron Multi-Camadas
n.s	Nível de significância
Q1	1º Quartil
Q3	3º Quartil
$R^2 Aj.$	Coefficiente de determinação ajustado
RNAs	Redes Neurais Artificiais
SA	<i>Simple Average</i>
TAEF	<i>Time-delay Added Evolutionary Forecasting</i> - Previsão com adição evolutiva de retardos temporais
VBGM	<i>Von Bertalanffy Growth Model</i>

# Lista de símbolos

$C(\cdot)$	Função cópula
$c(\cdot)$	Função densidade de cópula
$v_i$	Valor da distribuição marginal univariada ou distribuição acumulada marginal de uma variável aleatória qualquer (ou preditor) em um ponto específico $x_i$ .
$\mathbf{E}_t$	Vetor de erros dos modelos no instante $t$ em relação a $u_t$
$\mathbf{e}_t$	Vetor de erros observados no instante $t$ em relação a $u_t$
$E_{t,i}$	Erro aleatório do $i$ -ésimo preditor no instante $t$ em relação a $u_t$
$e_{t,i}$	Erro observado do $i$ -ésimo preditor no instante $t$ em relação a $u_t$
$\mathbf{X}_t$	Vetor de $k$ preditores (ou modelos) para $u_t$
$X_{t,i}$	$i$ -ésimo preditor de $u_t$
$\mathbf{x}_t$	Vetor das estimativas dos preditores no instante $t$
$x_{t,i}$	Estimativa do $i$ -ésimo preditor para $u_t$
$p_{X_{t,i}}(x_{t,i})$	Função de densidade de probabilidade marginal de $X_{t,i}$
$p_{E_{t,i}}(e_{t,i})$	Função densidade de probabilidade marginal de $E_{t,i}$
$F_{X_{t,i}}(x_{t,i})$	Distribuição acumulada marginal de $X_{t,i}$
$F_{E_{t,i}}(e_{t,i})$	Distribuição acumulada marginal de $E_{t,i}$
$\mu$	Média
$\bar{x}$	Média amostral
$\sigma$	Desvio-padrão
$s$	Desvio-padrão amostral
$\sigma^2$	Variância

$\Upsilon$	Covariância
$E(\cdot)$	Função média
$V(\cdot)$	Função variância
$\gamma$	Vetor de parâmetros da cópula
$\theta$	Vetor de parâmetros da cópula Gumbel-Hougaard
$\zeta$	Vetor de parâmetros da cópula Frank
$\beta$	Vetor de parâmetros da cópula Normal
$\rho$	Matriz de correlações de Pearson
$\rho_{X_i, X_j}$	Valores do coeficiente de correlação de Pearson para as variáveis $X_i$ e $X_j$
$\alpha$	Nível de significância
$U_t$	Série temporal
$u_t$	Valor da série temporal sob estudo no instante $t$
$\hat{u}_t$	Estimativa do estimador combinado para $u_t$
$\hat{U}_t$	Estimador combinado para $u_t$
$n$	Quantidade de observações da série temporal para ajuste
$m$	Quantidade de observações da série temporal para previsão
$k$	Quantidade de modelos
$\omega_i$	Peso do $i$ -ésimo modelo individual via distribuição normal multivariada
$\Phi(B)$	Operador de auto-regressivo estacionário
$\phi_i$	Coefficientes auto-regressivos
$\Psi(B)$	Operador de médias-móveis estacionário
$\psi_i$	Coefficientes médias-móveis
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números reais
$\alpha_i$	Vetor de parâmetros das distribuições marginais univariadas

$\varepsilon_t$	Ruído branco
$\delta, v, \vartheta$ e $p$	Parâmetros adimensionais
$h_t$	Variância condicional
$a_0, a_i$ e $b_i$	Parâmetros do modelo GARCH
$a_{l,i}$	$i$ -ésimo elemento da $l$ -ésima linha da matriz de covariância inversa
$k_1, k_2, k_4, k_5$ e $k_6$	Parâmetros de modelos individuais, designados por $k^*$
$L_\infty$	Comprimento assintótico
$\tau$	Parâmetro de inclinação da função
$t_0$	Idade teórica
$t_4$	Ponto de inflexão da curva sigmoidal

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos	3
1.1.1	Objetivo geral	3
1.1.2	Objetivos específicos	3
1.2	Questões de pesquisa	3
1.3	Estrutura da Tese	4
<b>2</b>	<b>Revisão da Literatura</b>	<b>5</b>
2.1	Séries temporais	5
2.1.1	Modelos Box & Jenkins	5
2.1.1.1	Modelos Auto-Regressivos de Ordem $p$	6
2.1.1.2	Modelos de Médias Móveis de Ordem $q$	7
2.1.1.3	Modelos Mistos: Auto-Regressivos de Médias Móveis	7
2.1.1.4	Modelos ARIMA	7
2.1.2	Modelos GARCH	8
2.1.3	Redes Neurais Artificiais	9
2.2	Modelos de crescimento de peixes em função da idade	11
2.2.1	Modelo VBGM	12
2.2.2	Modelo Gompertz	12
2.2.3	Modelo logístico	13
2.2.4	Modelo VBGM generalizado	13
2.2.5	Modelo Schnute-Richards	13
2.3	Combinações lineares: <i>Simple Average</i> (SA) e Modelo Clássico (MC)	14
2.4	Cópuas	15
2.4.1	Cópuas Arquimedianas	17
2.4.1.1	Cópula Gumbel	17
2.4.1.2	Cópula Frank	18
2.4.2	Cópuas Elípticas	19
2.4.2.1	Cópula Normal	19
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>21</b>
3.1	Abordagem proposta	21
3.1.1	Conceitos básicos	22
3.1.2	Cópula: combinação de modelos	24

3.1.3	Inferência dos parâmetros de cópulas . . . . .	25
3.1.3.1	Método de Máxima Verossimilhança . . . . .	25
3.1.3.2	Método IFM - <i>Inference for marginals</i> . . . . .	26
3.2	Representação gráfica do modelo combinado proposto . . . . .	26
3.3	Avaliação de desempenho do modelo . . . . .	30
3.4	Estatística Descritiva e Inferencial . . . . .	31
3.4.1	Coeficiente de Correlação . . . . .	31
3.4.2	Teste de Hipóteses . . . . .	32
3.4.2.1	Teste de Kolmogorov- Smirnov (KS) . . . . .	32
3.4.2.2	Teste t-Student para a média . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Resultados . . . . .</b>	<b>34</b>
4.1	Séries de crescimento de peixes em função da idade . . . . .	35
4.1.1	Descrição dos dados . . . . .	35
4.1.2	Resultados do experimento . . . . .	36
4.2	Séries financeiras: Nasdaq (ND), Google(GG), S&P500 (SP) e <i>Dow Jones</i> (DJ) . . . . .	46
4.2.1	Descrição dos dados . . . . .	46
4.2.2	Resultados do experimento . . . . .	47
4.3	Série de precipitação . . . . .	56
4.3.1	Descrição dos dados . . . . .	56
4.3.2	Resultados do experimento . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>61</b>
5.1	Questões de pesquisa . . . . .	63
5.2	Trabalhos futuros . . . . .	64
5.3	Trabalhos publicados . . . . .	64
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>70</b>
APÊNDICE A	Ajustes dos modelos: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards . . . . .	71
APÊNDICE B	O coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$ Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para cada espécie de peixe sob estudo (yellow tuna, striped seabream e bigeye tuna). . . . .	79

<b>APÊNDICE C</b>	<b>Estatísticas Descritivas</b>	<b>81</b>
<b>APÊNDICE D</b>	<b>Histogramas</b>	<b>84</b>
<b>APÊNDICE E</b>	<b>Correlações</b>	<b>103</b>
<b>APÊNDICE F</b>	<b>Covariância entre dois modelos (ou preditores)</b>	<b>105</b>



# 1 Introdução

Todos os fenômenos quando amostrados em intervalos regulares ao longo do tempo geram séries temporais. Existem muitas aplicações de séries temporais em vários ramos da ciência, como economia, engenharia, ciências sociais e biometria (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994). Devido à ordenação no tempo e usual natureza estocástica subjacente da série, a modelagem estatística tem sido fundamental para análise e previsão de determinados fenômenos (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014). Diversas técnicas são utilizadas para realizar a previsão de séries temporais, todas possuindo um erro de previsão. Assim, o desafio é construir um modelo que melhor se ajuste aos dados com o menor erro possível.

Atualmente existe uma grande quantidade de trabalhos dedicados ao estudo de novas alternativas de modelagem de séries temporais ou mesmo à comparação dentre estas alternativas (PATTON, 2012; CREAL; TSAY, 2015; WANG; YANG; HUANG, 2015; FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014). Neste sentido, tem sido comum direcionar recursos computacionais e teóricos para a identificação de melhores modelos (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014). Alternativamente a este movimento, podem-se citar os métodos voltados à incerteza de modelos. Como destacado por Chatfield (2000), boa parte da literatura voltada a séries temporais implicitamente assume que existe um único modelo intrínseco à série. Contudo, o autor enfatiza que mesmo considerando a existência de um único modelo, este será raramente conhecido *a priori* e não haverá qualquer garantia que ele seja selecionado como o melhor a se ajustar à série observada. Autores como Neuman (2003), Assis et al. (2013b) comentam inclusive que a adoção de um único modelo pode conduzir a vieses estatísticos e à subestimação da real incerteza subjacente à série temporal. De acordo com estes argumentos, a incerteza de modelos parece assumir um papel indispensável para a análise de séries temporais.

De fato, estudos sobre incerteza de modelos têm estado na vanguarda da modelagem de séries temporais (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014). Neste contexto, pesquisadores têm sido desafiados a combinar diversos modelos ajustados a uma mesma série com o intuito de promover previsões agregadas. Estatisticamente, estes estimadores agregados mostram-se superiores aos modelos individuais, tanto em termos de acurácia quanto de eficiência (AMENDOLA; STORTI, 2008; JEONG; KIM, 2009; WALLIS, 2011). Uma das alternativas de agregação bastante adotadas são as combinações lineares, expressas, por exemplo, pela *Simple Average* (SA) e pela média ponderada resultante do método

de mínima variância ([MENEZES; BUNN; TAYLOR, 2000](#)) nomeada neste trabalho de Modelo Clássico (MC), devido a coincidir com o estimador de máxima verossimilhança, quando se assume a distribuição normal multivariada para os erros de previsão ([FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014](#)). No modelo combinado SA o peso dos modelos individuais é constante, enquanto no MC o peso de cada modelo é função da sua eficiência e correlação com outros modelos individuais envolvidos. Dessa forma, o MC é essencialmente mais sofisticado que o SA. Revisões da literatura da área, tais como [Clemen \(1989\)](#), [Yu, Wang e Lai \(2005\)](#), [Firmino, Neto e Ferreira \(2014\)](#) e pesquisas correlatas, como [Dell'Aquila e Ronchetti \(2006\)](#), [Lux e Morales-Arias \(2010\)](#), dão suporte a este argumento.

Como mencionado acima, uma das principais alternativas para a estimação dos pesos nas combinações lineares a partir do MC são os ditos estimadores de mínima variância ([MENEZES; BUNN; TAYLOR, 2000](#)), que sob a suposição de normalidade dos erros dos modelos coincidem com os estimadores de máxima verossimilhança. Sob a suposição de normalidade dos erros não apenas a computação do peso de cada modelo torna-se atividade trivial, mas também a medida da dependência entre os modelos (através da matriz de correlações presente na distribuição normal multivariada). Contudo, a suposição inadequada de normalidade pode resultar em estimadores viesados e, desta forma, estimativas equivocadas do modelo agregado. De fato, mostra-se ainda como tema em desenvolvimento da área de incerteza de modelos de séries temporais o estudo de combinações não lineares baseadas em modelos cujos erros não são normalmente distribuídos.

A busca deste trabalho foi propor avanços no estado da arte de estudos sobre incerteza de modelos voltados a séries temporais, utilizando-se de estimadores de máxima verossimilhança associados à agregação de modelos ajustados a uma mesma série; modelos estes cujos erros eventualmente podem ou não ser normalmente distribuídos. Os modelos multivariados via cópula permitem ao pesquisador especificar as reais distribuições marginais para formar a distribuição conjunta, bem como, a real estrutura de dependência entre os preditores. Dessa forma, os modelos via cópulas podem ser não-lineares.

Modelos de cópulas são transformações que a partir de distribuições univariadas formam distribuições multivariadas que refletem as dependências entre as variáveis ([NELSEN, 2013](#); [SIMARD; RÉMILLARD et al., 2015](#)). A modelagem de séries temporais por meio de cópulas surge como uma alternativa para detectar a estrutura de dependência entre as variáveis (ou preditores). As principais razões que tornam o trabalho com cópulas interessante na estatística são estudar medidas de dependência independentes de escala e construção da distribuição conjunta. De fato, poder separar os efeitos de dependência dos efeitos das distribuições marginais, permite um maior grau de flexibilidade na estimação e

especificação do modelo, na qual considera-se a real distribuição marginal dos erros dos modelos individuais tornando assim, a utilização de cópulas bastante vantajosa na análise de muitos fenômenos.

O método proposto neste trabalho tem suas vantagens ilustradas a partir de fenômenos do mundo real que são abordados pela literatura de séries temporais.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo geral

Propor preditores de máxima verossimilhança voltados à agregação de modelos de previsão de séries temporais por meio de cópula, onde os erros desses modelos individuais podem não ser normalmente distribuídos, bem como sua estrutura de dependência.

### 1.1.2 Objetivos específicos

1. Utilizar modelos individuais pré-definidos ou elaborados, com base na literatura relacionada às séries temporais do mundo real, para compor o estimador combinado via cópula;
2. Apresentar formalismos de agregação de previsões de modelos de séries temporais, tais como as combinações lineares de mínima variância;
3. Apresentar o potencial de aplicação de cópulas para a obtenção de distribuições conjuntas que acoplem a dependência entre os modelos ajustados a uma mesma série;
4. Apresentar estimadores de máxima verossimilhança associados aos modelos resultantes do item 3;
5. Utilizar programas estatísticos e matemáticos para implementação da metodologia fundamentada nos itens 3 e 4;
6. Aplicar a ferramenta resultante dos itens 3, 4 e 5 em séries temporais do mundo real;
7. Analisar comparativamente os resultados obtidos no item 6 com aqueles provenientes de algumas das metodologias abordadas no item 2.

## 1.2 Questões de pesquisa

Neste trabalho são apresentados resultados que respondem às seguintes questões:

1. Em séries temporais do mundo real, a combinação de preditores através do formalismo de cópulas é capaz de apresentar previsões estatisticamente mais eficientes e acuradas em relação aos preditores individuais, MC e SA?

2. Existe vantagem em estudar a distribuição dos erros cometidos pelos modelos individuais e sua estrutura de dependência?

### 1.3 Estrutura da Tese

Esta tese está organizada da seguinte forma:

**Capítulo 2 – Revisão da Literatura:** este capítulo apresenta uma síntese da produção científica da área pesquisada.

**Capítulo 3 – Metodologia:** neste capítulo é proposta uma metodologia a ser aplicada ao problema de previsão de séries temporais via cópulas.

**Capítulo 4 – Resultados:** neste capítulo são mostradas séries temporais do mundo real utilizadas como casos de estudo para consolidar a abordagem proposta via cópula, com uma análise das suas possíveis limitações.

**Capítulo 5 – Conclusões:** neste capítulo são apresentadas as conclusões dos procedimentos, técnicas e experimentos realizados. Finalmente, propostas de novos trabalhos na área em estudo são exibidas.

## 2 Revisão da Literatura

### 2.1 Séries temporais

Uma série temporal é uma sequência de observações ordenadas ao longo do tempo (MORETTIN; TOLOI, 1981; BOX; JENKINS; REINSEL, 1994). Devido a esta ordenação no tempo e a sua usual natureza estocástica, a modelagem estatística de uma série temporal tem sido fundamental para análise e previsão de determinados fenômenos.

Uma série temporal pode ser definida como,

$$U_t = \{u_t \in \mathbb{R} | t = 1, 2, 3, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

onde  $t$  é o índice cronológico e  $n$  é o número total de observações da amostra observada.

#### 2.1.1 Modelos Box & Jenkins

Na literatura, é possível encontrar uma grande quantidade de modelos propostos para previsão de séries temporais, sendo na grande maioria modelos lineares. De forma prática, os modelos Box & Jenkins (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994) são os mais populares. Essa metodologia permite que valores futuros de uma série sejam previstos tomando por base apenas seus valores presentes e passados através de uma função linear.

Box & Jenkins (1994) propuseram uma família de modelos chamados ARIMA (do inglês *Autoregressive Integrated Moving Average*), a partir dos quais seleciona-se um modelo linear que melhor desempenhe a previsão de uma dada série temporal. O modelo ARIMA( $p, d, q$ ) é uma combinação de outros dois modelos, o AR( $p$ ) (*Autoregressive*) e o MA( $q$ ) (*Moving Average*), combinados com uma diferenciação de ordem  $d$  (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994).

Uma das suposições mais frequentes em relação a uma série temporal é a estacionaridade. Um série é dita estacionária se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante. No entanto, a maior parte das séries na prática apresentam alguma forma de não-estacionaridade. Por exemplo, as séries econômicas apresentam em geral tendências, sendo o caso mais simples aquele em que a série flutua ao redor de uma reta, com inclinação positiva ou negativa (tendência linear) (MORETTIN; TOLOI, 1981).

Os modelos ARIMA( $p, d, q$ ) utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, isto é, processos governados por séries probabilísticas. Uma classe importante dos processos estocásticos são os Processos Estacionários. Um modo de especificar um processo  $X_t$  seria determinar todos os seus momentos. Porém, o interesse são os momentos de baixa ordem, ou seja, os chamados processos estacionários de segunda ordem. Um processo estocástico é dito estacionário de segunda ordem quando as seguintes condições forem satisfeitas para qualquer instante de tempo  $t$  (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994):

$$E[X_t] = E[X_{t+k}] = \mu, \quad (2.2)$$

$$V[X_t] = E[(X_t - \mu)^2] = \sigma^2, \quad (2.3)$$

$$Cov[X_t, X_{t+k}] = E[(X_t - \mu) \cdot (X_{t+k} - \mu)] = \Upsilon, \quad (2.4)$$

em que,  $E[X_t]$ ,  $V[X_t]$  e  $Cov[X_t, X_{t+k}]$  são, respectivamente, as funções média, variância e covariância do processo, na qual  $\mu$ ,  $\sigma^2$  e  $\Upsilon$  são constantes para todo  $t$ .

#### 2.1.1.1 Modelos Auto-Regressivos de Ordem $p$

Um modelo auto-regressivo de ordem  $p$  (AR( $p$ )) é uma combinação linear de valores prévios do processo somada a um choque aleatório  $a_t$ , dada por

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + a_t, \quad (2.5)$$

na qual, foi subtraído o nível médio ( $\mu$ ) da série

$$\tilde{X}_t = X_t - \mu, \quad (2.6)$$

os termos  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) são os coeficientes auto-regressivos e  $a_t$  é chamado choque aleatório ou ruído branco (com média 0 e variância  $\sigma^2$ ).

O operador auto-regressivo estacionário de ordem  $p$  é definido por

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p, \quad (2.7)$$

onde,  $B$  é o operador de translação para o passado,

$$B^m X_t = X_{t-m}. \quad (2.8)$$

Dessa forma, a Equação 2.5 pode ser escrita como

$$\Phi(B)\tilde{X}_t = a_t, \quad (2.9)$$

em que a condição de estacionaridade é que  $|B| \leq 1$ .

#### 2.1.1.2 Modelos de Médias Móveis de Ordem $q$

Um modelo de médias-móveis de ordem  $q$  (MA( $q$ )) é uma combinação linear dos choques aleatórios ou ruídos brancos descrita por

$$\tilde{X}_t = a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \cdots - \psi_q a_{t-q}, \quad (2.10)$$

onde  $\psi_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) são os coeficientes médias-móveis, em que  $\tilde{X}_t = X_t - \mu$ .

O operador de médias móveis de ordem  $q$  é definido por

$$\Psi(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \cdots - \psi_q B^q, \quad (2.11)$$

em que  $B$  é o operador de translação para o passado dado por  $B^m X_t = X_{t-m}$ .

Dessa forma, a Equação 2.10 pode ser escrita como

$$\tilde{X}_t = \Psi(B)a_t. \quad (2.12)$$

#### 2.1.1.3 Modelos Mistos: Auto-Regressivos de Médias Móveis

Um modelo misto (ARMA( $p, q$ )) é uma combinação linear de termos auto-regressivos de médias móveis. Este modelo é representado por

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + a_t - \psi_1 a_{t-1} - \cdots - \psi_q a_{t-q}, \quad (2.13)$$

na qual  $\Phi(B)$  e  $\Psi(B)$  são os operadores auto-regressivos e de médias móveis introduzidos anteriormente. A Equação 2.13 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Phi(B)\tilde{X}_t = \Psi(B)a_t. \quad (2.14)$$

#### 2.1.1.4 Modelos ARIMA

Os modelos AR( $p$ ), MA( $q$ ) e ARMA( $p, q$ ) apresentados até o momento são apropriados para descrever séries estacionárias (ou seja, séries que se desenvolvem no tempo

ao redor de uma constante). Séries temporais que não são estacionárias, quando diferenciadas (diferenciação de ordem  $d$ ), podem se tornar estacionárias. Os modelos ARIMA são apropriados para séries não-estacionárias cujo comportamento não é explosivo, em particular, séries que apresentam alguma homogeneidade em seu comportamento não estacionário (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994). Portanto, a série pode ser estacionária, flutuando ao redor de um nível, por certo tempo, depois mudar de nível e flutuar ao redor de um novo nível e assim por diante, ou então mudar de inclinação. Logo, se faz necessário transformar os dados originais que não formam uma série estacionária. A transformação mais comum consiste em tomar diferenças sucessivas da série original até se obter uma série estacionária. Normalmente, é suficiente tomar uma ou duas diferenças para que a série se torne estacionária (MORETTIN; TOLOI, 1981). A primeira diferença de  $X(t)$  é definida por

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}. \quad (2.15)$$

De modo geral, a  $n$ -ésima diferença de  $X_t$  é

$$\Delta^n X_t = \Delta[\Delta^{n-1} X_t]. \quad (2.16)$$

Desta maneira, tomando-se um número finito de diferenças,  $d$ , a série  $X_t$  torna-se estacionária e é chamada “não estacionária homogênea”. Assim,

$$\Delta^n X_t = \Delta^d X_t. \quad (2.17)$$

Portanto, um modelo auto-regressivo, integrado e de médias móveis, ou simplesmente um modelo ARIMA( $p, d, q$ ), pode ser representado da seguinte forma:

$$\Phi(B)\Delta^d X_t = \Psi(B)a_t. \quad (2.18)$$

em que,  $p$  e  $q$  são as ordens de  $\Phi(B)$  e  $\Psi(B)$ , respectivamente, e  $d$  a ordem das diferenças.

### 2.1.2 Modelos GARCH

Os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), sugerido por Bollerslev (1986) é uma generalização de uma outra família de modelos, chamados modelos ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), apresentado por Engle (1982). Os GARCH permitem oferecer uma metodologia mais parcimoniosa em muitas situações (BOLLERSLEV, 1986).



O modelo GARCH  $(p, q)$  introduz na sua fórmula da variância condicional, regressores da variância condicional passada, possibilitando ao modelo ser mais flexível (GUIMARÃES, 2014). É um modelo não-linear heterocedástico de maneira a permitir que a variância condicional seja modelada como um processo autoregressivo de média móvel (ARMA) (GALDI; PEREIRA, 2007), sendo expresso pela equação

$$X_t = \varepsilon_t h_t^{\frac{1}{2}}, \quad (2.19)$$

em que  $\varepsilon_t$  é um ruído branco e  $h_t$  é a variância condicional expressa por

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i} \quad (2.20)$$

em que,  $a_0$ ,  $a_i$  e  $b_i$  são os parâmetros do modelo, com  $a_0 > 0$ ,  $a_i \geq 0$  e  $b_i \geq 0$ . A restrição de estacionaridade é  $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i < 1$ .

O processo mais simples, mas bastante útil é o GARCH(1,1), com a representação da variância condicional, onde o primeiro número se refere a defasagem dos termos autoregressivos e o segundo se refere ao número de defasagens no componente de média móvel do modelo (GALDI; PEREIRA, 2007), dada por

$$h_t = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1} \quad (2.21)$$

na qual,  $a_0 > 0$ ,  $a_1 \geq 0$  e  $b_1 \geq 0$ , sendo  $a_1 + b_1 < 1$ , suficiente para estacionaridade, ver Bollerslev (1986).

### 2.1.3 Redes Neurais Artificiais

Redes Neurais Artificiais (RNAs) são sistemas paralelos distribuídos, compostos por unidades de processamento simples (neurônios ou nodos) que calculam determinadas funções matemáticas, normalmente não-lineares. Tais unidades são dispostas em um arranjo espacial composto geralmente por uma ou mais camadas e interligadas por um grande número de conexões. Na maioria dos modelos estas conexões estão associadas a pesos, os quais armazenam a informação representada no modelo e servem para ponderar a entrada recebida por cada neurônio da rede. O funcionamento destas redes é inspirado no cérebro humano (BRAGA; LUDEMIR; CARVALHO, 2000).

Cada neurônio de uma RNA é condicionada a receber um sinal. Este sinal, ponderado pelos respectivos pesos das conexões de entrada do neurônio, é processado por uma função matemática, chamada de função de ativação ou função de transferência, produzindo um novo sinal de saída que é propagado pela rede. Dentre as diferentes formas que a

função de ativação pode assumir, a mais comum utilizada na construção de RNAs é a função sigmóide, definida como

$$f(x_t) = \frac{1}{1 + \exp(-\tau x_t)}, \quad (2.22)$$

em que  $\tau$  é o parâmetro de inclinação da função.

Em RNAs, o procedimento usual na solução de problemas passa inicialmente por uma fase de aprendizagem, em que um conjunto de exemplos é apresentado para a rede, a qual extrai automaticamente as características necessárias para representar a informação fornecida. Estas características são utilizadas posteriormente para dar respostas coerentes a dados não-conhecidos (BRAGA; LUDEMIR; CARVALHO, 2000).

No processo de aprendizado de uma RNA a tarefa principal é a determinação da intensidade das conexões entre os neurônios, sendo algoritmos de aprendizado utilizados para a adaptação destes parâmetros. Estes algoritmos têm a finalidade de realizar o ajuste dos pesos das conexões para a melhor generalização possível da informação contida nos exemplos expostos.

Muitos tipos de modelos de RNAs têm sido propostos, dentre as redes mais populares, as Redes *Multilayer Perceptron* (MLP) (HAYKIN, 2001) destacam-se pela praticidade, flexibilidade e eficiência, sendo aplicada a uma vasta gama de problemas (HAYKIN, 2001; BRAGA; LUDEMIR; CARVALHO, 2000).

As Redes Neurais MLP consistem tipicamente de um conjunto de unidades sensoriais (nós de fonte) que constituem a camada de entrada, uma ou mais camadas intermediárias, camadas escondidas ou camadas ocultas de nós computacionais e uma camada de saída de nós computacionais, onde as respostas finais do modelo são produzidas (HAYKIN, 2001). O sinal de entrada se propaga para frente através da rede, camada por camada. Se cada neurônio de uma determinada camada for conectado a todos os neurônios da próxima camada tem-se uma rede MLP totalmente conectada, ver Figura 1.

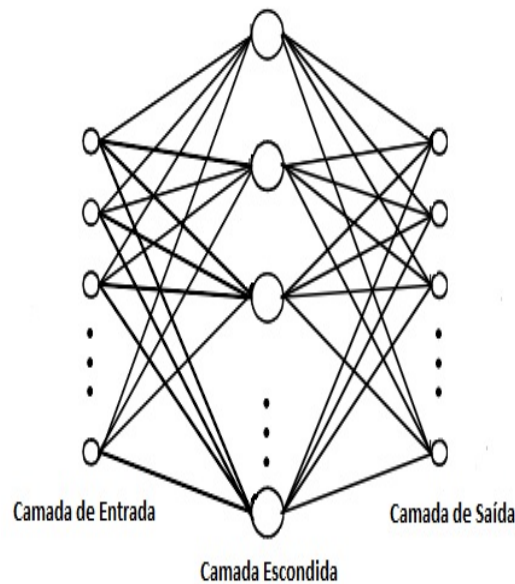


Figura 1 – Rede MLP de três camadas totalmente conectada.

Os MLP têm sido aplicados com sucesso para resolver diversos problemas difíceis, através do seu treinamento de forma supervisionada com um algoritmo muito popular conhecido de retropropagação de erro (*error back-propagation*). Este algoritmo é baseado na regra de aprendizagem por correção de erro (HAYKIN, 2001). Uma rede MLP é treinada de forma supervisionada, para cada padrão de entrada apresentado à rede é exibido um padrão de saída, forçando a rede a ajustar seus pesos de forma a conseguir realizar o mapeamento entre o padrão de entrada e o padrão de saída, através da minimização do erro entre a saída da rede e a resposta desejada (ou o padrão de saída).

Modelos não lineares baseados em RNAs para previsão de séries temporais têm produzido resultados convincentes nas últimas décadas (ZHANG; PATUWO; HU, 1998; ZHANG; PATUWO; HU, 2001; MORABITO; VERSACI, 2003; CORZO; SOLOMATINE, 2007; FERREIRA; VASCONCELOS; ADEODATO, 2008; HIPPERT; TAYLOR, 2010; NIU; SHI; WU, 2012). O principal desafio destes modelos tem sido ajustar seus atributos como conexão dos pesos, arquitetura (por exemplo, estrutura, função de transferência) e algoritmos de aprendizagem.

## 2.2 Modelos de crescimento de peixes em função da idade

A escolha de um modelo de crescimento depende de quais espécies estão sendo estudadas (GAMITO, 1998). Segundo Katsanevakis (2006), vários modelos têm sido

propostos para estimar o crescimento significativo dos peixes numa população, dentre eles, o mais comumente aplicado é o modelo de crescimento Von Bertalanffy (VBGM) (BERTALANFFY, 1938). Outras alternativas de modelos bastante utilizados são o VBGM generalizado (PAULY, 1979), o Gompertz (GOMPERTZ, 1825), o logístico (RICKER, 1975) e o Schnute-Richards (SCHNUTE; RICHARDS, 1990). Estes modelos de crescimento são necessários para o entendimento e a previsão do desenvolvimento de uma ou várias populações e a sua interação com o meio ambiente.

### 2.2.1 Modelo VBGM

O modelo von Bertalanffy (VBGM) tem sido, até o momento, o mais utilizado em biologia pesqueira para descrever o crescimento de quaisquer espécies aquáticas (RODRÍGUEZ-DOMÍNGUEZ et al., 2014). Segundo Aragón-Noriega (2014) vários autores relataram sobre a espécie Gulf corvina (*cynoscion othonopterus*) utilizando a VBGM; por esta razão, o autor abordou em seu estudo um multi-modelo para determinar os parâmetros de crescimento desta espécie. Esta abordagem foi utilizada também por Katsanevakis (2006).

O fundamento do VBGM é que a taxa de crescimento do indivíduos tende a diminuir linearmente com o tamanho. Este modelo tem sido usado para descrever o crescimento individual em diferentes populações de determinada espécie (PELÁEZ; SCARRY, 2013). A Equação 2.23 é expressa por

$$X_t = L_\infty(1 - e^{-k_1(t-t_0)}), \quad (2.23)$$

em que  $L_\infty$  é uma constante referente ao comprimento assintótico dos peixes,  $k$  a taxa de crescimento relativo e  $t_0$  a idade teórica quando o peixe teria comprimento zero.

### 2.2.2 Modelo Gompertz

De acordo com Gamito (1998), o modelo de crescimento Gompertz é antigo, mas tem sido aplicado com sucesso para peixes jovens. O modelo de crescimento Gompertz descreve uma curva sigmoideal assimétrica (PELÁEZ; SCARRY, 2013). Este modelo apresenta propriedades desejáveis para curvas de crescimento, pois ao contrário de outras funções, a massa corporal inicial é sempre superior a zero, o que reflete no fato do animal nascer com algum peso (FIALHO, 1999). A Equação 2.24 é dada por

$$X_t = L_\infty \exp\left(-\left(\frac{1}{k_4}\right)e^{-k_4(t-t_3)}\right), \quad (2.24)$$

em que  $t_3 = \frac{1}{k_4} \ln \lambda$ . Sendo,  $L_\infty$  uma constante referente ao comprimento assintótico dos peixes,  $k_4$  a taxa decrescente exponencial da taxa de crescimento relativo com a idade e  $\lambda$  a teórica taxa de crescimento relativo inicial na idade zero.

### 2.2.3 Modelo logístico

O modelo logístico pode ser útil para o estudo do crescimento médio de peixes e também para descrever tamanho de populações de peixes (GAMITO, 1998). É expresso pela seguinte Equação

$$X_t = L_\infty(1 + e^{-k_5(t-t_4)})^{-1}, \quad (2.25)$$

em que,  $L_\infty$  é uma constante referente ao comprimento assintótico dos peixes,  $k_5$  a taxa de crescimento relativo e  $t_4$  corresponde ao ponto de inflexão da curva sigmoideal.

### 2.2.4 Modelo VBGM generalizado

O modelo VBGM generalizado é uma extensão do modelo VBGM, na qual incorpora um parâmetro adicional ( $p$ ), proporcionando grande flexibilidade no ajuste dos dados para a curva (KATSANEVAKIS, 2006). Podemos observar a Equação 2.26 a seguir

$$X_t = L_\infty(1 - e^{-k_2(t-t_1)})^p, \quad (2.26)$$

na qual,  $L_\infty$ ,  $k_2$  e  $t_1$  tem similar interpretação com o VBGM, e o  $p$  é um parâmetro adimensional.

### 2.2.5 Modelo Schnute-Richards

O modelo Schnute-Richards permite uma grande flexibilidade da curva de crescimento podendo assumir diferentes configurações. Este modelo fornece uma abordagem abrangente para a modelagem de crescimento de peixes, na qual todos os modelos acima mencionados são casos especiais do modelo Schnute-Richards com valores adequadamente selecionados para seus parâmetros adimensionais (KATSANEVAKIS, 2006). A Equação 2.27 é expressa por

$$X_t = L_\infty(1 + \delta e^{-k_6 t^v})^{1/\vartheta}, \quad (2.27)$$

em que,  $L_\infty$  é uma constante referente ao comprimento assintótico dos peixes e os parâmetros  $\delta$ ,  $v$  e  $\vartheta$  são adimensionais.

## 2.3 Combinações lineares: *Simple Average* (SA) e Modelo Clássico (MC)

Revisões de literatura sobre incerteza de modelos (CLEMEN, 1999; JEONG; KIM, 2009; WALLIS, 2011) para predição de uma determinada série temporal tem enfatizado o uso de preditores combinados, sendo em sua maioria caracterizadas como combinação linear de modelos individuais. Nesta área, o *simple average* (SA) e o modelo clássico (MC) são abordados. A técnica SA é uma combinação linear essencialmente menos sofisticada que o MC, pois consiste em uma média simples dos modelos individuais onde os pesos de cada modelo são constantes, sendo expressa por

$$\hat{u}_t = \frac{\sum_{i=1}^k x_{t,i}}{k}, \quad (2.28)$$

em que  $\hat{u}_t$  é a estimativa agregada para a série sob estudo no instante  $t$ ,  $k$  é a quantidade de modelos,  $\frac{1}{k}$  o peso de cada modelo individual e  $x_{t,i}$  é o valor estimado do  $i$ -ésimo modelo no instante  $t$ .

O modelo clássico (como nomeado neste trabalho) é uma combinação linear exibida por uma média ponderada, em que os pesos de cada modelo individual é função da variância de seus resíduos e sua correlação com os outros modelos. Este estimador combinado é talvez a maneira mais simples e eficaz de combinar modelos em muitos casos no qual os erros dos modelos individuais utilizados na sua composição seguem uma distribuição normal (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014; MENEZES; BUNN; TAYLOR, 2000; LUX; MORALES-ARIAS, 2010).

Uma das principais alternativas para a estimação dos pesos do MC são os ditos estimadores de mínima variância (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014; MENEZES; BUNN; TAYLOR, 2000), que sob a suposição de normalidade multivariada dos erros dos modelos individuais coincidem com os estimadores de máxima verossimilhança. Sob a suposição de normalidade dos erros não apenas a computação do peso de cada modelo individual torna-se uma atividade trivial, mas também a medida da dependência entre os modelos (através da matriz de correlação presente na distribuição normal multivariada). Para uma dada série temporal ( $u_t$ ), a estimativa agregada ( $\hat{u}_t$ ) de mínima variância para  $k$  modelos individuais cujos erros são supostos seguirem uma distribuição normal, é algo tal como a seguir

$$\hat{u}_t = \sum_{i=1}^k \omega_i \cdot x_{t,i}, \quad (2.29)$$

sendo  $\omega_i$  o peso para o  $i$ -ésimo modelo, tal que,  $\sum_{i=1}^k \omega_i = 1$ , e  $x_{t,i}$  é o valor estimado do  $i$ -ésimo modelo no instante  $t$ . Desta maneira, o peso do  $i$ -ésimo modelo é obtido pela fórmula

$$\omega_i = \frac{\sum_{l=1}^k a_{l,i}}{\sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^k a_{l,i}}$$

onde,  $a_{l,i}$  é o  $i$ -ésimo elemento da  $l$ -ésima linha da matriz de covariância inversa.

Por exemplo, diante da estimativa de dois modelos individuais ( $X_1$  e  $X_2$ ) tem-se os pesos dos respectivos modelos (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014):

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

e

$$\omega_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}},$$

em que  $\sigma_i^2$  é a variância do erro do modelo  $X_i$  e  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre os erros de  $X_i$  e  $X_j$ .

Contudo, a suposição de normalidade inadequada pode resultar em estimadores viesados e, desta forma, estimativas equivocadas do MC. Assim, o estudo de preditores combinados baseadas em modelos cujos erros não são normalmente distribuídos é um tema em desenvolvimento da área de incerteza de modelos de séries temporais. Atualmente, pesquisadores estão interessados em se aprofundar na literatura de cópulas tais como, (NELSEN, 2013; JOE, 1997; YAN et al., 2007; PATTON, 2012), entre outras. Com cópulas o pesquisador pode se aprofundar em uma gama de pesquisas sobre modelagem de distribuições univariadas e posteriormente obter o estimador combinado a partir das reais distribuições marginais utilizadas no estudo. Logo, pode-se combinar, por exemplo, uma variável normalmente distribuída com uma variável exponencialmente distribuída através de uma cópula Frank e obter um estimador combinado não-linear, inusual, mas válido. A seção a seguir contempla esta abordagem.

## 2.4 Cópulas

Uma cópula é uma função,  $C(\cdot)$ , que combina distribuições univariadas para construir uma distribuição multivariada, incorporando a interdependência entre essas distribuições univariadas (NELSEN, 2013; JOE, 1997; FAN; PATTON, 2014). Cópulas podem assim desempenhar o papel para a combinação de preditores de séries temporais,

independentemente da distribuição marginal e conjunta para previsão. Sob o formalismo de cópulas, pode-se inferir, em primeiro lugar, a distribuição marginal do erro de cada preditor individual e, em seguida, a respectiva distribuição conjunta.

Segundo o teorema de Sklar (NELSEN, 2013), no qual o formalismo de cópulas se baseia para modelar distribuições de probabilidade multivariadas, para um vetor de  $k$  variáveis aleatórias quaisquer (ou preditores)  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_k)$ , existe uma função acumulada conjunta  $F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$  tal que

$$F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) = C(v_1, \dots, v_k), \quad (2.30)$$

em que

$$v_i = F_{X_i}(x_i). \quad (2.31)$$

Assim,  $C(v_1, \dots, v_k)$  é a função cópula e a variável aleatória  $V_i$ , com instância  $v_i$ , possui distribuição marginal uniforme no intervalo  $[0, 1]$ .

Devido ao fato de que qualquer variável contínua pode ser transformada em uma uniforme no intervalo  $[0, 1]$  a partir da sua distribuição acumulada marginal, cópulas podem ser usadas para fornecer uma estrutura de dependência multivariada separadamente das distribuições marginais (YAN et al., 2007).

Em relação à função de densidade de probabilidade conjunta de  $\mathbf{X}$ ,

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k),$$

pode-se demonstrar que

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k} = c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_k}(x_k)) \prod_{i=1}^k p_{X_i}(x_i), \quad (2.32)$$

em que  $p_{X_i}(x_i)$  é a função de densidade de probabilidade marginal de  $X_i$  e a função  $c(\cdot)$  representa a função de densidade de probabilidade de cópula

$$c(v_1, \dots, v_k) = \frac{\partial^k}{\partial v_1 \dots \partial v_k} C(v_1, \dots, v_k). \quad (2.33)$$

Em suma, a função cópula contém todas as informações da distribuição de probabilidade que independem das distribuições marginais. Dessa forma, pode-se dizer que as cópulas codificam a dependência entre as variáveis (ou preditores). Com esta construção,



tem-se que a distribuição conjunta de variáveis aleatórias pode ser decomposta em distribuições marginais de cada uma das variáveis, que contém todas as informações sobre cada uma das variáveis correspondentes, e cópulas, que contém toda a informação de como as variáveis dependem umas das outras.

### 2.4.1 Cópulas Arquimedianas

As cópulas Arquimedianas têm sido frequentemente adotadas em problemas multivariados principalmente devido à sua forma simples, facilidade de construção e propriedades desejáveis (NELSEN, 2013). De maneira geral, a cópula  $C(\cdot)$  é dita Arquimediana se admite a representação

$$C(v_1, \dots, v_k) = \varphi^{-1}[\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_k)], \quad (2.34)$$

em que  $\varphi(v_i)$  é conhecida como a função geradora da cópula, com inversa  $\varphi^{-1}(\cdot)$ .

A classe das cópulas Arquimedianas abrange uma grande variedade de estruturas de dependência presentes nas várias famílias. Em particular, as cópulas Arquimedianas podem assumir dependência caudal assimétrica, sendo uma propriedade a favor de sua aplicação à modelagem de dados com estrutura de dependência assimétrica. Isto é, dependências nas caudas das distribuições.

Duas cópulas da classe Arquimediana são utilizadas neste trabalho: a cópula Gumbel e a cópula Frank, explanadas a seguir.

#### 2.4.1.1 Cópula Gumbel

Para a Cópula Gumbel, a função geradora é dada por (GENEST; FAVRE, 2007; NELSEN, 2013)

$$\varphi(v_i) = (-\ln v_i)^\theta, \forall \theta \geq 1, \quad (2.35)$$

cuja inversa é dada por

$$\varphi^{-1}(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right). \quad (2.36)$$

Neste caso, substituindo-se as Equações 2.35 e 2.36 na Equação 2.34 obtém-se a chamada cópula de Gumbel-Hougaard e sua distribuição acumulada conjunta é dada pela

seguinte equação (KOJADINOVIC; YAN et al., 2010)

$$F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = C(v_1, \dots, v_k) = \exp \left\{ - \left[ \sum_{i=1}^k (-\ln v_i)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad (2.37)$$

em que  $v_i$  é dado pela Equação 2.31.

Na cópula de Gumbel-Hougaard, o grau de dependência entre as variáveis em  $\mathbf{X}$  é medido unicamente a partir do parâmetro  $\theta$ . Para  $\theta = 1$  obtêm-se a cópula de marginais independentes e no caso  $\theta \rightarrow \infty$  obtêm-se a cópula dedicada à dependência perfeita positiva. Desta forma, a cópula de Gumbel-Hougaard permite modelar desde situações de independência até de dependência perfeita positiva. Ela é a única cópula Arquimediana de valores extremos e apresenta dependência na cauda superior (NELSEN, 2013; GENEST; FAVRE, 2007; BINOIS; RULLIERE; ROUSTANT, 2015).

#### 2.4.1.2 Cópula Frank

A função geradora da Cópula Frank é expressa por (GENEST; FAVRE, 2007; NELSEN, 2013)

$$\varphi(v_i) = -\ln \left( \frac{e^{-\zeta v_i} - 1}{e^{-\zeta} - 1} \right), \quad (2.38)$$

cuja inversa é dada por

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{-1}{\zeta} \ln[1 - (1 - e^{-\zeta})e^{-t}]. \quad (2.39)$$

Assim, substituindo-se as Equações 2.38 e 2.39 na Equação 2.34 obtêm-se a cópula de Frank e sua distribuição acumulada conjunta é dada pela seguinte equação

$$C(v_1, \dots, v_k) = \frac{-1}{\zeta} \ln \left( \frac{1 + (e^{-\zeta v_1} - 1)(e^{-\zeta v_2} - 1) \dots (e^{-\zeta v_k} - 1)}{(e^{-\zeta} - 1)^{k-1}} \right), \quad (2.40)$$

em que  $v_i$  é dado pela Equação 2.31.

Na cópula de Frank, o grau de dependência entre as variáveis (ou preditores) também é medido por um único parâmetro denotado aqui por  $\zeta$ . Contudo, diferentemente do parâmetro de dependência da Gumbel,  $\zeta \in \mathbb{R}$ , onde  $\zeta = 0$  representa independência,  $\zeta = -\infty$  a máxima associação negativa e  $\zeta = \infty$  a máxima associação positiva (GENEST; FAVRE, 2007; LAURINI; ASSIS, 2008).

## 2.4.2 Cópulas Elípticas

As cópulas elípticas são uma família de distribuições que partilham um conjunto de propriedades importantes, permitindo, por exemplo, generalizar a distribuição normal multivariada, a modelagem de eventos extremos e estruturas de dependência alternativas à correlação de Pearson (usualmente presentes na Normal multivariada). As duas cópulas mais importantes desta família são a Normal (ou Gaussiana) e t de Student. Essa família associa variáveis aleatórias cuja distribuição multivariada é simétrica (CUEVAS; NAIEZHDA, 2010). Neste trabalho, dentre as cópulas elípticas, será utilizada a cópula normal para o caso específico em que as marginais são normais, nomeada aqui de Modelo Clássico (MC).

### 2.4.2.1 Cópula Normal

A cópula Normal ou Gaussiana pertence à família de cópulas elípticas. É completamente simétrica e tem dependência zero para qualquer lado dos extremos da distribuição (RENARD; LANG, 2007). Nesta cópula, a dependência entre pares de variáveis é dada por uma matriz de correlações  $k \times k$  (geralmente envolvendo Correlações de Pearson),  $\rho$ , cujos valores podem variar de -1 a 1, onde  $\rho_{X_i, X_j} = 0$  indica independência entre as variáveis  $(X_i, X_j)$  de índices  $i$  e  $j$ ,  $\rho_{X_i, X_j} = -1$  implica dependência perfeita negativa,  $\rho_{X_i, X_j} = 1$  reflete a dependência perfeita positiva. A cópula normal é o modelo multivariado mais amplamente aplicado na estatística. Por exemplo, quando cada distribuição de probabilidade marginal também é normal, o modelo de cópula resultante é a distribuição normal multivariada, denominada no presente trabalho por Modelo Clássico (MC). A distribuição normal multivariada tem sido útil para análises de componentes principais, regressão clássica e previsão combinada (como o usado em Firmino, Neto e Ferreira (2014)), por exemplo.

A cópula Normal é dada por (RENARD; LANG, 2007; MEYER, 2013)

$$\mathcal{C}(v_1, \dots, v_k) = \Phi(\varphi^{-1}(v_1), \dots, \varphi^{-1}(v_k) | \rho), \quad (2.41)$$

em que  $\varphi^{-1}(\cdot)$  é a inversa da distribuição acumulada marginal da normal padrão e  $\Phi(\cdot)$  é a distribuição acumulada conjunta da normal multivariada com vetor de médias zero e matriz de correlações igual a  $\rho$ .

Equivalentemente, a função densidade da cópula normal, pode ser escrita como

$$c(v_1, \dots, v_k) = c(\varphi^{-1}(v_1), \dots, \varphi^{-1}(v_k) | \rho) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\varphi^{-1}(v_1), \dots, \varphi^{-1}(v_k)) (\rho^{-1} - \mathbb{I}) \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(v_1) \\ \vdots \\ \varphi^{-1}(v_k) \end{pmatrix} \right), \quad (2.42)$$

em que  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade.

Para o caso em que  $\varphi^{-1}(v_j)$  é a função inversa da distribuição normal univariada, a cópula normal gera uma distribuição de probabilidade conjunta normal. No entanto, é suficiente que pelo menos uma das distribuições marginais não seja normal para que a distribuição de probabilidade conjunta resultante ignore esta específica cópula Normal.

## 3 Metodologia

### 3.1 Abordagem proposta

O modelo combinado proposto (via cópula) pode ser dividido em três partes (Figura 2):

1. Modelagem Individual: primeira etapa do processo e que não é objeto de estudo deste trabalho. Aqui, cada modelo individual de previsão é elaborado. Como o objetivo é agregar modelos ajustados a séries temporais, os parâmetros e métodos utilizados para construção desses modelos individuais não precisam ser explanados, pois não serão usados na fase da modelagem combinada mostrada a seguir;

2. Modelagem dos Erros: são calculados os erros cometidos por cada modelo e as suas respectivas distribuições acumuladas. Nesta etapa, é realizada uma análise envolvendo estatística descritiva e inferencial, bem como, testes de aderência de distribuições teóricas;

3. Modelagem Combinada: são utilizadas as distribuições acumuladas dos erros de cada modelo para a agregação via cópula. Obtém-se a distribuição de probabilidade conjunta dos erros, permitindo a previsão combinada pelo método de máxima verossimilhança.

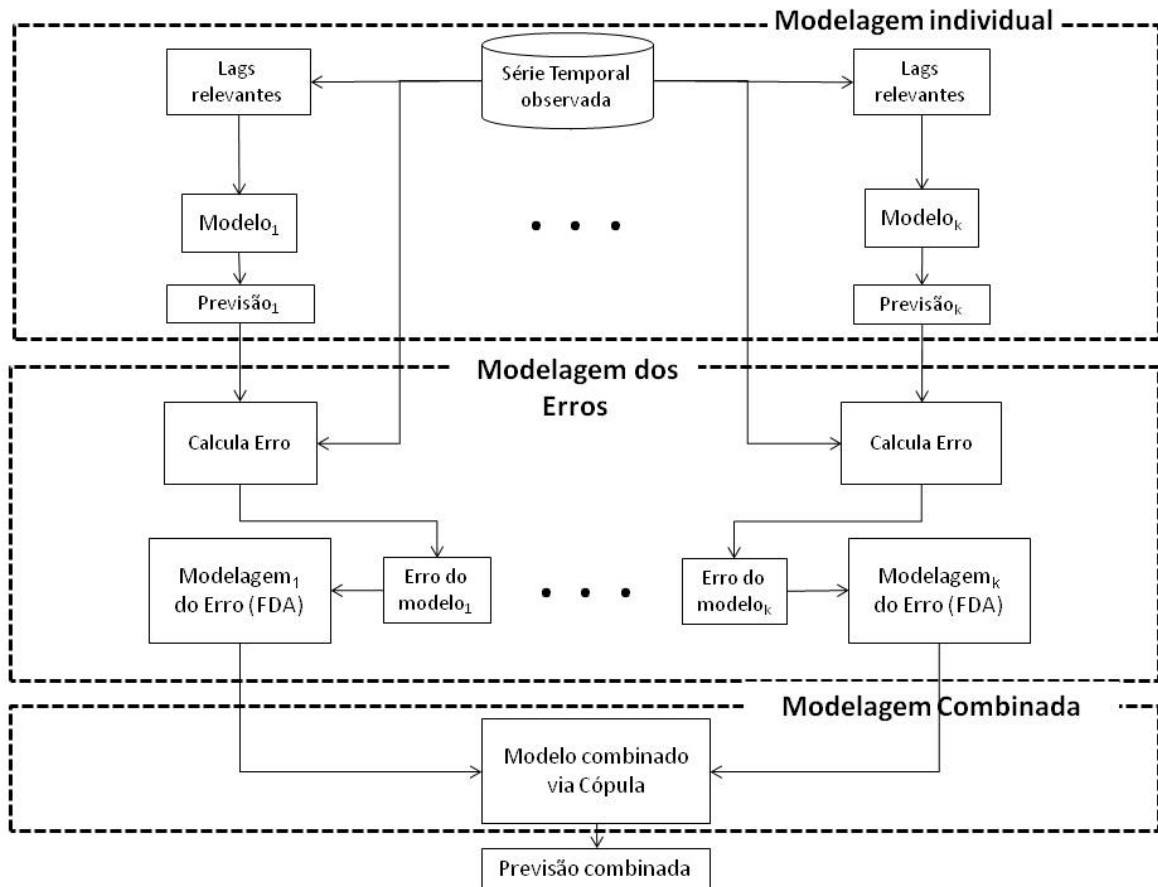


Figura 2 – Arquitetura proposta para previsão combinada via cópula. A etapa de Modelagem Individual corresponde à usual elaboração dos modelos de previsão. A Modelagem dos Erros é a fase na qual a função de distribuição acumulada marginal (FDA) dos erros é inferida. A Modelagem Combinada é dedicada a obter a distribuição de probabilidades conjunta dos erros, permitindo a previsão combinada pelo Método de Máxima Verossimilhança.

Para comparar os estimadores individuais e combinados, a medida de desempenho utilizada foi o Erro Quadrático Médio (EQM). Cabe destacar também que para cada fenômeno do mundo real abordado neste trabalho, uma parte da série temporal foi deixada para ajuste dos modelos e a outra parte para previsão.

Estas etapas são descritas em detalhes a seguir, após a apresentação de alguns conceitos básicos.

### 3.1.1 Conceitos básicos

No contexto da presente tese, sejam  $u_t$  as observações da série temporal de interesse no tempo  $t$ ,  $\mathbf{X}_t = (X_{t,1}, \dots, X_{t,i}, \dots, X_{t,k})$  o vetor de  $k$  preditores para  $u_t$  e  $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, \dots, x_{t,i}, \dots, x_{t,k})$  o vetor das respectivas estimativas dos preditores de  $u_t$ .

Assim,  $\{u_t, \mathbf{x}_t\}_{t=1}^n$  é o conjunto para ajuste das previsões combinadas e  $\{u_t, \mathbf{x}_t\}_{t=n+1}^{n+m}$  o conjunto de previsões, empregado para avaliar o desempenho dos modelos, em que o tamanho total da previsão da série temporal é  $n + m$ .

Neste sentido, considere  $\mathbf{E}_t = (E_{t,1}, \dots, E_{t,i}, \dots, E_{t,k})$  o vetor de erros aleatórios cometidos pelos respectivos modelos individuais pertencentes à  $\mathbf{X}_t$ . A fim de lidar com o problema de incerteza de modelos, duas estruturas de erro são levadas em conta (MOSLEH; APOSTOLAKIS, 1986)

$$E_{t,i} = X_{t,i} - u_t, \quad (3.1)$$

nomeado modelo de erro aditivo e

$$E_{t,i} = \frac{X_{t,i}}{u_t}, \quad (3.2)$$

chamado modelo de erro multiplicativo.

Assim, no tocante a  $\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^n$  e  $\{u_t\}_{t=1}^n$ ,  $E_{t,i}$  é instanciado para

$$e_{t,i} = x_{t,i} - u_t \quad (3.3)$$

ou

$$e_{t,i} = \frac{x_{t,i}}{u_t} \quad (3.4)$$

respectivamente, em que  $\{e_{t,i}\}_{t=1}^n$  é o conjunto de erros observados do  $i$ -ésimo preditor,  $i = 1, \dots, k$ . Portanto,  $\mathbf{e}_t = (e_{t,1}, \dots, e_{t,i}, \dots, e_{t,k})$  é uma instância de  $\mathbf{E}_t$ . A Tabela 1 ilustra este processo de transformação da instância  $\mathbf{x}_{t,i}$  em  $\mathbf{e}_{t,i}$ , utilizando-se da estrutura de erros aditivos.

Tabela 1 – Ilustração do processo de transformação da instância  $\mathbf{x}_{t,i}$  em  $\mathbf{e}_{t,i}$ , via erros aditivos.

Tempo ( $t$ )	$u_t$	$x_{t,1}$	$e_{t,1} = x_{t,1} - u_t$	$x_{t,2}$	$e_{t,2} = x_{t,2} - u_t$	$x_{t,3}$	$e_{t,3} = x_{t,3} - u_t$	...	$x_{t,k}$	$e_{t,k} = x_{t,k} - u_t$
1	$u_1$	$x_{1,1}$	$e_{1,1}$	$x_{1,2}$	$e_{1,2}$	$x_{1,3}$	$e_{1,3}$	...	$x_{1,k}$	$e_{1,k}$
2	$u_2$	$x_{2,1}$	$e_{2,1}$	$x_{2,2}$	$e_{2,2}$	$x_{2,3}$	$e_{2,3}$	...	$x_{2,k}$	$e_{2,k}$
3	$u_3$	$x_{3,1}$	$e_{3,1}$	$x_{3,2}$	$e_{3,2}$	$x_{3,3}$	$e_{3,3}$	...	$x_{3,k}$	$e_{3,k}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$t$	$u_t$	$x_{t,1}$	$e_{t,1}$	$x_{t,2}$	$e_{t,2}$	$x_{t,3}$	$e_{t,3}$	...	$x_{t,k}$	$e_{t,k}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$u_n$	$x_{n,1}$	$e_{n,1}$	$x_{n,2}$	$e_{n,2}$	$x_{n,3}$	$e_{n,3}$	...	$x_{n,k}$	$e_{n,k}$

Dessa forma, a distribuição acumulada conjunta de  $\mathbf{E}_{t,i}$  é dada por  $F_{\mathbf{E}_{t,i}}(e_{t,1}, \dots, e_{t,k})$  e a distribuição acumulada marginal por  $F_{E_{t,i}}(e_{t,i})$  e, pelas equações 3.1 e 3.3, tem-se para os erros aditivos, por exemplo, a seguinte distribuição acumulada marginal de  $X_{t,i}$

$$\begin{aligned} F_{X_{t,i}}(x_{t,i}) &= P(X_{t,i} < x_{t,i}) = P(E_{t,i} + u_t < x_{t,i}) = \\ &P(E_{t,i} < x_{t,i} - u_t) = F_{E_{t,i}}(x_{t,i} - u_t) = F_{E_{t,i}}(e_{t,i}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Logo, a incerteza subjacente  $X_{t,i}$  pode ser descrita em termos da incerteza intrínseca a  $E_{t,i}$ , e o mesmo ocorre para a função densidade de probabilidade marginal de  $X_{t,i}$

$$p_{X_{t,i}}(x_{t,i}) = p_{E_{t,i}}(x_{t,i} - u_t) \quad (3.6)$$

Cabe destacar que a covariância entre dois modelos (ou preditores) é igual a covariância entre os erros destes dois modelos quando se trabalha com erros aditivos (ver demonstração no Apêndice F).

### 3.1.2 Cópula: combinação de modelos

A função cópula,  $C(\cdot)$ , é uma função de distribuição acumulada multivariada cujas distribuições marginais são uniformes no intervalo  $[0,1]$ . De um modo geral, seja  $v_i (i = 1, \dots, k)$  uma instância de  $k$  distribuições acumuladas marginais unitárias tais que  $v_i \in [0, 1]$ . Então, a função cópula é dada pela distribuição acumulada conjunta (ELLIOTT; TIMMERMANN, 2013; NELSEN, 2013)

$$C(v_1, \dots, v_k), \quad (3.7)$$

em que  $v_i$  é a distribuição acumulada marginal dos erros (aditivos ou multiplicativos) do modelo  $X_i$

$$v_i = F_{E_{t,i}}(e_{t,i} | \alpha_i) \quad (3.8)$$

e  $\alpha_i$  é o parâmetro (ou vetor de parâmetros) da respectiva distribuição acumulada marginal univariada. Desta maneira,  $E_i$  representa os erros do  $i^{th}$  modelo único de previsão e  $F_{E_i}(\cdot | \alpha_i)$  a distribuição acumulada marginal unitária na qual pode-se inferir via teste de bondade de ajuste, por exemplo, Kolmogorov-Smirnov.

Assim, cópulas fornecem um modelo multivariado que mapeia  $(e_{t,1}, \dots, e_{t,i}, \dots, e_{t,k})$  para  $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k)$  via Equação 3.8. Logo, a função densidade de probabilidade conjunta de  $\mathbf{E}_t$  é dada por

$$p_{\mathbf{E}_t}(e_{t,1}, \dots, e_{t,k}) = c_{\mathbf{E}_t}(v_1, \dots, v_k) \prod_{i=1}^k p_{E_{t,i}}(e_{t,i}), \quad (3.9)$$



a qual pode ser mais detalhadamente escrita como

$$p_{\mathbf{E}_t}(\mathbf{e}_t | \alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma) = c_{\mathbf{E}_t} \left( F_{E_{t,1}}(e_{t,1} | \alpha_1), \dots, F_{E_{t,k}}(e_{t,k} | \alpha_k) | \gamma \right) \prod_{i=1}^k p_{E_{t,i}}(e_{t,i} | \alpha_i), \quad (3.10)$$

em que  $p_{E_{t,i}}(e_{t,i} | \alpha_i)$  é a função densidade de probabilidade marginal de  $E_{t,i}$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  o vetor de parâmetros das marginais,  $\gamma$  o vetor de parâmetros de dependência da cópula e  $c_{\mathbf{E}_t}(\cdot)$  representa a função densidade de probabilidade de cópula, (ELLIOTT; TIMMERMANN, 2013)

$$c_{\mathbf{E}_t}(v_1, \dots, v_k) = \frac{\partial^k}{\partial v_1 \dots \partial v_k} \mathcal{C}(v_1, \dots, v_k). \quad (3.11)$$

Neste trabalho, é suposto que  $c_{\mathbf{E}_t}(\cdot)$  e  $p_{E_{t,i}}(e_{t,i})$  são invariantes no tempo. Embora esta hipótese pareça restritiva a primeira vista, deve-se destacar que é comum à maioria das estratégias de modelagem de séries temporais. Deste modo, o índice  $t$  pode ser suprimido nas Equações (3.10) and (3.11):

$$p_{E_{t,i}}(e_{t,i}) = p_{E_i}(e_{t,i}); \quad c_{\mathbf{E}_t}(\cdot) = c_{\mathbf{E}}(\cdot).$$

Na verdade, tem sido usual considerar que os componentes  $E_i$  são independentes e identicamente distribuídos (iid). Até o momento, autores como Firmino, Neto e Ferreira (2014), Firmino, Neto e Ferreira (2015) estudaram a violação de tal suposição, sempre assumindo normal (ou log-normal) a distribuição acumulada marginal dos modelos individuais.

Seguindo a metodologia apresentada, ressalta-se que a função distribuição acumulada multivariada  $C(\cdot)$ , poderá assumir qualquer tipo cópula, sendo  $c(\cdot)$  a sua respectiva função densidade de probabilidade.

### 3.1.3 Inferência dos parâmetros de cópulas

#### 3.1.3.1 Método de Máxima Verossimilhança

O método de máxima verossimilhança é adotado para estimar conjuntamente tanto os parâmetros das distribuições marginais quanto da cópula paramétrica  $C(\cdot)$ . Os valores obtidos são aqueles que maximizam a função de log-verossimilhança (BOLFARINE; SANDOVAL, 2001). A equação resultante adaptada à presente tese é a seguinte:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{t=1}^n \ln(p_{E_1, \dots, E_k}(e_{t,1}, \dots, e_{t,i}, \dots, e_{t,k} | \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \gamma)) \\
&= \sum_{t=1}^n \ln(c(F_{E_1}(e_{t,1} | \alpha_1), \dots, F_{E_k}(e_{t,k} | \alpha_k) | \gamma)) + \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^k \ln(p_{E_i}(e_{t,i} | \alpha_i)), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

em que  $\alpha_i$  é o vetor que contém o conjunto de parâmetros das distribuições marginais univariadas  $F_{E_i}(e_i)$  e  $\gamma$  é o vetor de parâmetros de dependência da cópula, tal como  $\theta$  (Gumbel-Hougaard),  $\zeta$  (Frank) ou  $\rho$  (Normal), por exemplo. Por sua vez, o vetor  $\mathbf{e}_t = (e_{t,1}, \dots, e_{t,i}, \dots, e_{t,k})$  representa a  $t$ -ésima instância do vetor de erros  $\mathbf{E}_t$ .

### 3.1.3.2 Método IFM - *Inference for marginals*

Um dos principais métodos adotados para inferência dos parâmetros do modelo de cópula é o *inference for marginals*, conhecido como método IFM. Este método estabelece que os parâmetros das marginais sejam estimados separadamente, para cada modelo individual. Especificamente, pode-se recorrer aos estimadores de máxima verossimilhança das respectivas distribuições marginais. Em seguida, de posse das estimativas de máxima verossimilhança das marginais, o IFM sugere que se obtenha, também por máxima verossimilhança, a estimativa do parâmetro (ou vetor de parâmetros) de dependência da cópula (JOE; XU, 1996; YAN et al., 2007). Dessa forma, o estimador combinado proposto ( $\hat{u}_t$ ) é obtido pela avaliação da Equação 3.12 utilizando-se do método IFM, como explanado a seguir.

## 3.2 Representação gráfica do modelo combinado proposto

As Figuras 3 e 4, a seguir, mostram os passos utilizados no *software* gratuito R (TEAM, 2015) para atingir a abordagem proposta evidenciada anteriormente. Como ilustra a Figura 3, inicialmente são calculados os erros de cada modelo individual para determinada série temporal. A partir daí são computadas estatísticas descritivas e inferenciais, bem como, estimativas dos parâmetros dos modelos individuais via IFM. Posteriormente, são construídas as distribuições acumuladas, para em seguida se obter o parâmetro de dependência da cópula Frank ou Gumbel via método IFM. Diante do que foi calculado anteriormente, é ajustada a função densidade de cópula  $c(\cdot)$ . Em seguida, calcula-se o valor mínimo (Mín) e máximo (Máx) e depois gera-se um vetor, denotado por *bounds*, que é uma função destes valores. Por fim, utiliza-se  $c(\cdot)$ ,  $x_{t,1}, \dots, x_{t,k}$  e *bounds*, para a obtenção do estimador combinado  $\hat{u}_t$  pelo método de máxima verossimilhança.

A Figura 4 ilustra os passos para obtenção das previsões combinadas ( $\hat{u}_t$ ). Primeiro é definido um vetor  $l_t$  de  $n_l$  valores igualmente espaçados entre os limites em *bounds*

(valores mínimo e máximo dos modelos de previsão e da série temporal). Replica-se o valor de  $x_{t,i}$  por  $n_l$  vezes, possibilitando calcular o erro ( $e_{t,i}$ ). Na Figura 4 calcula-se o erro aditivo, embora seja possível utilizar o erro multiplicativo, a depender do caso em estudo. Por fim, a combinação ocorre através do procedimento de calcular a função densidade de probabilidade de cópula, passando como argumentos os  $e_{t,i}$  e o ajuste da função densidade de cópula ( $c(\cdot)$ ), para posteriormente selecionar o elemento em  $l_t$  que maximiza a função  $f_l$ . Dessa forma, o elemento selecionado em  $l_s$  (onde  $s$  é o índice do maior elemento contido no vetor  $f_l$ ) que maximiza a função de densidade de cópula, resultando na estimativa combinada  $\hat{u}_t$ .

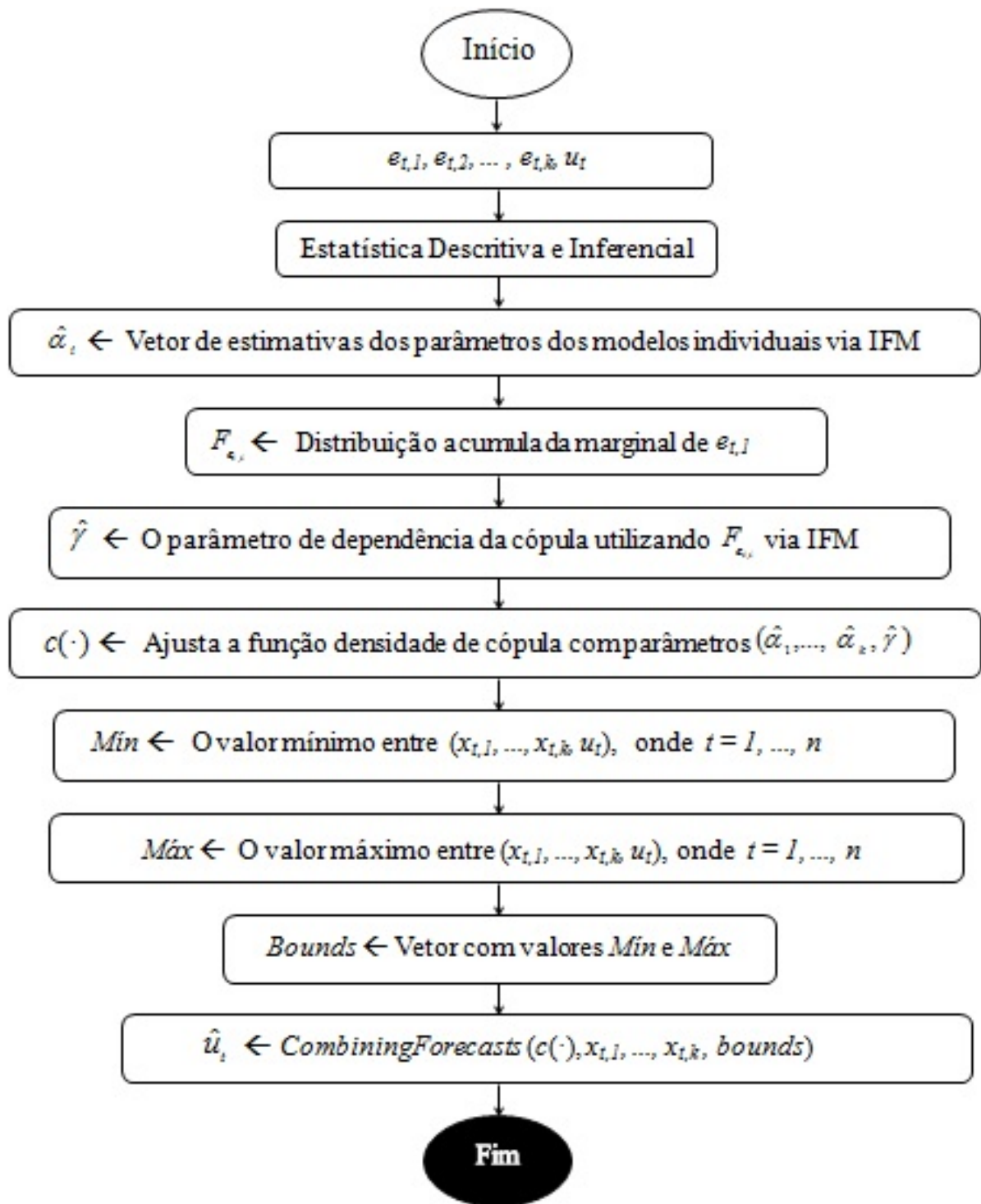


Figura 3 – Representação gráfica da abordagem proposta via cópula.

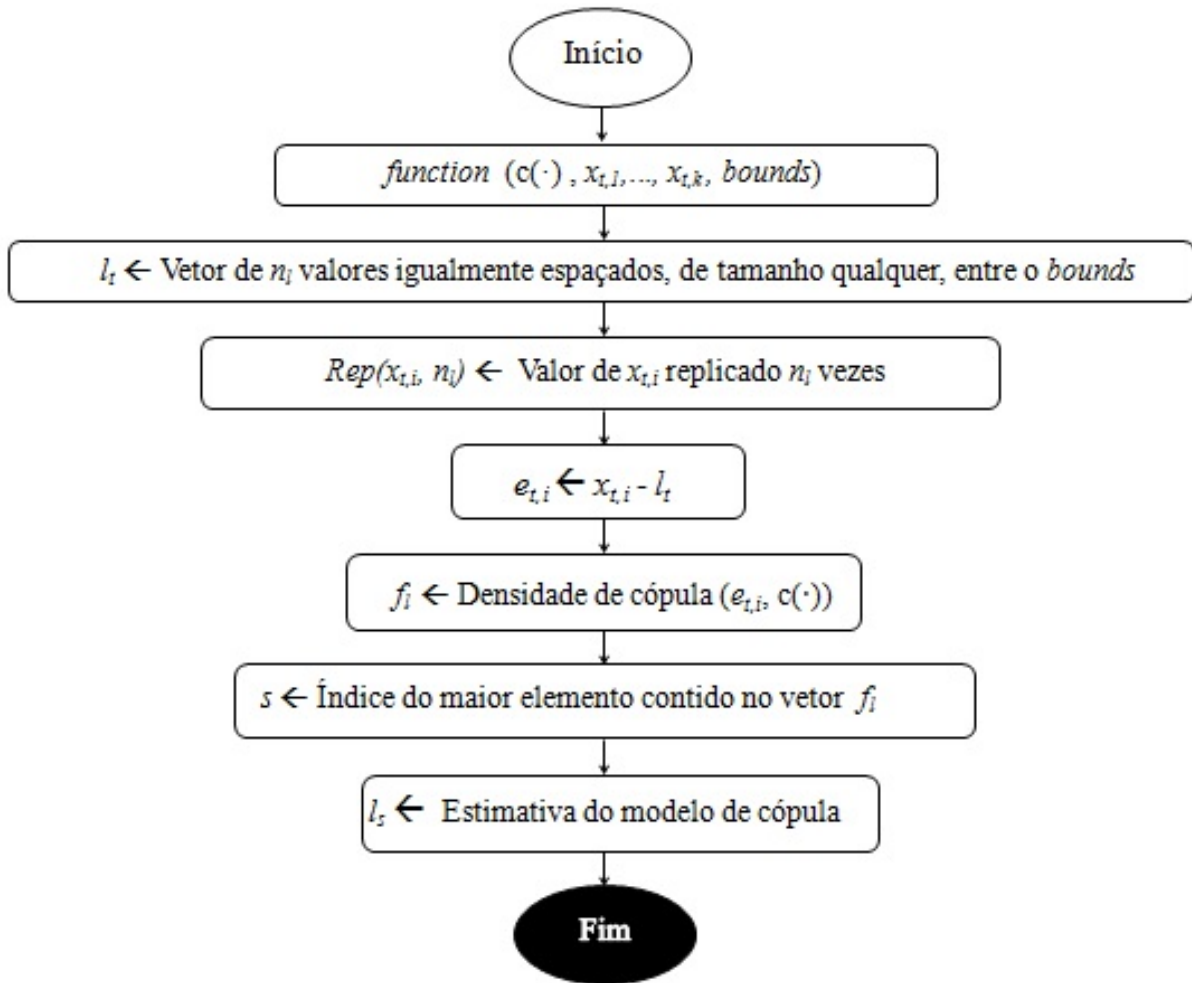


Figura 4 – Representação gráfica da função *CombiningForecasts* utilizada para combinar os modelos individuais.

Dessa forma, a estimativa de máxima verossimilhança via cópula,  $\hat{u}_t$ , é o valor que maximiza a Equação 3.10 à luz do conjunto de parâmetros estimados  $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \hat{\gamma})$  e das  $k$  previsões residuais. Em outros termos, assumindo a estrutura de erros aditivos, tem-se

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_t &= \arg \max_u f(u) = p_{\mathbf{E}_t}(\mathbf{x}_t - \mathbf{u} | \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \hat{\gamma}) \\
 &= c_{\mathbf{E}}(F_{E_1}(x_{t,1} - u | \hat{\alpha}_1), \dots, F_{E_k}(x_{t,k} - u | \hat{\alpha}_k) | \hat{\gamma}) \prod_{j=1}^k p_{E_j}(x_{t,j} - u | \hat{\alpha}_j) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

A fim de proporcionar uma fórmula geral para a estimativa de máxima verossimilhança via cópulas, com relação à estrutura de erro, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{u}_t &= \arg \max_u f(u) = p_{\mathbf{E}_t}(\mathbf{x}_t \oplus \mathbf{u} | \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \hat{\gamma}) \\ &= c_{\mathbf{E}}(F_{E_1}(x_{t,1} \oplus_1 u | \hat{\alpha}_1), \dots, F_{E_k}(x_{t,k} \oplus_k u | \hat{\alpha}_k) | \hat{\gamma}) \prod_{j=1}^k p_{E_j}(x_{t,j} \oplus_j u | \hat{\alpha}_j),\end{aligned}\quad (3.14)$$

em que  $\oplus_j$  assume o símbolo aritmético ‘-’ (ou ‘/’) para a estrutura de erro aditivo (ou multiplicativo) para  $E_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Alguns autores têm argumentado a importância de estudar a melhor estrutura de erro (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014).

Pela Equação (3.14), pode-se observar que dadas as previsões  $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, \dots, x_{t,j}, \dots, x_{t,k})$  e estimativas dos parâmetros da distribuição de probabilidade conjunta via cópula  $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \hat{\gamma})$ , a única incógnita é  $u$ , independente do número de modelos de previsão tomados em consideração ( $k$ ). Vale a pena mencionar que é considerada a eventual presença de viés nos modelos individuais, uma vez que a função  $\hat{u}_t$  é baseada nas discrepâncias  $x_{t,j} - u$  (ou  $x_{t,j}/u$ ). Por sua vez, não há garantia de que  $\hat{u}_t$  é uma combinação linear das previsões  $(x_{t,1}, \dots, x_{t,j}, \dots, x_{t,k})$ . Além disso, devido ao fato que a Equação (3.14) pode conduzir a um problema de otimização sem solução analítica, um método numérico se faz necessário. Na presente tese,  $\hat{u}_t$  é obtido pela avaliação da Equação (3.14) na grade de pontos uniformemente espaçados no espaço de possibilidades de  $u_t$ , limitados de acordo com os valores mínimo e máximo do conjunto  $\{u_t, x_{t,1}, \dots, x_{t,k}\}_{t=1}^n$ . Tal método de pesquisa é também possível nos casos envolvendo  $k > 2$ .

### 3.3 Avaliação de desempenho do modelo

A maioria dos trabalhos encontrados na literatura de previsão de séries temporais frequentemente empregam como critério de desempenho para avaliação do modelo, o erro quadrático médio (EQM). O EQM é definido por

$$\text{EQM}(\hat{U}_t, u_t) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{U}_t - u_t)^2 = V(\hat{U}_t) + (B(\hat{U}_t))^2 \quad (3.15)$$

em que  $\hat{U}_t$  é o estimador combinado para  $u_t$ ,  $B(\hat{U}_t) = E(\hat{U}_t) - u_t$  é denominado viés de  $\hat{U}_t$ , enquanto  $E(\cdot)$  e  $V(\cdot)$  são, respectivamente, a média e a variância das funções. Assim, pode-se observar que o EQM permite estudar o equilíbrio entre a eficiência e a acurácia estatísticas dos estimadores.

## 3.4 Estatística Descritiva e Inferencial

### 3.4.1 Coeficiente de Correlação

Na Estatística, pode-se quantificar relações entre variáveis de diversas maneiras. A mais comum envolve o coeficiente de correlação linear de Pearson, o qual quantifica o quão linear é essa relação. Este coeficiente, também chamado de covariância normalizada, é expresso por

$$\rho_{X_i, X_j} = \frac{\sigma_{X_i, X_j}}{\sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j}}. \quad (3.16)$$

Os valores dos coeficiente de correlação ( $\rho_{X_i, X_j}$ ) variam de  $-1$  a  $+1$ , se próximos a  $-1$  e  $+1$  indicam forte correlação e próximos a zero indicam fraca correlação ou ausência de correlação. Sendo  $\rho_{X_i, X_j} = 1$ , os dados estarão exatamente sobre uma reta ascendente (*correlação positiva perfeita*). Por outro lado, se  $\rho_{X_i, X_j} = -1$ , os dados estarão exatamente sobre uma reta descendente (*correlação negativa perfeita*) (BARBETTA; REIS; BORNIA, 2010).

#### Teste de hipóteses sobre o coeficiente de correlação

As hipóteses científicas de interesse são:

$H_0 : \rho_{X_i, X_j} = 0$ . Não há correlação linear entre os preditores envolvidos (analisando dois a dois);

$H_1 : \rho_{X_i, X_j} \neq 0$ . Há correlação linear entre os preditores envolvidos (analisando dois a dois).

A estatística apropriada para esse teste é dada por

$$t_0 = \frac{\rho_{X_i, X_j} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \rho_{X_i, X_j}^2}} \quad (3.17)$$

em que  $t_0$  é a estatística do teste;  $n$  é o tamanho da amostra e  $\rho_{X_i, X_j}$  são os valores dos coeficientes de correlação.

A estatística do teste,  $t_0$ , segue uma distribuição  $t$ -Student com  $n - 2$  graus de liberdade. Quando as variáveis envolvidas são normalmente distribuídas, rejeita-se a hipótese nula ( $H_0$ ) se  $|t_0| > t_{(\frac{\alpha}{2}, n-2)}$ , em que,  $t_{(\frac{\alpha}{2}, n-2)}$  é o valor crítico para a estatística do teste bilateral para um nível de significância  $\alpha$ , com  $n - 2$  graus de liberdade.

Ressalta-se que para utilização do teste  $t$ -Student as variáveis  $X_i$  e  $X_j$  devem ser normalmente distribuídas. Isto se dá pelo fato que distribuições  $t$ -Student surgem de variáveis aleatórias que são normalmente distribuídas com média zero e variância 1.

### 3.4.2 Teste de Hipóteses

#### 3.4.2.1 Teste de Kolmogorov- Smirnov (KS)

O teste não-paramétrico de Kolmogorov-Smirnov (KS) permite verificar a aderência de uma específica distribuição de probabilidade (discreta ou contínua) a um conjunto de dados. Embora seja possível aplicar o teste qui-quadrado de aderência, o teste KS é uma alternativa mais poderosa (BARBETTA; REIS; BORNIA, 2010).

Seja  $F(x)$  a função de distribuição acumulada teórica, com seus parâmetros especificados. Define-se as seguintes hipóteses:

$H_0$ : os dados provêm da distribuição  $F(x)$ ;

$H_1$ : os dados não provêm da distribuição  $F(x)$ .

A estatística do teste é a diferença absoluta máxima entre a distribuição acumulada teórica ( $F(x)$ ) e a empírica ( $S(x)$ ), expressa por:

$$d = \max[|F(x_i) - S(x_i)|, |F(x_i) - S(x_i - 1)|], \quad (3.18)$$

em que, para cada valor  $x_i$  ( $i= 1,2,\dots,n$ ) tem-se

$$S(x_i) = \frac{\text{número de valores} \leq x_i}{n}, \quad (3.19)$$

sendo,  $n$  o tamanho da amostra e  $x_i$  o  $i$ -ésimo valor da amostra ordenada.

Uma vez identificada  $d$ , compara-se com um valor tabelado,  $d_c$ , de acordo com um nível de significância  $\alpha$  e do tamanho da amostra  $n$ . Aceita-se a hipótese nula ( $H_0$ ) se  $d \leq d_c$ , caso contrário, rejeita-se  $H_0$ .

#### 3.4.2.2 Teste t-Student para a média

Neste trabalho o teste  $t$ -Student é aplicado para verificar se uma variável na população pode ser considerada, em média, igual a certo valor  $\mu_0$ . Tem-se um teste bilateral, no qual as hipóteses são (BARBETTA; REIS; BORNIA, 2010):

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0; \\ H_1 : \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

em que  $\mu$  é o valor esperado da distribuição dos erros de cada modelo individual.

O cálculo da estatística do teste é feito por

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{s}, \quad (3.20)$$



em que  $\mu_0$  é o valor da média, segundo  $H_0$ ;  $n$  é o tamanho da amostra;  $\bar{x}$  é a média amostral; e  $s$  é o desvio-padrão amostral.

Para esse teste, a distribuição de referência é a  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade. A regra de decisão para o teste é a seguinte: não rejeita a hipótese nula ( $H_0$ ) se  $-t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \leq t \leq t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ , caso contrário, rejeita-se a hipótese nula,  $H_0$ . Este teste também se baseia na suposição de normalidade dos dados sob estudo.

## 4 Resultados

Neste capítulo são abordados 8 fenômenos do mundo real. A primeira seção aborda três séries de crescimento de peixes (espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*), a segunda é composta de quatro séries financeiras (Nasdaq (ND), Google(GG), S&P500 (SP) e Dow Jones (DJ)) e a terceira trata de uma série de precipitação.

As análises destes fenômenos do mundo real seguem os passos da abordagem proposta. Inicialmente, cada modelo individual de previsão foi elaborado. Para as séries de crescimento de peixes, tem-se os seguintes modelos: 1 - VBGM (*Von Bertalanffy Growth Model*), 2 - Gompertz, 3 - logístico, 4 - VBGM generalizado, 5 - Schnute-Richards. Em relação às séries financeiras ND, GG, SP e DJ, os modelos individuais para cada caso são: 1 - ANN (*Artificial Neural Network*), 2-TAEF (*Time-delay Added Evolutionary Forecasting* (FERREIRA; VASCONCELOS; ADEODATO, 2008)) e 3 - ARIMA (Auto-regressivo integrado de média móvel). Por sua vez, para a série de precipitação são utilizados nove modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*). Posteriormente, são calculados os erros cometidos pelos respectivos modelos individuais e suas distribuições acumuladas. Nesta etapa, é realizada uma análise envolvendo estatística descritiva e inferencial. Por último, tem-se a modelagem combinada que é dedicada a obter a distribuição de probabilidade conjunta dos erros, permitindo a previsão combinada pelo método de máxima verossimilhança.

Ressalta-se que a escolha destes modelos individuais justifica-se pelos motivos: 1. os modelos relacionados as séries de peixes são bastante utilizados na literatura, bem como dar continuidade ao trabalho do autor Katsanevaki (2006); 2. nas séries financeiras os modelos utilizados tinha como objetivo utilizado dar continuidade ao trabalho dos autores Firmino, Neto e Ferreira (2014); 3. Por fim, a série de precipitação foram consideradas nove modelos GARCH pelo fato de apresentarem melhor desempenho quando comparado com os modelos ARIMA para o referido caso sob estudo. Evidenciando que os modelos GARCH foram gerados a partir dos resíduos do ARIMA que apresentou melhor desempenho (ARIMA(3,0,3)).

A medida de desempenho utilizada para comparar o estimadores individuais e combinados sob estudo foi o Erro Quadrático Médio (EQM). Para o desenvolvimento do modelo combinado de acordo com a abordagem proposta, utilizou-se o *software* gratuito R fazendo uso de suas inúmeras ferramentas (TEAM, 2015), entre elas o uso do pacote

cópula (YAN et al., 2007).

## 4.1 Séries de crescimento de peixes em função da idade

Autores, tais como, Katsanevakis (2006) e Duarte-Neto, Higa e Lessa (2012) utilizaram uma inferência multi-modelos, que pode ser denotada também por modelo combinado, para dados de comprimento de peixes em função da idade com o intuito de fazer robustas estimações dos parâmetros de crescimento de peixes. Nesta área é comum pesquisadores utilizarem uma base de dados pequena para cada espécie de peixes analisada. Na presente tese, são utilizados modelos combinados via cópulas para estimar o real crescimento dos peixes de determinada espécie ao invés da estimação dos parâmetros relacionados aos modelos individuais abordados na literatura. Dessa forma, o modelo combinado via cópula (Normal, Frank ou Gumbel) faz uso de todas as informações inseridas em cada modelo individual de crescimento de peixes (VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado, Schnute-Richards) para obtenção de uma estimativa combinada do real crescimento dos peixes de uma determinada espécie.

### 4.1.1 Descrição dos dados

Os dados utilizados são referentes às séries de crescimento de peixes em função da idade, para as espécies: *yellow tuna* (*Thunnus albacares*), *striped seabream* (*Lithognathus mormyrus*) e *bigeye tuna* (*Thunnus obesus*). A Tabela 2 abaixo apresenta as propriedades básicas de cada série temporal real.

Tabela 2 – Propriedades das séries temporais referentes as espécies yellow tuna, striped seabream e bigeye tuna.

Propriedades	Yellow tuna	Striped seabream	Bigeye tuna
Unidade de tempo	anos	anos	anos
Idade inicial	0,5	1	1
Idade inicial (previsão)	5,5	7	8
Idade final	6,5	8	9
Tamanho total da série (n+m)	13	8	9
Tamanho da série para ajuste (n)	10	6	7
Tamanho da série para previsão (m)	3	2	2

Logo, 75% das observações de cada série são utilizadas para ajuste dos modelos, e os últimos 25% dos pontos foram deixados para previsão. Os dados para as espécies yellow tuna, striped seabream e bigeye tuna foram obtidos dos artigos Lessa e Duarte-Neto (2004), Pajuelo et al. (2002) e Duarte-Neto, Higa e Lessa (2012), respectivamente. Em

relação a espécie *yellow tuna*, os peixes foram capturados na região do Atlântico oeste equatorial, para a espécie *striped seabream* nas Ilhas Canárias e a *bigeye tuna* no Atlântico sudoeste equatorial.

A estimativa do crescimento médio dos peixes para sua idade se faz necessário para análise da população das espécies. Segundo Katsanevakis (2006), vários modelos têm sido propostos para estimar o crescimento significativo dos peixes numa população, dentre eles, o mais comumente aplicado é o modelo de crescimento Von Bertalanffy (VBGM) (Von Bertalanffy, 1938). Outras alternativas de modelos bastante utilizados são o VBGM generalizado (Pauly, 1979), o Gompertz (Gompertz, 1825), o logístico (Ricker, 1975) e o Schnute-Richards (Schnute e Richards, 1990).

Nesta tese foram ajustados os cinco modelos individuais citados anteriormente para predição das séries de crescimento de peixes para as espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*. Para o ajuste de cada modelo foi usado o método de mínimos quadrados não-linear (nl-LS) com iterações por meio do algoritmo de Marquardt's assumindo estrutura de erros aditivos conforme procedimento utilizado em Katsanevakis (2006). O software Matlab foi utilizado para a obtenção dos resultados referentes aos respectivos ajustes dos modelos individuais (veja as Figuras 10 a 24, no Apêndice A), bem como, a obtenção do coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$  Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para cada espécie de peixe sob estudo (*yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*), apresentados no Apêndice B, Tabelas 33 a 35.

#### 4.1.2 Resultados do experimento

Calculados os erros dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards, a Tabela 3 revela estatísticas descritivas (EST.DESCR) dos resíduos. Para a espécie *yellow tuna* observa-se que o modelo VBGM apresenta uma maior variabilidade e o modelo Schnute-Richards a menor variabilidade. Em relação às espécies *striped seabream* e *bigeye tuna*, o modelo Gompertz expõe uma maior variabilidade e o modelo VBGM a menor variabilidade. Em termos de erro dos modelos, para a série dos *striped seabream*, destaque-se o elevado viés do modelo Gompertz. No Apêndice C, as Tabelas 36 a 38 mostram o sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais para cada espécie e no Apêndice D estão os respectivos histogramas, Figuras 25 a 39.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para as espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*.

Modelos	Medidas	VBGM	Gompertz	logístico	VBGM generalizado	Schnute Richards
<i>Yellow tuna</i>	$\mu$	-2,972	5,923	0,521	-0,034	-0,068
	$\sigma$	6,999	4,425	4,017	3,878	1,500
<i>Striped seabream</i>	$\mu$	-0,198	-49,251	0,260	0,195	-0,354
	$\sigma$	1,995	14,356	2,993	2,121	2,551
<i>Bigeye tuna</i>	$\mu$	0,092	-25,900	0,467	0,377	0,327
	$\sigma$	2,221	6,874	4,129	3,184	2,343

As Tabelas 4 a 6 apresentam os resultados da matriz de correlações lineares de Pearson ( $\rho$ ) e os respectivos p-valor dos testes de hipóteses sobre os referentes coeficientes de correlação para as espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*. Para a espécie *yellow tuna*, observa-se que há uma forte correlação linear positiva entre os modelos VBGM e VBGM generalizado ( $\rho=0,779$ ), Gompertz e logístico ( $\rho=0,658$ ), Gompertz e VBGM generalizado ( $\rho=0,886$ ) e logístico e VBGM generalizado ( $\rho=0,862$ ), as demais correlações não foram significativas ao nível de 5%. Para a espécie *striped seabream* há uma forte correlação linear positiva entre os modelos VBGM generalizado e VBGM ( $\rho=0,711$ ), Schnute-Richards e VBGM ( $\rho=0,988$ ), logístico e VBGM generalizado ( $\rho=0,878$ ) e Schnute-Richards e VBGM generalizado ( $\rho=0,799$ ), todavia apenas as associações entre Schnute-Richards e VBGM, e logístico e VBGM generalizado, foram significativas ao nível de 5%. Para a espécie *bigeye tuna* há uma forte correlação linear positiva entre os modelos VBGM e logístico ( $\rho=0,867$ ), VBGM e VBGM generalizado ( $\rho=0,951$ ), Gompertz e logístico ( $\rho=0,757$ ) e logístico e VBGM generalizado ( $\rho=0,979$ ), as demais correlações não foram significativas ao nível de 5%. Evidencia-se também que houve uma grande variação entre as diferentes correlações em relação as três espécies sob estudo, fato este que favorece a cópula normal com distribuições marginais normais (ou Modelo Clássico), pois o parâmetro de dependência desta cópula faz uso dos referidos coeficientes de correlação.

Destaca-se ainda, que para espécie *yellow tuna* todas as associações, significativas ou não, são positivas. Já para a espécie *striped seabream* há uma fraca correlação linear negativa entre os modelos VBGM e Gompertz ( $\rho=-0,316$ ) e Schnute Richards e Gompertz ( $\rho=-0,279$ ), não significativas ao nível de 5%; e também para a espécie *bigeye tuna*, há uma fraca correlação linear negativa entre os modelos Schnute-Richards e Gompertz ( $\rho=-0,094$ ) e entre os modelos Schnute-Richards e logístico ( $\rho=0,029$ ), não significativas ao nível de 5%.

Tabela 4 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards e os respectivos p-valor do teste de hipótese para espécie *yellow tuna*.

Modelos	VBGM	Gompertz	logístico	VBGM generalizado	Schnute-Richards
1 - VBGM	1,000	0,594	0,458	0,779	0,305
p-valor	—	0,070	0,183	0,008	0,392
2 - Gompertz	0,594	1,000	0,658	0,886	0,517
p-valor	0,070	—	0,039	0,001	0,126
3 - logístico	0,458	0,658	1,000	0,862	0,608
p-valor	0,183	0,039	—	0,001	0,062
4 - VBGM generalizado	0,779	0,886	0,862	1,000	0,576
p-valor	0,008	0,001	0,001	—	0,082
5 - Schnute Richards	0,305	0,517	0,608	0,576	1,000
p-valor	0,392	0,126	0,062	0,082	—

Os valores em negrito são significativos

Tabela 5 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards e os respectivos p-valor do teste de hipótese para a espécie *striped seabream*.

Modelos	VBGM	Gompertz	logístico	VBGM generalizado	Schnute Richards
1 - VBGM	1,000	-0,316	0,290	0,711	0,988
p-valor	—	0,542	0,577	0,113	0,000
2 - Gompertz	-0,316	1,000	0,329	0,111	-0,279
p-valor	0,542	—	0,525	0,834	0,592
3 - logístico	0,290	0,329	1,000	0,878	0,419
p-valor	0,577	0,525	—	0,021	0,408
4 - VBGM generalizado	0,711	0,111	0,878	1,000	0,799
p-valor	0,113	0,834	0,021	—	0,056
5 - Schnute Richards	0,988	-0,279	0,419	0,799	1,000
p-valor	0,000	0,592	0,408	0,056	—

Tabela 6 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards e os respectivos p-valor do teste de hipótese para a espécie *bigeye tuna*.

Modelos	VBGM	Gompertz	logístico	VBGM generalizado	Schnute Richards
1 - VBGM	1,000	0,578	0,867	0,951	0,463
p-valor	—	0,174	0,012	0,001	0,296
2 - Gompertz	0,578	1,000	0,757	0,716	-0,094
p-valor	0,174	—	0,049	0,070	0,842
3 - logístico	0,867	0,757	1,000	0,979	-0,029
p-valor	0,012	0,049	—	0,000	0,951
4 - VBGM generalizado	0,951	0,716	0,979	1,000	0,173
p-valor	0,001	0,070	0,000	—	0,710
5 - Schnute Richards	0,463	-0,094	-0,029	0,173	1,000
p-valor	0,296	0,842	0,951	0,710	—

Como foi mencionado no capítulo 2, a matriz de correlações de Pearson ( $\rho$ ) é uma medida de dependência do modelo clássico (MC), denotado por cópula normal, no caso específico em que as distriuições marginais seguem uma normal. Esta medida permite identificar se é viável ou não utilizar uma determinada cópula que capta apenas dependência positiva, apenas dependência negativa ou dependência negativa e positiva. Por exemplo, caso ocorra algum coeficiente negativo na matriz de correlações de Pearson não faz sentido utilizar uma cópula que capta apenas dependência positiva, pois de acordo com a caracterização desta cópula a medida de dependência terá sempre valores maiores que zero. Assim, para o caso de estudo (crescimento de peixes) referente a espécie *yellow tuna* em que os coeficientes de correlação de Pearson são todos positivos, a cópula Gumbel é viável, pois capta apenas dependência positiva, bem como a cópula Frank que capta dependências positivas e negativas. Já para a espécies *striped seabream* e *bigeye tuna* não é viável o uso da cópula Gumbel, pois as associações negativas apresentadas entre os modelos, mesmo sendo fracas e não significativas, impedem o ajuste desta cópula.

A Tabela 7 exhibe os p-valores dos testes de Kolmogorov-Smirnov (KS) e t-Student para as espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*. Para as três espécies, o teste KS para verificar a aderência de uma específica distribuição de probabilidade a um conjunto de valores revela que os resíduos de cada modelo individual (VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado, Schnute-Richard) seguem uma distribuição normal ao nível de significância de 5%. E no que diz respeito ao teste *t*, para investigar se os resíduos de cada modelo individual, em média, é igual a zero, ou seja, se não há viés. Observa-se que apenas o Gompertz rejeitou a hipótese nula ao nível de significância de 5%, ou seja, há viés nos erros deste modelo, enquanto os demais modelos (VBGM, Logístico, VBGM generalizado, Schnute-Richard) não há viés nos erros.

Tabela 7 – p-valor dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, com relação aos modelos individuais sob estudo - Espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*.

Modelos	<i>Yellow tuna</i>		<i>Striped seabream</i>		<i>Bigeye tuna</i>	
	KS	t-Student	KS	t-Student	KS	t-Student
1 - VBGM	0,289	0,212	0,867	0,818	0,880	0,916
2 - Gompertz	0,749	0,002	0,990	0,000	0,899	0,000
3 - logístico	0,947	0,692	0,834	0,840	0,999	0,775
4 - VBGM generalizado	0,788	0,978	0,971	0,831	0,985	0,765
5 - Schnute Richards	0,962	0,889	0,816	0,748	0,714	0,724

Os valores em negrito são significativos

Diante dos 5 modelos individuais abordados neste trabalho, foram elaborados 26 possíveis modelos combinados para estimar o crescimento dos peixes para cada espécie sob estudo (*yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*) via cópulas Gumbel e Frank. Para quantificar o melhor modelo utiliza-se o Erro Quadrático Médio (EQM). Para a espécie *yellow tuna*, o melhor modelo combinado proposto foi o que não incluiu na sua composição o modelo individual viesado Gompertz. Assim, os modelos combinados foram compostos pelos modelos individuais VBGM, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards. Destaca-se, ainda, que um modelo combinado utilizando apenas dois modelos individuais na sua composição, os modelos logístico e Schnute Richards, foi tão bom quanto este que agregou os quatro modelos individuais. Para as espécies *striped seabream* e *bigeye tuna* o melhor modelo combinado proposto agrega apenas dois modelos individuais em sua composição, os modelos Gompertz e logístico com relação a espécie *striped seabream*, e os modelos Gompertz e VBGM generalizado para a espécie *bigeye tuna*. Pode-se observar que para a espécie *yellow tuna*, a cópula Frank (EQM de 3,878) apresentou um melhor desempenho, comparado aos demais modelos individuais e combinados. Para a espécie *striped seabream* o melhor modelo foi o MC (EQM de 0,0168). E para a espécie *bigeye tuna*, o modelo com melhor desempenho foi a cópula Gumbel (EQM de 0,185). Em relação ao modelo combinado SA os resultados são menos atraentes, tanto apresenta o pior desempenho comparado aos demais modelos combinados quanto existe modelos individuais com desempenho melhor conforme cada espécie analisada. Os resultados são apresentados na Tabela 8 a seguir.



Tabela 8 – EQM dos modelos individuais e combinados referentes as espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*. Para a espécie *yellow tuna*, os modelos individuais logístico e Schnute Richards compõem estes estimadores; para a espécie *striped seabream* são os modelos Gompertz e logístico; e para a espécie *bigeye tuna* os modelos Gompertz e VBGM Generalizado.

Modelos	<i>Yellow tuna</i>	<i>Striped seabream</i>	<i>Bigeye tuna</i>
1 - VBGM	9,274	4,196	0,458
2 - Gompertz	15,218	364,725	184,442
3 - logístico	19,676	0,379	1,746
4 - VBGM generalizado	10,053	1,056	0,675
5 - Schnute Richards	5,494	6,357	3,625
Cópula Normal (MC)	4,610	0,017	3,656
Cópula Frank	3,878	2,003	10,250
Cópula Gumbel	4,681	0,223	0,185
SA	10,977	97,102	51,762

Observando o parâmetro de dependência dos modelos combinados via cópula Frank ( $\zeta$ ) e cópula Gumbel ( $\theta$ ), na Tabela 9, tem-se que ambos os parâmetros revelam que há dependência positiva entre os modelos individuais para cada espécie sob estudo.

Tabela 9 – Medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank para as espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*. Para a espécie *yellow tuna*, os modelos individuais logístico e Schnute Richards compõem estes estimadores; para a espécie *striped seabream* são os modelos Gompertz e logístico; e para a espécie *bigeye tuna* os modelos Gompertz e VBGM Generalizado.

Medidas de dependência	<i>Yellow tuna</i>	<i>Striped seabream</i>	<i>Bigeye tuna</i>
$\zeta$ - Cópula Frank	4,504	1,919	5,851
$\theta$ - Cópula Gumbel	1,452	1,222	1,899

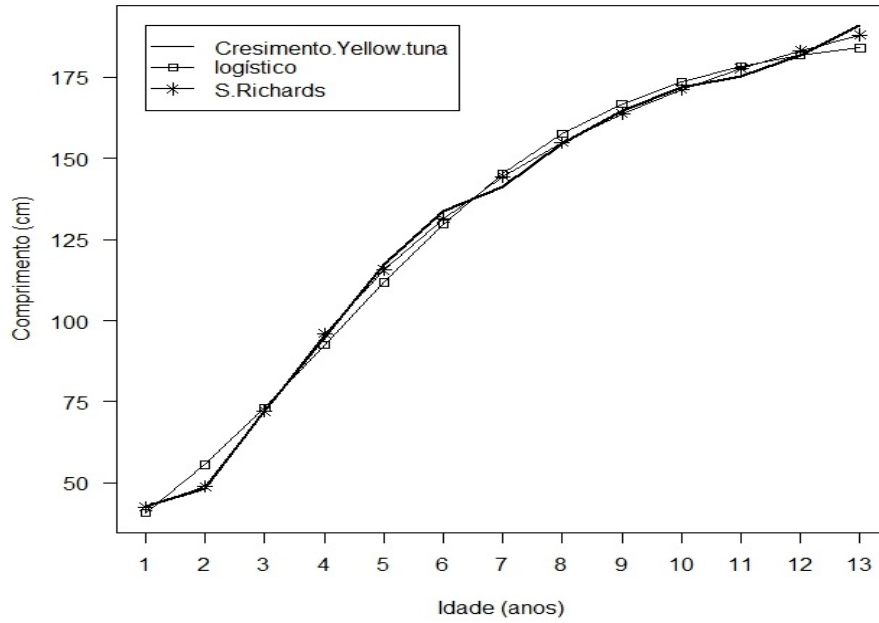
A Tabela 10 fornece os pesos do MC, um argumento quantitativo para o ranking dos modelos individuais. Para a espécie *yellow tuna*, o modelo Schnute Richards apresentou a maior contribuição para o desempenho do MC ( $w_1 = 1,128$ ) e o modelo logístico a menor contribuição ( $w_2 = -0,128$ ). Para as espécies *striped seabream* e *bigeye tuna* o menor peso foi para o modelo Gompertz ( $w_1 = -0,028$  e  $w_1 = -0,212$ , respectivamente) e o maior peso foi para o modelo logístico ( $w_2 = 1,028$ ) em relação a espécie *striped seabream* e o VBGM generalizado para a espécie *bigeye tuna* ( $w_2 = 1,212$ ).

Tabela 10 – Pesos dos modelos individuais para cópula normal (MC) - Espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*.

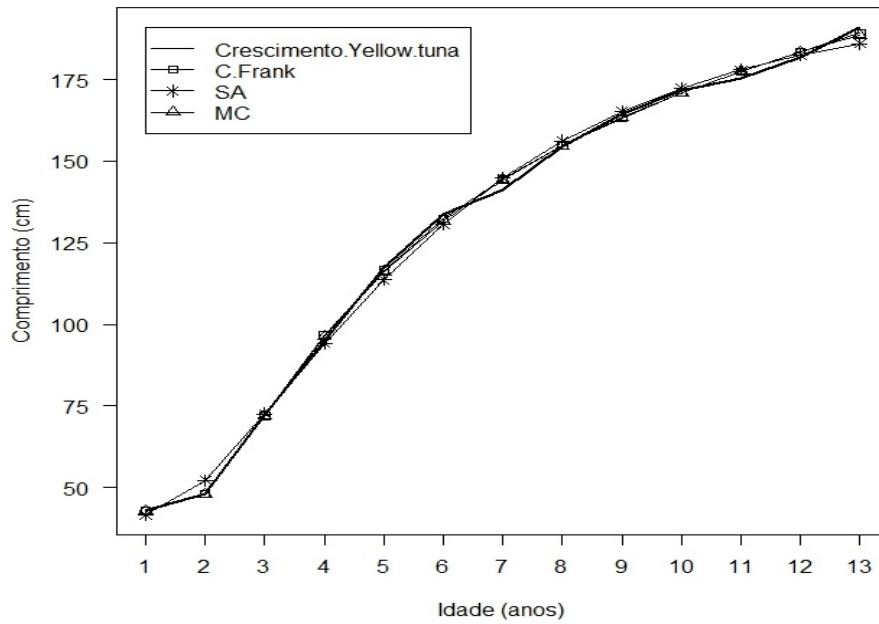
Espécies	Modelos	MC pesos ( $w_i$ )
<i>Yellow tuna</i>	3 - logístico	-0,128
	5 - Schnute Richards	1,128
<i>Striped seabream</i>	3 - logístico	1,028
	2 - Gompertz	-0,028
<i>Bigeye tuna</i>	4 - VBGM generalizado	1,212
	2 - Gompertz	-0,212

Portanto, pelos pesos da cópula normal com marginais normais (ou MC) observa-se qual modelo individual contribui mais para o melhor desempenho deste modelo combinado. Já para as demais cópulas a importância dos modelos individuais é revelada pelo EQM do modelo combinado proposto, na qual pode acontecer de que ao ser retirado um modelo individual, o EQM desse modelo combinado apresente um melhor desempenho.

As Figuras 5 a 7 a seguir, ilustram as previsões dos modelos individuais e combinados referentes as espécies *yellow tuna*, *striped seabream* e *bigeye tuna*. Para espécie *yellow tuna*, os modelos individuais logístico e Schnute Richards compõem estes estimadores; para a espécie *striped seabream* são os modelos Gompertz e logístico; e para a espécie *bigeye tuna* os modelos Gompertz e VBGM Generalizado. Para cada caso, optou-se por mostrar apenas uma cópula não-linear (cópula Frank ou Gumbel) sendo exibida aquela que apresentou o melhor desempenho comparado aos demais modelos combinados e individuais.

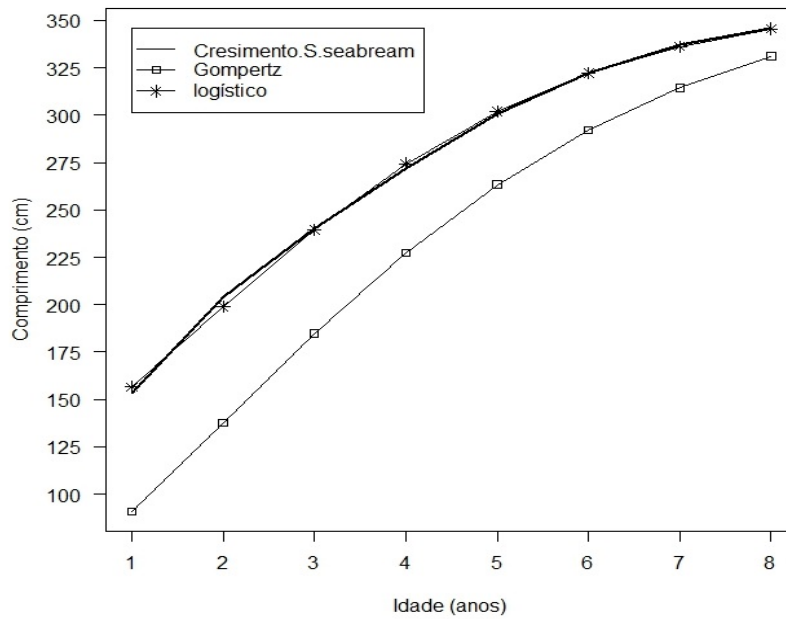


(a) Previsões dos modelos logístico e Schnute Richards para série yellow tuna.

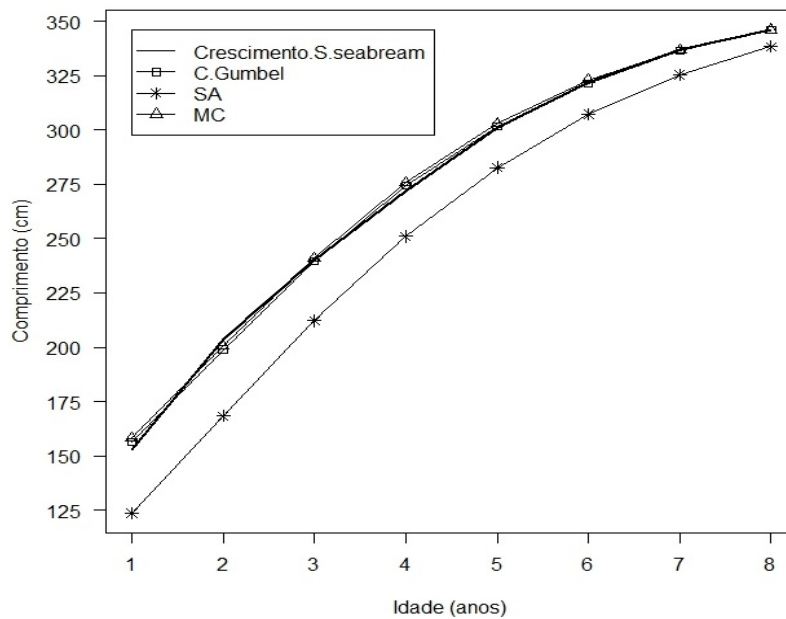


(b) Previsões dos modelos combinados Cópula Frank, MC e SA para série yellow tuna.

Figura 5 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série de crescimento de peixes da espécie *yellow tuna*.

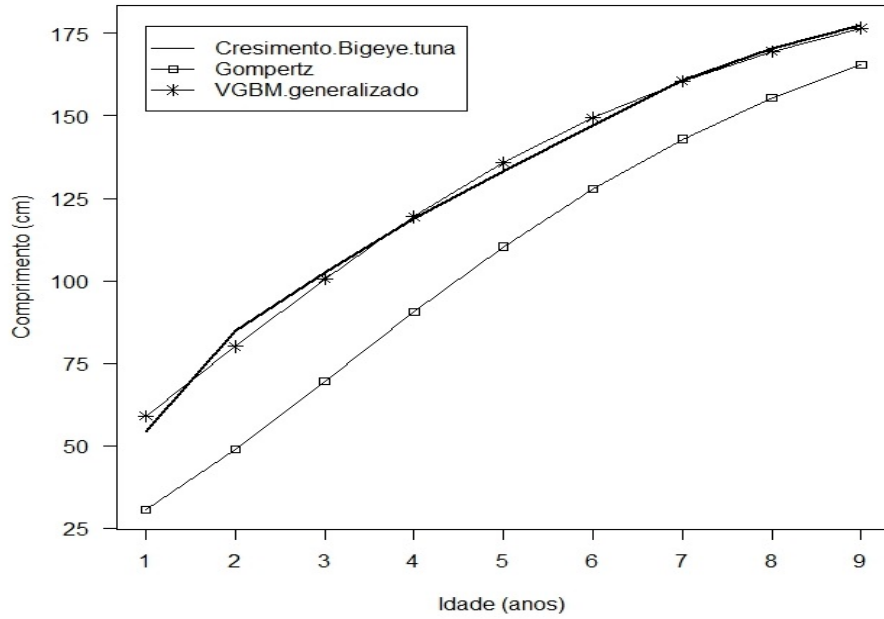


(a) Previsões dos modelos Gompertz e logístico para série striped seabream.

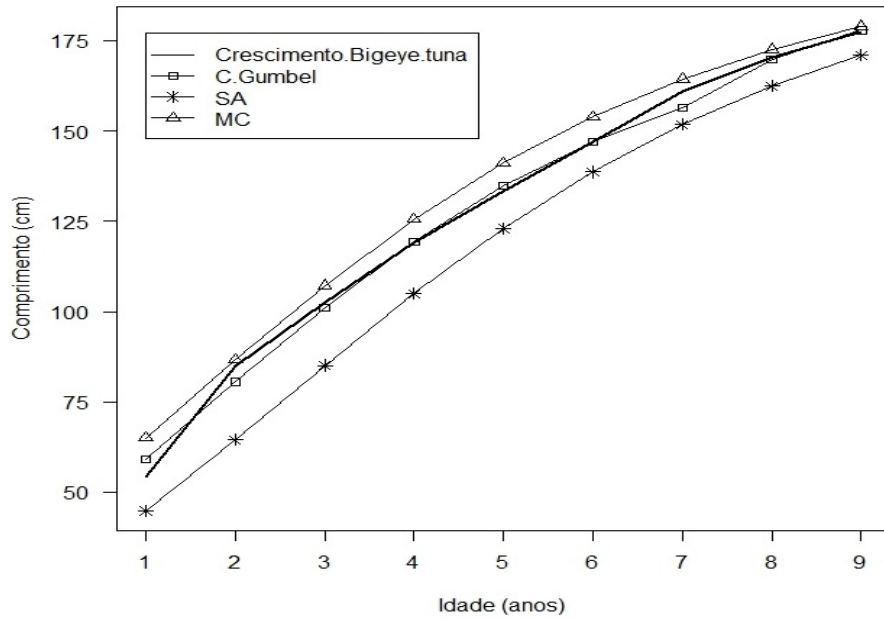


(b) Previsões dos modelos combinados Cópula Gumbel, MC e SA para série striped seabream.

Figura 6 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série de crescimento de peixes da espécie *striped seabream*.



(a) Previsões dos modelos Gompertz e VGBM generalizado para série bigeye tuna.



(b) Previsões dos modelos combinados Cópula Gumbel, MC e SA para série bigeye tuna.

Figura 7 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série de crescimento de peixes da espécie *bigeye tuna*.

## 4.2 Séries financeiras: Nasdaq (ND), Google(GG), S&P500 (SP) e Dow Jones (DJ)

### 4.2.1 Descrição dos dados

Quatro fenômenos financeiros são considerados: o Índice Nasdaq (ND), o Valor de Ações Google (GG), o Índice S&P500 (SP) e o Índice Dow Jones (DJ). A Tabela 11 apresenta as propriedades básicas de cada série temporal.

Tabela 11 – Propriedades básicas das séries temporais reais (ND, GG, SP, DJ) para estudos do modelo combinado proposto.

Propriedades	ND	GG	SP	DJ
Unidade de tempo	dias	dias	meses	dias
Data inicial	20/02/2001	30/07/2008	01/05/1995	07/07/2008
Data inicial (previsão)	26/08/2003	20/11/2008	01/05/2006	09/01/2009
Data final	25/06/2004	30/12/2008	01/12/2009	13/03/2009
Tamanho total da série (n+m)	840	107	176	174
Tamanho da série para ajuste (n)	630	80	132	130
Tamanho da série para previsão (m)	210	27	44	44

Logo, 75% das observações de cada série são usadas para ajuste dos modelos, e os últimos 25% dos pontos foram deixados para previsão.

São utilizados três modelos individuais de previsão que possivelmente irão compor o melhor modelo combinado proposto. O primeiro modelo individual é baseado em Redes Neurais Artificiais (RNAs) do tipo *Multilayer Perceptron* (HAYKIN; NETWORK, 1999), o modelo resultante é nomeado de ANN (*Artificial Neural Network*). O segundo é obtido via metodologia "*Time-delay Added Evolutionary Forecasting*" (TAEF) (FERREIRA; VASCONCELOS; ADEODATO, 2008) sendo chamado de TAEF. Este modelo resulta da busca por uma ótima Rede Neural Artificial para resolver o problema de previsão de séries temporais. O terceiro baseia-se no algoritmo proposto por Hyndman e Khandakar (2007) para calcular o melhor modelo auto-regressivo integrado de média móvel (ARIMA) ajustado a uma série temporal, de acordo com um determinado critério de informação (Akaike, Akaike corrigido ou Bayesiano), este modelo é denominado de ARIMA.

O desempenho dos modelos alternativos é estudado de acordo com suas previsões do tipo "*um passo a frente*". Assim, a predição do  $i$ -ésimo preditor para  $u_t$  é baseado na série anterior  $((u_1, e_{i,1}), \dots, (u_{t-1}, e_{i,t-1}))$ . Conforme Firmino, Neto e Ferreira (2014), em uma tentativa de melhorar os modelos ANN e TAEF, os valores das séries DJ e SP foram normalizados.

Todas as estratégias individuais (ANN, TAEF e ARIMA) baseiam suas inferências na busca do melhor modelo subjacente ao fenômeno em estudo. Segundo [Firmino, Neto e Ferreira \(2014\)](#), o custo computacional em termos de tempo e memória do método TAEF é maior que o de ANN e de ARIMA e, como demonstrado pelos referidos autores, o modelo TAEF tende a ser mais acurado e eficiente em termos estatísticos do que os outros dois modelos. Destaca-se também que o modelo ARIMA possui a limitação de conduzir apenas previsões lineares. De qualquer modo, pode ser de interesse estudar a importância desses modelos, como eles interagem entre si, e se eles capturam adequadamente o comportamento do fenômeno de interesse. Estas questões podem ser tratadas por meio da abordagem proposta, tal como ilustrado a seguir quando são levados em consideração os quatro fenômenos do mundo real (ND, GG, SP e DJ).

Além dos modelos individuais e dos modelos combinados via cópulas, o presente trabalho também apresenta o desempenho da bem conhecida estratégia de combinação *Simple Average* (SA). Esta estratégia tem sido uma das principais técnicas de combinação na literatura de previsão de séries temporais ([FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014](#)).

#### 4.2.2 Resultados do experimento

Calculados os erros dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA para as séries temporais ND, GG, SP e DJ, a Tabela 12 ilustra estatísticas descritivas (EST.DESCR) dos resíduos. Observa-se que em relação à série temporal ND tem-se que os resíduos referentes ao modelo ANN apresenta uma maior variabilidade e a do modelo TAEF, uma menor variabilidade. A série GG o modelo ARIMA exibe a maior variabilidade e o modelo TAEF a menor variabilidade. Para as séries SP e DJ, o modelo ANN retrata uma maior variabilidade e o TAEF uma menor variabilidade. Portanto, na maioria dos casos, o modelo ANN se apresenta estatisticamente menos eficiente que os demais modelos. Já o modelo TAEF se apresenta estatisticamente mais eficiente que os demais modelos em todos os casos. No Apêndice C, as Tabelas 39 a 42, mostram o sumário descritivo dos respectivos modelos individuais para cada série temporal (ND, GG, SP e DJ) e nas Figuras 40 a 51 do Apêndice D estão os histogramas das respectivas distribuições.

Tabela 12 – Estatísticas descritivas dos resíduos dos modelos individuais (nomeia-se: 1-ANN, 2-TAEF e 3-ARIMA) para cada série temporal sob estudo (ND, GG, SP e DJ)

EST.DESCR	ND			GG			SP			DJ		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\mu$	-36,510	-0,010	1,481	-0,035	0,689	2,537	-0,008	-0,002	-0,000	0,021	0,001	0,001
$\sigma$	44,717	0,004	37,733	2,505	1,973	14,982	0,042	0,003	0,010	0,052	0,017	0,038

A Tabela 13 mostra o resumo dos resultados da matriz de correlações de Pearson (Apêndice E, Tabelas 44 a 47) e os respectivos p-valor dos testes de hipóteses sobre os referentes coeficientes de correlação. Destaca-se para cada caso:

1. Série ND - Há uma forte correlação linear positiva entre os modelos ANN e ARIMA (0,745), razoável correlação linear negativa entre o ARIMA e o TAEF (-0,286) e baixa correlação linear positiva entre o ANN e o TAEF (0,189). Todas as associações apresentam significância estatística ao nível de 5%.

2. Série GG - Ocorre uma forte correlação linear positiva entre os modelos ANN e TAEF (0,722), baixa correlação linear negativa entre o ARIMA e o ANN (-0,186) e entre ARIMA e TAEF não houve correlação significativa. O nível de significância (n.s) adotado foi de 10%.

3. Série SP - Apresenta uma razoável correlação linear positiva entre os modelos ANN e TAEF (0,432), baixa correlação linear positiva entre TAEF e ARIMA (0,190) e para ANN e ARIMA não houve correlação significativa. O nível de significância adotado foi de 5%.

4 - Série DJ - Há uma boa correlação linear positiva entre ANN e ARIMA (0,471) e uma baixa correlação linear positiva entre os modelos ANN e TAEF (0,198) e os modelos TAEF e ARIMA(0,214). Todas as correlações apresentam significância estatística ao nível de 5%.

Tabela 13 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA para cada série temporal sob estudo

Correlações	ND	GG	SP	DJ
ANN e TAEF	0,189	0,722	0,432	0,198
p-valor	0,000	0,000	0,000	0,024
ANN e ARIMA	0,745	-0,186	-0,032	0,471
p-valor	0,000	0,099	0,713	0,024
TAEF e ARIMA	-0,286	-0,075	0,190	0,214
p-valor	0,000	0,508	0,029	0,014

Logo, ocorre uma grande variação entre os diferentes resultados dos coeficientes de correlação de Pearson para cada caso, favorecendo o uso do MC nos referidos casos. De acordo com os resultados obtidos na matriz de correlações ( $\rho$ ) observa-se que a cópula Gumbel é viável apenas para o fenômeno DJ, pois esta cópula capta apenas dependência positiva.

As Tabelas 14 a 17 revelam os p-valores dos testes de Kolmogorov- Smirnov (KS) e t-Student ( $t$ ). O teste KS revela que os modelos ANN, TAEF e ARIMA seguem uma



normal sobre as séries GG, SP e DJ. Para a série temporal ND, o modelo ANN e ARIMA também seguem uma normal, mas o modelo TAEF tem-se uma lognormal. No que diz respeito ao teste  $t$ , para verificar se a distribuição dos erros, em média, considerando-se erros multiplicativos, é igual a zero, ou seja, se não há viés. Observa-se que o modelo ARIMA não apresentou viés em relação a todas as séries temporais sob estudo (ND, GG, SP e DJ), o modelo TAEF não ocorre viés apenas em relação a série temporal DJ e o modelo ANN não há viés apenas para série GG. O nível de significância adotado em ambos os testes foi de 5%.

Tabela 14 –  $p$ -valor dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para checar a normalidade dos modelos ANN e ARIMA (erros aditivos) e a log-normalidade do modelo TAEF (erro multiplicativo) e t-Student para verificação de viés dos modelos ANN, ARIMA e TAEF, com relação a série temporal ND.

Modelos	Teste Kolmogorov- Smirnov (KS)	Teste t-Student ( $t$ )
1 - ANN	0,119	0,000
2 - TAEF	0,062	0,000
3 - ARIMA	0,397	0,325

Tabela 15 –  $p$ -valor dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA em relação a série GG.

Modelos	Teste Kolmogorov- Smirnov (KS)	Teste t-Student ( $t$ )
1 - ANN	0,784	0,900
2 - TAEF	0,214	0,003
3 - ARIMA	0,479	0,134

Tabela 16 –  $p$ -valor dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA em relação a série SP.

Modelos	Teste Kolmogorov- Smirnov (KS)	Teste t-Student ( $t$ )
1 - ANN	0,064	0,000
2 - TAEF	0,145	0,000
3 - ARIMA	0,595	0,679

Tabela 17 – *p-valor* dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA em relação a série DJ.

Modelos	Teste Kolmogorov- Smirnov (KS)	Teste t-Student (t)
1 - ANN	0,618	0,000
2 - TAEF	0,325	0,430
3 - ARIMA	0,886	0,805

Portanto, utiliza-se as distribuições melhor ajustadas aos erros dos modelos individuais (ANN, TAEF e ARIMA) na obtenção dos modelos combinados propostos. Com relação a composição destes modelos combinados, todos os modelos individuais são considerados para dar continuidade ao trabalho dos autores [Firmino, Neto e Ferreira \(2014\)](#).

Para quantificar o melhor modelo para cada fenômeno estudado (ND, GG, SP e DJ), a Tabela 18 apresenta o EQM dos estimadores combinados propostos e demais modelos. As séries temporais ND e GG, o modelo combinado via cópula Frank exibe um melhor desempenho comparado aos demais modelos, os resultados foram respectivamente 28,311180 e 3,803104. Para a série SP, o destaque foi para os modelos combinados MC e cópula Frank, contudo, o MC (EQM de 0,000025) obteve um melhor desempenho comparado a cópula Frank (EQM de 0,000026). Por fim, a série DJ, o melhor modelo combinado também foi o MC (EQM de 0,000117). Dessa forma, destaca-se a acurácia e precisão ora pela cópula Frank, ora pela cópula MC.

No trabalho de [Firmino, Neto e Ferreira \(2014\)](#) evidencia-se que o MC superou os modelos ANN, TAEF, ARIMA e SA para os quatro fenômenos sob estudo (ND, GG, SP e DJ). Na presente tese, o modelo combinado proposto via cópula apresentou melhor desempenho para as séries ND e GG, enquanto para as séries SP e DJ o modelo combinado MC se destaca em relação aos demais modelos.

Tabela 18 – EQM dos modelos individuais e combinados em relação as séries temporais ND, GG, SP e DJ. Os modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA compõem os estimadores combinados.

EQM	ND	GG	SP	DJ
1 - ANN	4917,047970	5,686393	0,013195	0,015686
2 - TAEF	562,047210	3,972244	0,000030	0,000128
3 - ARIMA	564,124640	125,510678	0,000147	0,000511
Cópula Normal (MC)	561,783600	3,815478	0,000025	0,000117
Cópula Frank	28,311180	3,803104	0,000026	0,000201
Cópula Gumbel	—	—	—	0,000275
SA	1142,766750	15,352770	0,001528	0,001895

Vale a pena enfatizar que a estratégia amplamente conhecida SA, em que o peso dos modelos individuais é constante, pode levar a resultados menos atraentes. O EQM para o SA foi maior comparado aos demais modelos combinados e dois modelos individuais dentre os três envolvidos para cada caso em estudo (ND, GG, SP, DJ), como visto na Tabela 18.

Na Tabela 19, observando o parâmetro de dependência dos modelos combinados cópula de Frank ( $\zeta$ ) e cópula Gumbel ( $\theta$ ), tem-se que ambos os parâmetros revelam que há dependência positiva entre os modelos individuais.

Tabela 19 – Medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank de acordo com o fenômeno sob estudo

Medidas de dependência	ND	GG	SP	DJ
$\zeta$ - cópula Frank	1,505	1,348	1,062	2,043
$\theta$ - cópula Gumbel	—	—	—	1,210

A Tabela 20 fornece os pesos da cópula normal com marginais normais (ou MC), revelando assim a importância dos modelos individuais para o desempenho do MC. De acordo com os resultados, o modelo TAEF apresenta a maior contribuição para o MC comparado aos demais modelos. Os modelos ANN e ARIMA apresentam uma pequena contribuição, mas é mantido na construção do modelo proposto pelo fato de serem diferente de zero.

Tabela 20 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico em relação as séries ND, GG, SP e DJ

Pesos MC ( $w_i$ )	ND	GG	SP	DJ
ANN	-0,00008	0,14980	-0,02723	0,00996
TAEF	0,99998	0,82109	1,00713	0,89778
ARIMA	0,00010	0,02911	0,02975	0,09226

Na busca de desvendar mais resultados, fazendo uso da abordagem proposta e diante dos modelos individuais utilizados para cada fenômeno sob estudo (séries ND, GG, SP e DJ), foram elaborados todas as possíveis combinações com dois modelos individuais. Assim, para cada série financeira são elaborados 3 possíveis modelos combinados. Conclui-se que em todos os fenômenos financeiros em que os modelos combinados via cópula Frank e Gumbel são gerados com dois modelos individuais na sua composição, apresentaram melhor desempenho comparados aos modelos combinados construídos com três modelos individuais. Assim, para as séries ND, GG e SP o modelo combinado via cópula Frank

obteve um melhor desempenho comparado aos demais modelos combinados e individuais, os resultados dos Erros Quadráticos Médios (EQMs) foram respectivamente 24,561140, 2,437014 e 0,000024. Em relação a série DJ o modelo combinado com melhor desempenho foi o MC (EQM de 0,000118) e em seguida a cópula Gumbel (EQM de 0,000119) com uma pequena diferença entre eles. Veja Tabela 21 a seguir.

Tabela 21 – EQM dos modelos individuais (ANN, TAEF e ARIMA) e combinados (cópulas MC, Frank e Gumbel) em relação às séries temporais ND, GG, SP e DJ. Para as séries temporais ND e SP, os modelos individuais ANN e TAEF compõem esses estimadores; e para as séries temporais GG e DJ são os modelos individuais TAEF e ARIMA.

EQM	ND	GG	SP	DJ
1 - ANN	4917,047970	5,686393	0,013195	0,015686
2 - TAEF	562,047210	3,972244	0,000030	0,000128
3 - ARIMA	564,124640	125,510678	0,000147	0,000511
Cópula Normal (MC)	505,114500	3,764863	0,000025	0,000118
Cópula Frank	24,561140	2,437014	0,000024	0,000132
Cópula Gumbel	28,899870	—	0,000026	0,000119
SA	2142,541720	31,510293	0,003458	0,000185

Observando o parâmetro de dependência dos modelos combinados via cópula Frank ( $\zeta$ ) e cópula Gumbel ( $\theta$ ), na Tabela 22, tem-se que ambos os parâmetros revelam que há dependência positiva entre os modelos individuais para as séries ND, SP e DJ. Já a série GG a medida de dependência para cópula Frank foi negativa. Evidencia-se que mesmo com menos modelos individuais na composição dos modelos combinados via cópula Frank e Gumbel pode-se ter uma medida de dependência maior. Por exemplo, para série SP quando o modelo combinado via cópula Frank agregava três modelos individuais, a medida de dependência foi 1,062 e agregando dois modelos individuais é 2,744. Esta série foi a única em que o modelo combinado com melhor desempenho era um e passou a ser outro, isto é, quando há dois modelos individuais na agregação, a cópula Frank passa a apresentar o melhor desempenho. Portanto, agregando apenas dois modelos individuais sob estudo, das quatro séries financeiras analisadas (ND,GG,SP e DJ), três delas, as séries ND, GG e SP, o modelo combinado via cópula Frank apresenta o melhor desempenho em relação aos modelos individuais e combinados.

Tabela 22 – Medida de dependência da cópula Frank e da cópula Gumbel. Para as séries temporais ND e SP, os modelos individuais ANN e TAEF compõem esses estimadores combinados; e para as séries temporais GG e DJ são os modelos individuais TAEF e ARIMA.

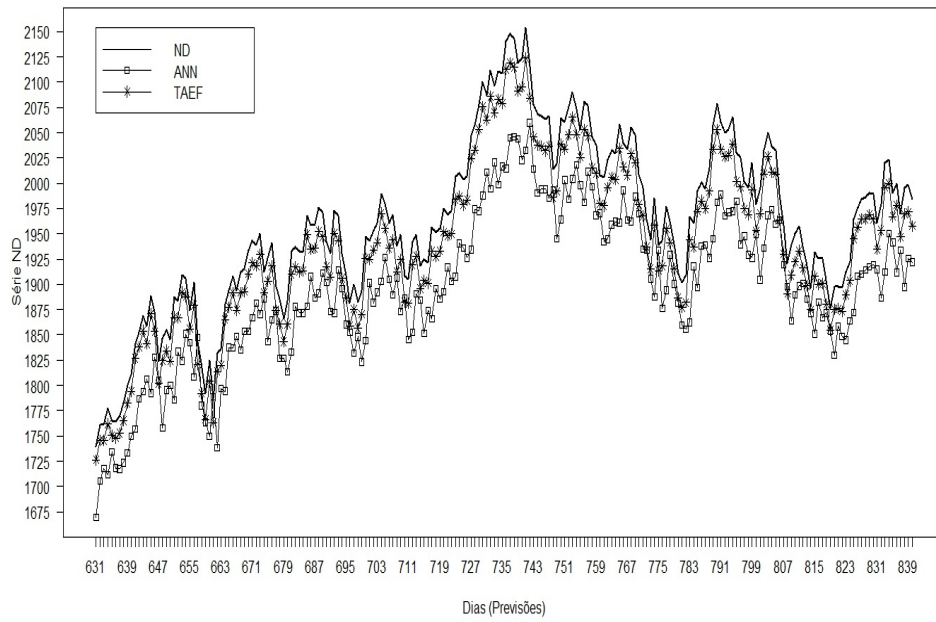
Medidas de dependência	ND	GG	SP	DJ
$\zeta$ - Cópula Frank	1,381	-0,379	2,744	1,783
$\theta$ - Cópula Gumbel	1,138	—	1,184	1,191

A Tabela 23 fornece os pesos da cópula normal (MC) para as séries ND, GG, SP e DJ, quando o MC agrega apenas dois modelos individuais. Destaca-se que o melhor modelo combinado tem sempre em sua composição o modelo o TAEF, sendo este modelo o que apresenta a maior contribuição para o MC comparado aos demais modelos individuais.

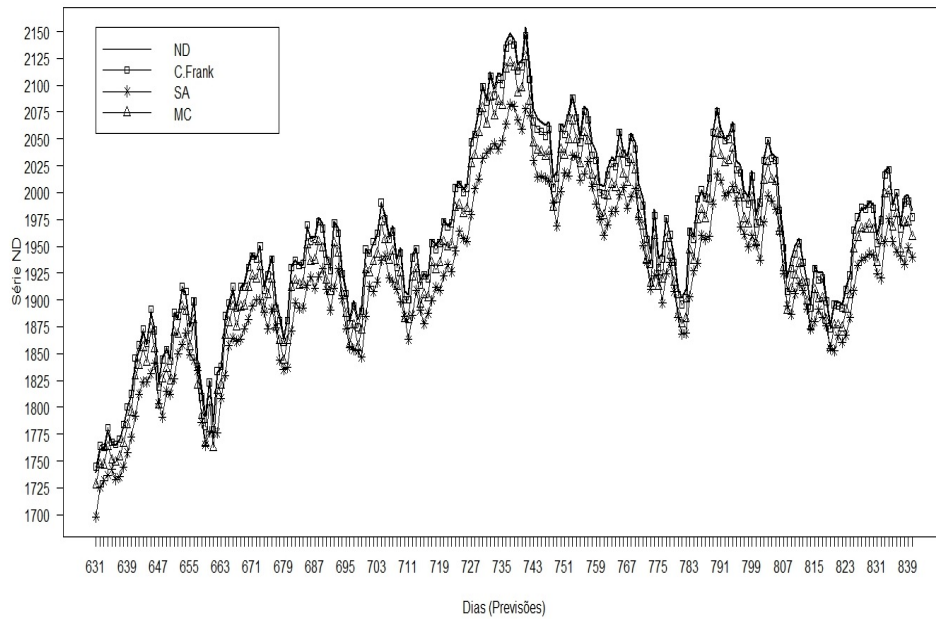
Tabela 23 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico (MC). Para as séries temporais ND e SP, os modelos individuais ANN e TAEF compõem o MC; e para as séries temporais GG e DJ são os modelos individuais TAEF e ARIMA.

MC pesos ( $w_i$ )	ND	GG	SP	DJ
1 - ANN	-0,030	—	-0,028	—
2 - TAEF	1,030	0,974	1,028	0,902
3 - ARIMA	—	0,026	—	0,098

As Figuras 8 e 9 a seguir, ilustram as previsões dos modelos individuais e combinados (envolvendo dois modelos individuais na agregação) para as séries ND e GG. A série ND, os modelos individuais ANN e TAEF compõem os estimadores combinados e a série GG os modelos TAEF e ARIMA. Para cada caso, foi exibida apenas a cópula não-linear (cópula Frank ou Gumbel) que apresentou o melhor desempenho comparado aos demais modelos combinados e individuais.

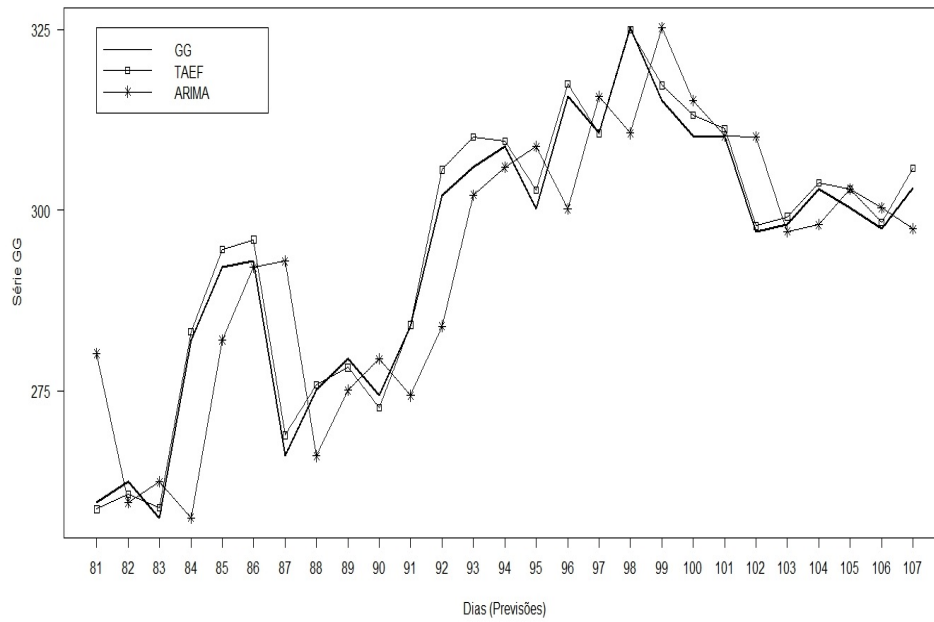


(a) Previsões dos modelos ANN e TAEF para série ND.

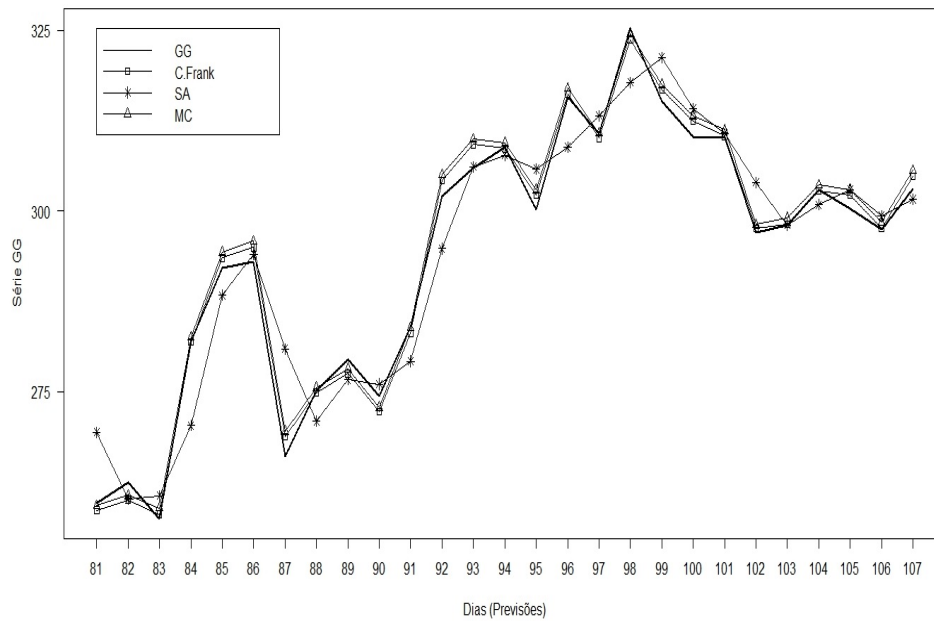


(b) Previsões dos modelos combinados Cópula Frank, MC e SA para série ND.

Figura 8 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série ND.



(a) Previsões dos modelos TAEF e ARIMA para série GG.



(b) Previsões dos modelos combinados Cópula Frank, MC e SA para série GG.

Figura 9 – Previsões dos modelos individuais e combinados para a série GG.

## 4.3 Série de precipitação

### 4.3.1 Descrição dos dados

Os dados utilizados são da série histórica de precipitação na região metropolitana de Recife, no período de 1982 a 2012. Foram obtidos na Agência Pernambucana de Águas e Climas (APAC). A série é composta de 369 observações. A Tabela 24 abaixo apresenta as propriedades desta série temporal real.

Tabela 24 – Propriedades da série temporal real para estudo do modelo combinado proposto.

Propriedades	Fenômeno: Precipitação
Unidade de tempo	meses
Data inicial	01/04/1982
Data inicial (previsão)	01/11/2006
Data final	01/12/2012
Tamanho total da série (n+m)	369
Tamanho da série para ajuste (n)	295
Tamanho da série para previsão (m)	74

Logo, 80% das observações da série são usadas para ajuste dos modelos, e os últimos 20% dos pontos foram deixados para previsão.

### 4.3.2 Resultados do experimento

Calculados os erros dos modelos individuais GARCH (1,1), GARCH (1,2), GARCH (1,3), GARCH (2,1), GARCH(2,2), GARCH(2,3), GARCH (3,1), GARCH(3,2) e GARCH(3,3), denotados por garch11, garch12, garch13, garch21, garch22, garch23, garch31, garch32 e garch33, respectivamente, a Tabela 25 ilustra estatísticas descritivas (EST.DESCR) dos resíduos. Observa-se que o modelo garch11 apresenta uma maior variabilidade e o modelo garch33 a menor variabilidade. No Apêndice C, a Tabela 43 mostra o sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais e no Apêndice D estão os respectivos histogramas, Figuras 52 a 60.

Tabela 25 – Estatísticas descritivas dos resíduos dos modelos individuais.

EST.DESCR	garch11	garch12	garch13	garch21	garch22	garch23	garch31	garch32	garch33
$\mu$	-0,001	0,001	0,001	-0,001	0,001	0,001	-0,001	0,001	0,001
$\sigma$	0,979	0,980	0,994	0,996	0,996	1,007	1,002	1,009	1,021



A Tabela 26 apresenta os resultados da matriz de correlações lineares de Pearson ( $\rho$ ) e os respectivos p-valor dos testes de hipóteses sobre os referentes coeficientes de correlação. Constata-se uma forte correlação linear positiva entre todos os modelos ao nível de significância de 5%. Este fato favorece a cópula normal (MC), pois o parâmetro de dependência desta cópula faz uso dos referidos coeficientes de correlação.

Tabela 26 – Correlações entre os resíduos dos modelos individuais e os respectivos p-valor do teste de hipótese.

Modelos	garch11	garch12	garch13	garch21	garch22	garch23	garch31	garch32	garch33
garch11	1	1,000	0,999	1,000	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999
p-valor	—	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
garch12	1,000	1	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
p-valor	0,000	—	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
garch13	0,999	1,000	1	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000
p-valor	0,000	0,000	—	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
garch21	1,000	0,999	0,999	1	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999
p-valor	0,000	0,000	0,000	—	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
garch22	0,999	1,000	1,000	0,999	1	1,000	1,000	1,000	1,000
p-valor	0,000	0,000	0,000	0,000	—	0,000	0,000	0,000	0,000
garch23	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000	1	0,999	1,000	1,000
p-valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	—	0,000	0,000	0,000
garch31	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	1	1,000	0,999
p-valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	—	0,000	0,000
garch32	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	1	1,000
p-valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	—	0,000
garch33	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000	1
p-valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	—

Na Tabela 27 temos os p-valores dos testes de Kolmogorov-Smirnov (KS) e t-Student ( $t$ ). O teste KS para verificar a aderência de uma específica distribuição de probabilidade a um conjunto de valores e o teste  $t$ , para investigar se os resíduos de cada modelo individual, em média, é igual a zero, ou seja, se não há viés. Verifica-se que os resíduos de cada modelo individual (garch11, garch12, garch13, garch21, garch22, garch23, garch31, garch32 e garch33) seguem uma distribuição normal, ao nível de significância (n.s) de 1%. E no que diz respeito ao teste  $t$  tem-se que todos os modelos individuais são não viesados, aos níveis de 1%, 5%, 10% e 20%.

Tabela 27 – p-valor dos testes de hipóteses: Kolmogorov-Smirnov (KS) para normalidade e t-Student para verificação de viés, com relação aos modelos individuais sob estudo.

Modelos	Teste Kolmogorov-Smirnov (KS)	Teste t-Student (t)
garch11	0,013	0,983
garch12	0,012	0,992
garch13	0,011	0,991
garch21	0,012	0,987
garch22	0,012	0,988
garch23	0,010	0,984
garch31	0,014	0,985
garch32	0,012	0,989
garch33	0,011	0,987

Diante dos nove modelos individuais abordados neste estudo foram selecionados cinco modelos mais parcimoniosos, são eles: garch11, garch12, garch13, garch21 e garch31, para elaboração dos possíveis modelos combinados. Dessa forma, foram contruídos 26 possíveis estimadores combinados via cópulas Gumbel e Frank. Em relação aos resultados obtidos pelo EQM, o melhor modelo combinado proposto foi o que inclui na sua composição três modelos individuais, o garch11, garch21 e garch31. Dessa forma, pode-se observar que a cópula Frank (EQM de 0,063) obteve um melhor desempenho em relação aos modelos individuais e combinados.

Tabela 28 – EQM dos modelos individuais e combinados. Os modelos garch11, garch21 e garch31 compõem os estimadores combinados.

Modelos	EQM
garch11	0,857
garch12	0,856
garch13	0,877
garch21	0,882
garch22	0,883
garch23	0,898
garch31	0,897
garch32	0,907
garch33	0,927
Cópula Normal (MC)	0,095
Cópula Frank	0,063
Cópula Gumbel	0,370
SA	0,878

Observando o parâmetro de dependência dos modelos combinados via cópula Frank ( $\zeta$ ) e cópula Gumbel ( $\theta$ ), na Tabela 29, tem-se que ambos os parâmetros revelam que há

dependência positiva entre os modelos individuais garch11, garch21 e garch31. Os valores para a cópula Frank e Gumbel são respectivamente 738,327 e 101,353.

Tabela 29 – Medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank. Os modelos garch11, garch21 e garch31 compõem os estimadores combinados.

Medidas de dependência	Estimativas
$\zeta$ - Cópula Frank	738.327
$\theta$ - Cópula Gumbel	101.353

A Tabela 30 fornece os pesos da cópula normal (MC), revelando a importância dos modelos individuais para o desempenho do MC. De acordo com os resultados, o modelo garch11 ( $w_1 = 41,017$ ) apresenta a maior contribuição para o MC comparado aos demais modelos.

Tabela 30 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico (MC). Os modelos garch11, garch21 e garch31 compõem o MC

Modelos	MC pesos ( $w_i$ )
garch11	41,017
garch21	-4,390
garch31	-35,627

Todavia, destaca-se que a cópula normal (MC) apresentou um melhor desempenho comparado a todos os possíveis modelos combinados e individuais quando leva em consideração os nove modelos individuais GARCH em sua composição. A tabela 31, mostra o EQM dos modelos combinados e medida de dependência da cópula Gumbel e Frank, quando os modelos combinados compõem os 9 modelos GARCH (garch11, garch12, garch13, garch21, garch22, garch23, garch31, garch32 e garch33). O EQM do MC foi bem menor (EQM de 0,00014) e o da cópula Frank (EQM de 0,063) e Gumbel (EQM de 0,74253) aumentaram, evidenciando que a medida de dependência para cópula Frank e Gumbel diminuíram (os valores passaram a ser 423,660 e 49,401, respectivamente). Em relação ao modelo SA (EQM de 0,88643), o desempenho foi pior comparado aos demais modelos combinados e os modelos individuais garch11 (EQM de 0,857), garch12 (EQM de 0,856), garch13 (EQM de 0,877), garch21 (EQM de 0,882) e garch22 (EQM de 0,883).

Tabela 31 – EQM dos modelos combinados e medida de dependência da cópula Gumbel e da cópula Frank. Os 9 modelos GARCH compõem os estimadores combinados.

Modelos	EQM	Medidas de dependência
Cópula Normal (MC)	0,00014	$\rho =$ Tabela 26
Cópula Frank	0,23050	$\zeta = 423,660$
Cópula Gumbel	0,74253	$\theta = 49,401$
SA	0,88643	—

A Tabela 32 fornece os pesos do MC quando agrega os 9 modelos GARCH. Destaca-se que o modelo garch22 (-39,052) apresentou a maior contribuição e o modelo garch32 a menor contribuição (-2,155).

Tabela 32 – Pesos dos modelos individuais para o modelo clássico (MC). Os 9 modelos GARCH compõem o MC

Modelos	MC pesos ( $w_i$ )
garch11	8,776
garch12	38,369
garch13	8,524
garch21	8,963
garch22	-39,052
garch23	4,210
garch31	-23,310
garch32	-2,155
garch33	-3,315

## 5 Conclusões

A combinação de modelos de previsão de séries temporais tem mostrado sua importância pelo fato de tender a promover estimadores estatisticamente superiores quando comparados aos modelos individuais. Nesse contexto, surge cópulas que permitem construir a distribuição conjunta dos respectivos modelos a serem combinados, dando margem à obtenção de estimadores de máxima verossimilhança associados à agregação de modelos ajustados a mesma série temporal.

Nesta tese foi avaliado o desempenho destes estimadores combinados via cópulas Frank e Gumbel, que se desvinculam da suposição de normalidade da distribuição dos erros dos modelos individuais, configurando-se como uma combinação não-linear de modelos de previsão existentes na literatura. Estes estimadores combinados caracterizam uma nova perspectiva para enfrentar o problema da modelagem para previsões de séries temporais.

A abordagem proposta via cópulas Frank e Gumbel é comparada com os modelos combinados Simple Average (SA) e o modelo clássico (MC) que é um caso especial do modelo de cópula normal em que as distribuições dos erros dos modelos individuais seguem uma normal, tratando-se assim, de uma combinação linear de preditores tanto para o SA como para o MC, sendo também comparado com os modelos de previsão individual utilizados em cada fenômeno sob estudo.

Foram apresentadas oito séries temporais do mundo real e um total de 36 modelos individuais abordados nos diferentes fenômenos na qual apenas um modelo individual a distribuição marginal dos erros foi diferente da normal, assim, insinuar desatentamente que a distribuição dos resíduos segue uma normal pode não ser tão arriscado. Contudo, neste tese é mostrado que checar a real distribuição dos erros e utilizá-la no modelo combinado via cópula obtém-se resultados atraentes. Portanto, o método proposto via cópula Gumbel ou Frank permite operar em um primeiro momento, no ajuste da distribuição marginal dos erros de cada preditor, e em seguida, modelar a dependência entre eles, apresentando assim, a específica vantagem de generalização do MC pela flexibilidade na modelagem de previsões dos resíduos dos modelos individuais.

Nesse sentido, observa-se a utilidade do estimador combinado proposto via cópula. Em especial, para série ND em que um dos modelos individuais que compõe este estimador combinado segue uma distribuição lognormal e os erros são multiplicativos, evidencia-se a importância em utilizar a real distribuição dos erros na combinação não-linear via cópula

Frank, na qual o desempenho desta cópula foi bem superior comparado aos demais modelos combinados e individuais.

Destaca-se também, a importância em selecionar modelos individuais para agregação dos modelos via cópula Frank e Gumbel. Dentre as oito séries temporais reais sob estudo, em cinco delas foi obtido um melhor modelo combinado via cópula Frank ou Gumbel utilizando na sua composição apenas dois modelos individuais, sendo um deles o que apresentou o melhor ou o segundo melhor desempenho e o outro modelo individual decorrente do primeiro ou segundo pior desempenho. Já as três séries temporais restantes, o modelo com melhor desempenho foi o MC.

Assim, combinando dois modelos individuais para as séries financeiras ND, GG e SP, a cópula Frank apresenta o melhor desempenho, e para série DJ, a cópula normal (MC). Evidenciando que os dois modelos individuais que compõem os estimadores combinados para cada série, um deles é sempre o modelo individual TAEF pelo fato de apresentar o melhor desempenho comparado aos demais modelos individuais e o outro modelo que irá compor é o que apresenta o pior desempenho (exceto, a série DJ que o outro modelo individual para composição do modelo combinado foi o que apresentou o segundo pior desempenho). Também para as séries de crescimento de peixes, as espécies yellow tuna e bigeye tuna as cópulas Frank e Gumbel, respectivamente, apresentam o melhor desempenho e envolvem dois modelos individuais na composição, na qual um dos modelos individuais apresenta o pior desempenho e o outro modelo individual o melhor ou segundo melhor desempenho. Para série de precipitação o melhor modelo combinado via cópula Frank e Gumbel envolveu três modelos individuais na composição dos modelos combinados na qual um modelo individual é o segundo melhor, dentre os cinco mais parcimoniosos modelos GARCH utilizados nas possíveis combinações de modelos, e os outros dois modelos individuais apresentam os piores desempenho.

Ressalta-se também que para a série de precipitação a cópula normal (MC), quando leva em consideração os nove modelos individuais GARCH em sua composição, apresenta um melhor desempenho comparado a todos os possíveis modelos combinados e individuais. Isto pode ser devido ao fato que há uma forte e significativa correlação linear de Pearson entre os modelos individuais, ao nível de 5%, favorecendo o uso do MC, pois a estrutura de dependência deste estimador combinado leva em consideração todos os coeficientes de correlação, enquanto a estrutura de dependência das cópulas Gumbel e de Frank fazem uso de apenas um parâmetro. As distribuições marginais dos erros dos nove modelos individuais GARCH seguem uma normal, ou seja, não é suposto uma distribuição marginal diferente da que realmente é, levando assim a uma combinação linear de preditos individuais, bem como, os modelos individuais avaliados pelo teste  $t$ , como mostrado nesta tese, são todos

não viesados e com valores do EQM pequenos.

Por sua vez, o clássico SA apresentou os piores resultados. Este modelo representa a mais simples abordagem do estimador combinado.

Um outro resultado observado aqui é que se a matriz de correlação de Pearson ( $\rho$ ) apresentar alguma dependência estatisticamente negativa entre os preditores, ocorrerá problema no uso da cópula Gumbel devido ao fato desta cópula tratar apenas de dependência positiva. Portanto, evidencia-se a importância desta matriz de correlação para descobrir se é viável ou não utilizar determinada cópula. Assim, foi satisfatório apenas o uso do  $\rho$  para descobrir quais fenômenos não são viáveis o uso da cópula Gumbel. Revela-se ainda, que também não é viável o uso da cópula Gumbel se as associações negativas apresentadas entre os modelos individuais forem fracas e não significativas, pois impedem o ajuste desta cópula. Por exemplo, a série financeira GG ocorreu uma fraca correlação linear negativa entre os modelos TAEF e ARIMA, não significativa ao nível de 5%, não sendo viável o uso da cópula Gumbel utilizando esses dois modelos individuais na composição, na qual a cópula Frank abordada neste caso captou esta associação, apresentando uma medida de dependência negativa.

Assim, evidencia-se a importância do estimador combinado proposto, tratado no capítulo de metodologia, em abordagem proposta, que traz consigo também uma estatística descritiva e inferencial trabalhada dentro desta abordagem. Este estimador apresenta-se ainda com mais destaque no problema de incerteza de modelos de previsão de séries temporais, quando se trata do caso em que pelo menos uma das distribuições marginais dos erros dos modelos individuais não seguem uma normal. Assim como o seu melhor desempenho está não em combinar mais modelos, mas em combinar quais modelos.

## 5.1 Questões de pesquisa

1. Em séries temporais do mundo real, a combinação de preditores através do formalismo de cópulas é capaz de apresentar previsões estatisticamente mais eficientes e acuradas?

Sim. Cópulas são úteis para obtenção de melhores previsões dos modelos combinados.

2. Os preditores combinados via cópula Normal (MC), Frank e Gumbel mostram-se mais eficientes e acurados em relação aos modelos individuais usados no procedimento de combinação? E em relação ao desempenho dos preditores combinados via cópulas Frank e Gumbel comparados ao MC e o SA?

O preditor combinado via cópula apresenta um melhor desempenho em termos de eficiência e acurácia comparado aos modelos individuais. Os preditores via cópula Gumbel e Frank apresentam-se superiores ao MC na maioria dos casos apresentados na presente tese, tais como, utilizando-se de distribuições marginais que se desvinculam da normalidade. Já a técnica SA mostra-se inferior aos demais modelos combinados.

3. Existe vantagem em estudar a distribuição dos erros cometidos pelos modelos individuais e sua estrutura de dependência?

Há vantagem em estudar a distribuição dos erros dos modelos individuais e sua estrutura de dependência. Ressalta-se que quando as distribuições dos erros dos modelos individuais não seguem uma normal e utiliza-se a real distribuição, os resultados mostram um melhor desempenho do modelo via cópula comparado aos demais.

## 5.2 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros surge o interesse em aplicar um certo número de modelos de cópulas para diferentes fenômenos, em que a distribuição das marginais se desvincula da normalidade, bem como, aplicar o teste da qualidade de ajuste para estes modelos combinados via cópulas.

Aponta-se também a necessidade de explorar o potencial de outros tipos de cópulas.

## 5.3 Trabalhos publicados

Até este momento, foram publicados os seguintes trabalhos:

1. Combinação de modelos de previsões de séries temporais via cópula análise comparativa entre estimadores combinados ([ASSIS et al., 2014](#));
2. Combining time series forecasting models via gumbel-hougaard copulas ([OLIVEIRA et al., 2013](#));
3. Combination of biased artificial neural network forecasters ([ASSIS et al., 2013a](#));
4. Estudo da Incerteza de modelos via cópula Gumbel ([ASSIS et al., 2013b](#));
5. Copula-based time series combined forecasters ([OLIVEIRA et al., 2016b](#)).
6. Copulas-Based Ensemble of Artificial Neural Networks for Forecasting Real World Time Series ([OLIVEIRA et al., 2016c](#))
7. Aggregation of Time Series Forecasts via Cacoullos Copula ([OLIVEIRA et al., 2016a](#))



## Referências Bibliográficas

- AMENDOLA, A.; STORTI, G. A gmm procedure for combining volatility forecasts. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 52, n. 6, p. 3047–3060, 2008.
- ARAGÓN-NORIEGA, E. A. Modeling the individual growth of the gulf corvina, *cynoscion othonopterus* (pisces: Sciaenidae), using a multi-model approach modelando el crecimiento individual de la corvina golfina, *cynoscion othonopterus* (pisces: Sciaenidae), con el enfoque multimodelo. **Ciencias Marinas**, v. 40, n. 2, p. 149–161, 2014.
- ASSIS, T. F. O. et al. Combination of biased artificial neural network forecasters. **1 st BRICS Countries Conference on Computational Intelligence**, 2013.
- ASSIS, T. F. O. et al. Estudo da incerteza de modelos via cópula gumbel. **58o RBras Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria**, 2013.
- ASSIS, T. F. O. et al. Combinação de modelos de previsões de séries temporais via cópula análise comparativa entre estimadores combinados. **XXI Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística**, 2014.
- BARBETTA, P. A.; REIS, M. M.; BORNIA, A. C. **Estatística para os cursos de engenharia e informatica**. São Paulo: Atlas, 2010.
- BERTALANFFY, L. von. A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws. ii). **Human Biology**, JSTOR, v. 10, n. 2, p. 181–213, 1938.
- BINOIS, M.; RULLIERE, D.; ROUSTANT, O. On the estimation of pareto fronts from the point of view of copula theory. **Information Sciences**, Elsevier, v. 324, p. 270–285, 2015.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à inferência estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.
- BOX, G. E.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. **Time series analysis: forecasting and control**. [S.l.]: Prentice Hall, 3rd edition, 1994.
- BRAGA, A. d. P.; LUDEMIR, T. B.; CARVALHO, A. C. P. d. L. **Redes Neurais Artificiais: Teoria e Aplicações**. [S.l.]: Rio de Janeiro, LTC, 2000.
- CHATFIELD, C. **Time-series forecasting**. [S.l.]: CRC Press, 2000.

- CLEMEN, R. Combining forecasts: A review and annotated bibliography, international journal of forecasting, 5 (4), 559-83. **International Library of Critical Writings in Economics**, Edward Elgar Publishing LTD, v. 108, p. 132–156, 1999.
- CLEMEN, R. T. Combining forecasts: A review and annotated bibliography. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 5, n. 4, p. 559–583, 1989.
- CORZO, G.; SOLOMATINE, D. Knowledge-based modularization and global optimization of artificial neural network models in hydrological forecasting. **Neural networks**, Elsevier, v. 20, n. 4, p. 528–536, 2007.
- CREAL, D. D.; TSAY, R. S. High dimensional dynamic stochastic copula models. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 189, n. 2, p. 335–345, 2015.
- CUEVAS, P.; NAIEZHDA, T. Valoración del riesgo utilizando cópulas como medida de la dependencia: aplicación al sector financiero mexicano (2002-2008). **Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones**, 2010.
- DELL'AQUILA, R.; RONCHETTI, E. Stock and bond return predictability: the discrimination power of model selection criteria. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 50, n. 6, p. 1478–1495, 2006.
- DUARTE-NETO, P.; HIGA, F. M.; LESSA, R. P. Age and growth estimation of bigeye tuna, *thunnus obesus* (teleostei: Scombridae) in the southwestern atlantic. **Neotropical Ichthyology**, SciELO Brasil, v. 10, n. 1, p. 148–158, 2012.
- ELLIOTT, G.; TIMMERMANN, A. **Handbook of Economic Forecasting SET 2A-2B**. [S.l.]: Elsevier, 2013.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 987–1007, 1982.
- FAN, Y.; PATTON, A. J. Copulas in econometrics. **Annu. Rev. Econ.**, Annual Reviews, v. 6, n. 1, p. 179–200, 2014.
- FERREIRA, T. A.; VASCONCELOS, G. C.; ADEODATO, P. J. A new intelligent system methodology for time series forecasting with artificial neural networks. **Neural Processing Letters**, Springer, v. 28, n. 2, p. 113–129, 2008.
- FIALHO, F. B. Interpretação da curva de crescimento de gompertz. **Embrapa Suínos e Aves**, p. 1–4, 1999.
- FIRMINO, P. R. A.; NETO, P. S. de M.; FERREIRA, T. A. Correcting and combining time series forecasters. **Neural Networks**, Elsevier, v. 50, p. 1–11, 2014.
- FIRMINO, P. R. A.; NETO, P. S. de M.; FERREIRA, T. A. Error modeling approach to improve time series forecasters. **Neurocomputing**, Elsevier, v. 153, p. 242–254, 2015.
- GALDI, F. C.; PEREIRA, L. M. Valor em risco (var) utilizando modelos de previsão de volatilidade: Ewma, garch e volatilidade estocástica. **Brazilian Business Review**, v. 4, n. 1, p. 74–95, 2007.

- GAMITO, S. Growth models and their use in ecological modelling: an application to a fish population. **Ecological Modelling**, Elsevier, v. 113, n. 1, p. 83–94, 1998.
- GENEST, C.; FAVRE, A.-C. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. **Journal of Hydrologic Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 12, n. 4, p. 347–368, 2007.
- GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, JSTOR, v. 115, p. 513–583, 1825.
- GUIMARÃES, P. H. S. Modelos de volatilidade com inovações skew-t. **Universidade Federal de Lavras**, 2014.
- HAYKIN, S. **Redes Neurais—Princípios e Prática**. [S.l.]: Porto Alegre: Bookman, 2001.
- HAYKIN, S.; NETWORK, N. **Neural networks: a comprehensive foundation**. [S.l.]: Prentice Hall, 1999.
- HIPPERT, H. S.; TAYLOR, J. W. An evaluation of bayesian techniques for controlling model complexity and selecting inputs in a neural network for short-term load forecasting. **Neural Networks**, Elsevier, v. 23, n. 3, p. 386–395, 2010.
- HYNDMAN, R.; KHANDAKAR, Y. Automatic time series forecasting: the forecast package for r 7, 2008. URL <http://www.jstatsoft.org/v27/i03>, 2007.
- JEONG, D. I.; KIM, Y.-O. Combining single-value streamflow forecasts—a review and guidelines for selecting techniques. **Journal of Hydrology**, Elsevier, v. 377, n. 3, p. 284–299, 2009.
- JOE, H. **Multivariate models and multivariate dependence concepts**. [S.l.]: CRC Press, 1997.
- JOE, H.; XU, J. J. **The estimation method of inference functions for margins for multivariate models**. [S.l.], 1996.
- KATSANEVAKIS, S. Modelling fish growth: model selection, multi-model inference and model selection uncertainty. **Fisheries Research**, Elsevier, v. 81, n. 2, p. 229–235, 2006.
- KOJADINOVIC, I.; YAN, J. et al. Modeling multivariate distributions with continuous margins using the copula r package. **Journal of Statistical Software**, v. 34, n. 9, p. 1–20, 2010.
- LAURINI, M.; ASSIS, R. **Funções de Cópula na Precificação de Opções**. [S.l.], 2008.
- LESSA, R.; DUARTE-NETO, P. Age and growth of yellowfin tuna (*thunnus albacares*) in the western equatorial atlantic, using dorsal fin spines. **Fisheries Research**, Elsevier, v. 69, n. 2, p. 157–170, 2004.

- LUX, T.; MORALES-ARIAS, L. Forecasting volatility under fractality, regime-switching, long memory and student-t innovations. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 54, n. 11, p. 2676–2692, 2010.
- MENEZES, L. M. D.; BUNN, D. W.; TAYLOR, J. W. Review of guidelines for the use of combined forecasts. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 120, n. 1, p. 190–204, 2000.
- MEYER, C. The bivariate normal copula. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 42, n. 13, p. 2402–2422, 2013.
- MORABITO, F. C.; VERSACI, M. Fuzzy neural identification and forecasting techniques to process experimental urban air pollution data. **Neural Networks**, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 493–506, 2003.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. de C. **Modelos para previsão de séries temporais**. [S.l.]: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1981.
- MOSLEH, A.; APOSTOLAKIS, G. The assessment of probability distributions from expert opinions with an application to seismic fragility curves. **Risk Analysis**, Wiley Online Library, v. 6, n. 4, p. 447–461, 1986.
- NELSEN, R. B. **An introduction to copulas**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 139.
- NEUMAN, S. Maximum likelihood bayesian averaging of uncertain model predictions. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, Springer, v. 17, n. 5, p. 291–305, 2003.
- NIU, D.-x.; SHI, H.-f.; WU, D. D. Short-term load forecasting using bayesian neural networks learned by hybrid monte carlo algorithm. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 12, n. 6, p. 1822–1827, 2012.
- OLIVEIRA, R. T. A. et al. Combining time series forecasting models via gumbel-hougaard copulas. **1 st BRICS Countries Conference on Computational Intelligence**, 2013.
- OLIVEIRA, R. T. A. et al. Aggregation of time series forecasts via cacoullos copula. **IEEE/INNS International Joint Conference on Neural Networks**, 2016.
- OLIVEIRA, R. T. A. et al. Copula-based time series combined forecasters. **Information Sciences**, Elsevier, 2016.
- OLIVEIRA, R. T. A. et al. Copulas-based ensemble of artificial neural networks for forecasting real world time series. **IEEE/INNS International Joint Conference on Neural Networks**, 2016.
- PAJUELO, J. G. et al. Determination of age and growth of the striped seabream lithognathus mormyrus (sparidae), in the canary archipelago by otolith readings and backcalculation. **Scientia Marina**, v. 66, n. 1, p. 27–32, 2002.

- PATTON, A. J. A review of copula models for economic time series. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 110, p. 4–18, 2012.
- PAULY, D. Gill size and temperature as governing factors in fish growth: a generalization of von bertalanffy's growth formula. Institut für Meereskunde, 1979.
- PELÁEZ, G.; SCARRY, S. Almeja generosa de bahía magdalena: dinámica poblacional y consideraciones para el manejo. **Centro de Investigaciones Biológicas del Noroeste**, SC, 2013.
- RENARD, B.; LANG, M. Use of a gaussian copula for multivariate extreme value analysis: some case studies in hydrology. **Advances in Water Resources**, Elsevier, v. 30, n. 4, p. 897–912, 2007.
- RICKER, W. E. Computation and interpretation of biological statistics of fish populations. *Bull. Fish. Res. Bd. Can.*, 1975.
- RODRÍGUEZ-DOMÍNGUEZ, G. et al. Modelos multiples para determinar el crecimiento de organismos juveniles de jaiba azul callinectes arcuatus en cautiverio. **Ciencia Pesquera**, v. 22, n. 1, p. 29–35, 2014.
- SCHNUTE, J. T.; RICHARDS, L. J. A unified approach to the analysis of fish growth, maturity, and survivorship data. **Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences**, NRC Research Press, v. 47, n. 1, p. 24–40, 1990.
- SIMARD, C.; RÉMILLARD, B. et al. Forecasting time series with multivariate copulas. **Dependence Modeling**, De Gruyter Open, v. 3, n. 1, 2015.
- TEAM, R. C. R: A language and environment for statistical computing. vienna, austria; 2014. **URL <http://www.R-project.org>**, 2015.
- WALLIS, K. F. Combining forecasts—forty years later. **Applied Financial Economics**, Taylor & Francis, v. 21, n. 1-2, p. 33–41, 2011.
- WANG, C.-W.; YANG, S. S.; HUANG, H.-C. Modeling multi-country mortality dependence and its application in pricing survivor index swaps—a dynamic copula approach. **Insurance: Mathematics and Economics**, Elsevier, v. 63, p. 30–39, 2015.
- YAN, J. et al. Enjoy the joy of copulas: with a package copula. **Journal of Statistical Software**, v. 21, n. 4, p. 1–21, 2007.
- YU, L.; WANG, S.; LAI, K. K. A novel nonlinear ensemble forecasting model incorporating glar and ann for foreign exchange rates. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 32, n. 10, p. 2523–2541, 2005.
- ZHANG, G.; PATUWO, B. E.; HU, M. Y. Forecasting with artificial neural networks:: The state of the art. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 14, n. 1, p. 35–62, 1998.
- ZHANG, G. P.; PATUWO, B. E.; HU, M. Y. A simulation study of artificial neural networks for nonlinear time-series forecasting. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 28, n. 4, p. 381–396, 2001.

## Apêndices

# APÊNDICE A – Ajustes dos modelos: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards

## A.1. Ajustes dos modelos individuais para a espécie yellow tuna.

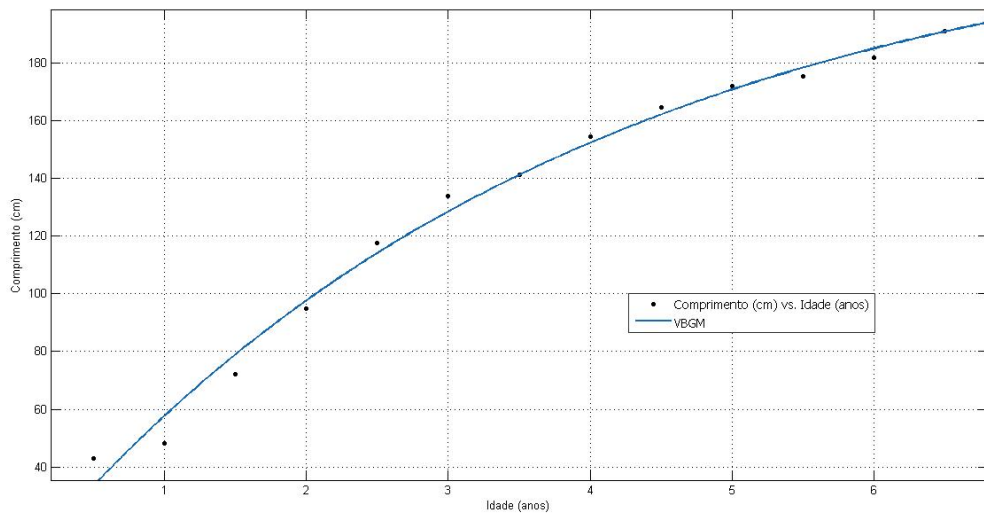


Figura 10 – Ajuste do modelo VBGM referente a espécie yellow tuna.

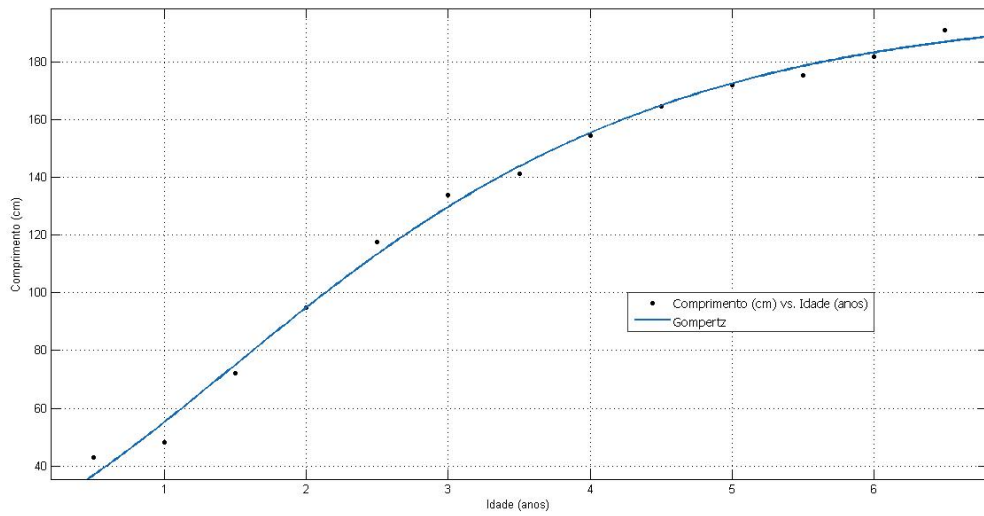


Figura 11 – Ajuste do modelo Gompertz referente a espécie yellow tuna.

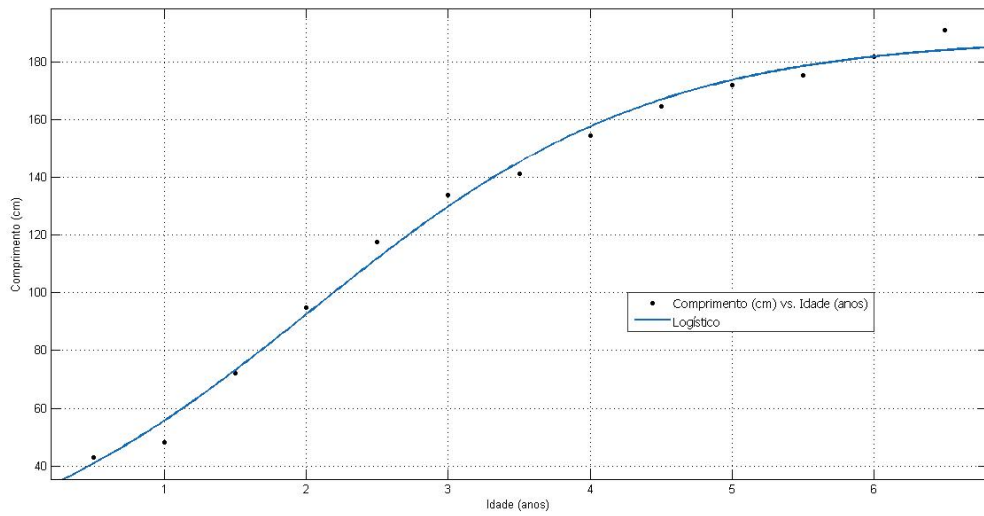


Figura 12 – Ajuste do modelo logístico referente a espécie yellow tuna.



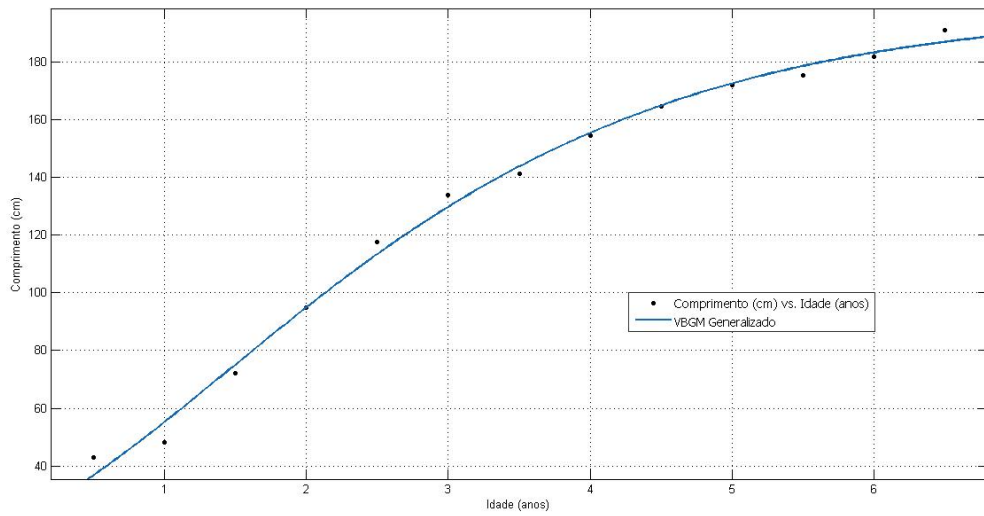


Figura 13 – Ajuste do modelo VBGM generalizado referente a espécie yellow tuna.

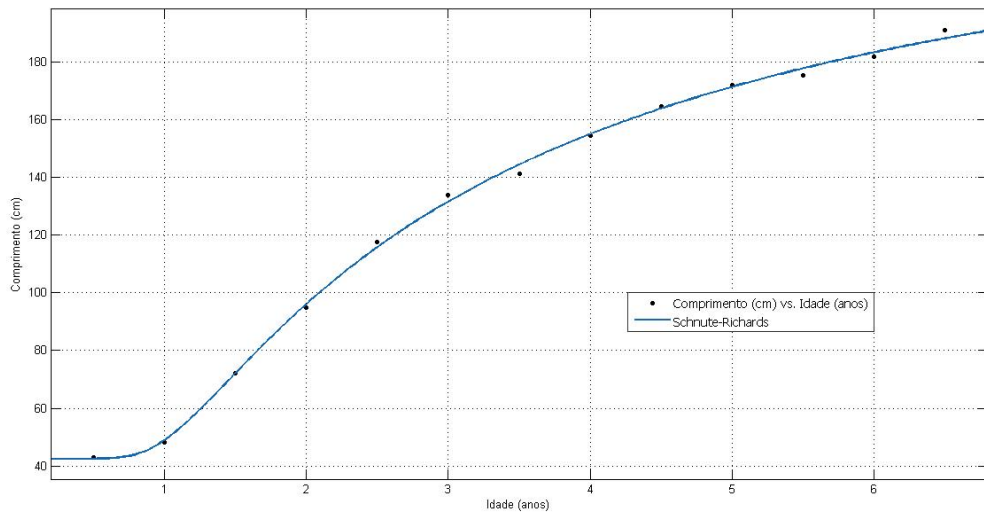


Figura 14 – Ajuste do modelo Schnute-Richards referente a espécie yellow tuna.

## A.2. Ajustes dos modelos individuais para a espécie striped seabream.

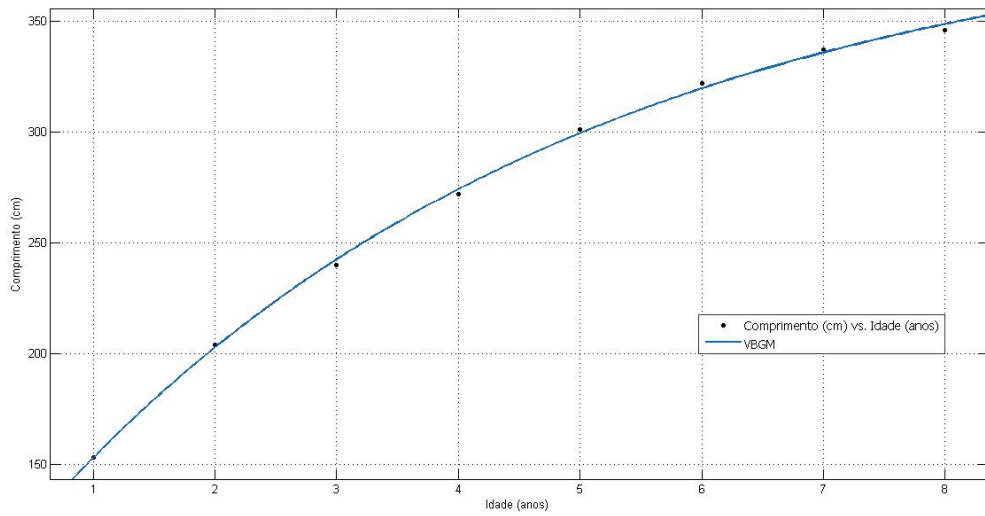


Figura 15 – Ajuste do modelo VBGM referente a espécie striped seabream.

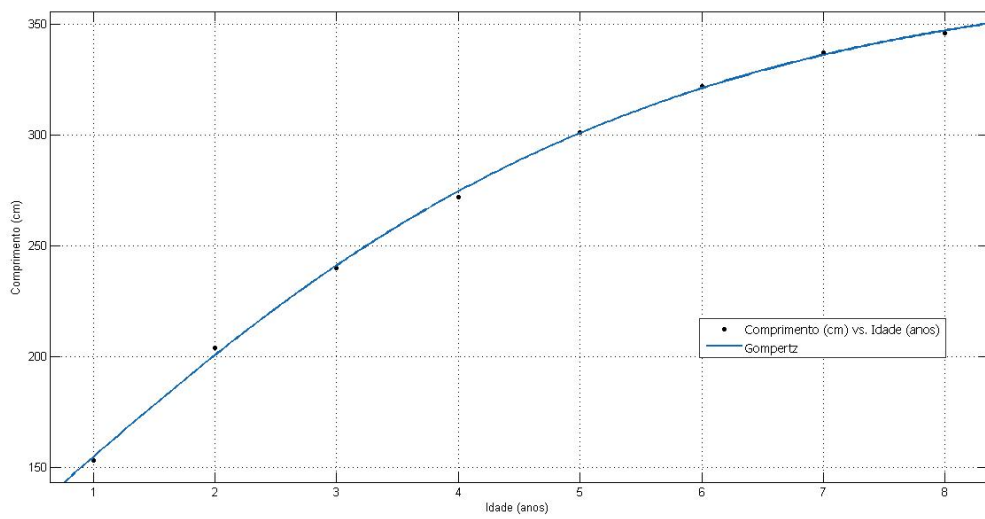


Figura 16 – Ajuste do modelo Gompertz referente a espécie striped seabream.

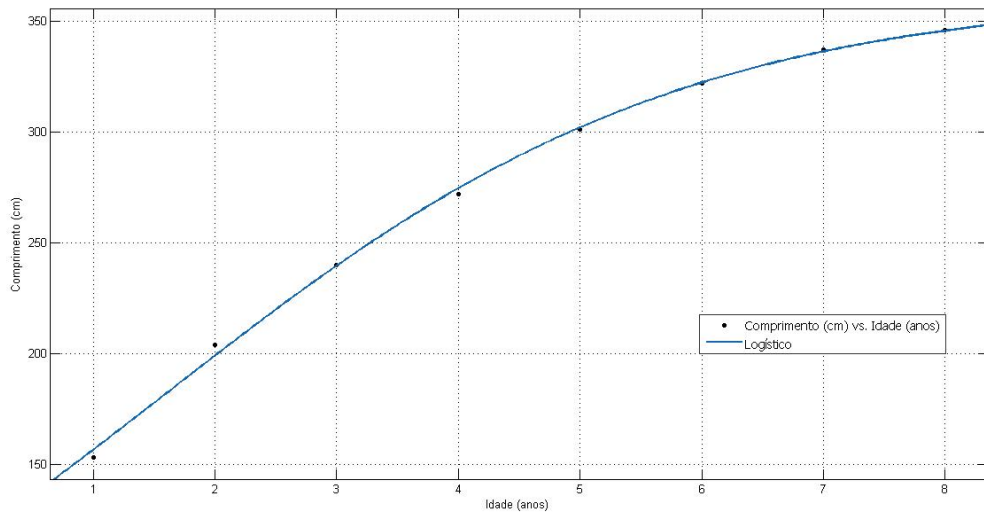


Figura 17 – Ajuste do modelo logístico referente a espécie striped seabream.

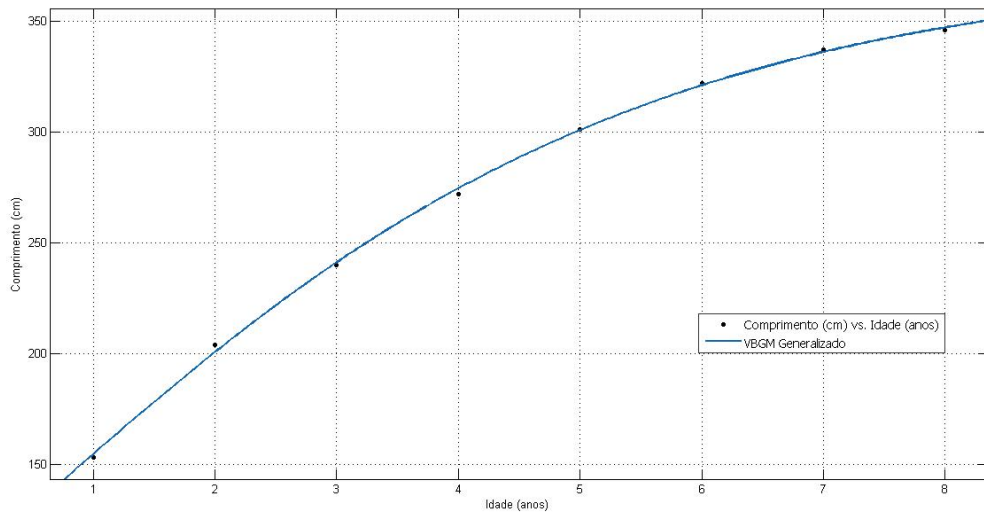


Figura 18 – Ajuste do modelo VBGM generalizado referente a espécie striped seabream.

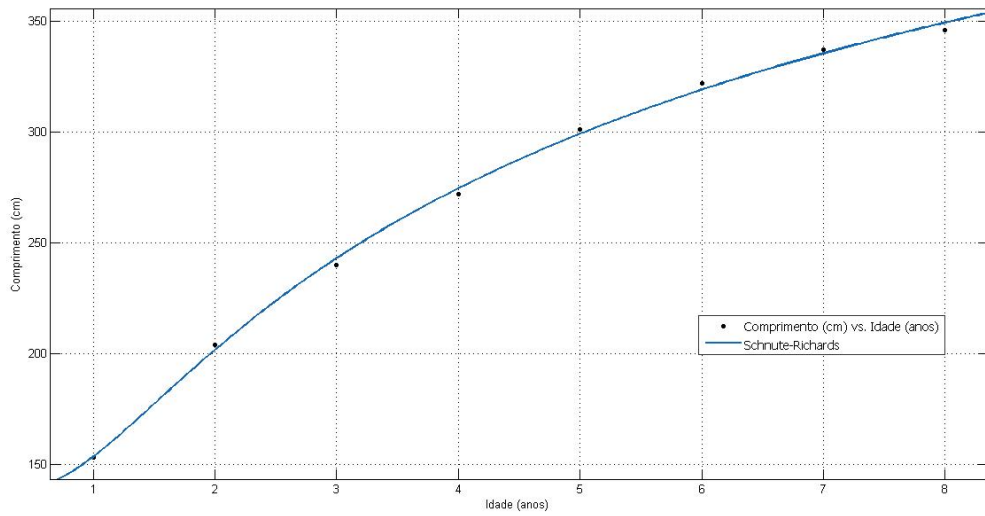


Figura 19 – Ajuste do modelo Schnute-Richards referente a espécie striped seabream.

### A.3. Ajustes dos modelos individuais para a espécie bigeye tuna.

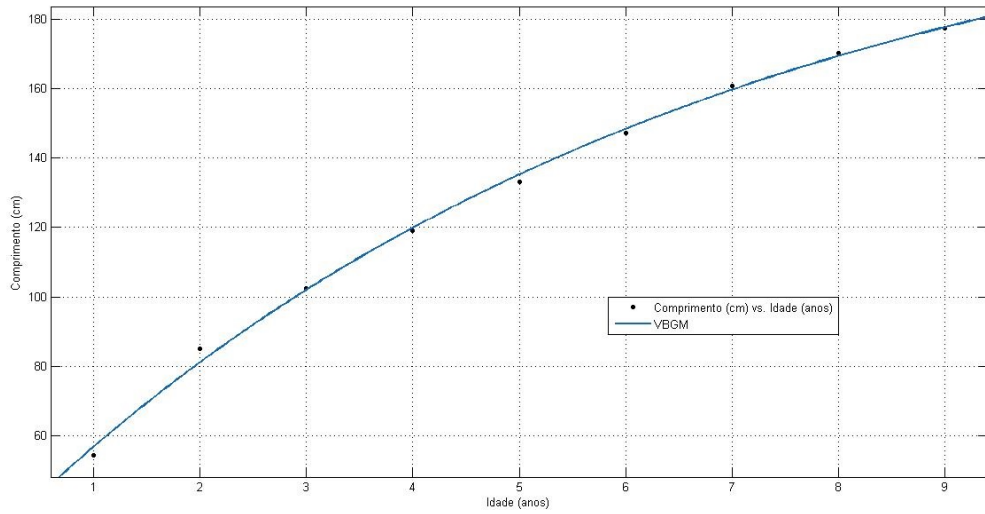


Figura 20 – Ajuste do modelo VBGM referente a espécie bigeye tuna.

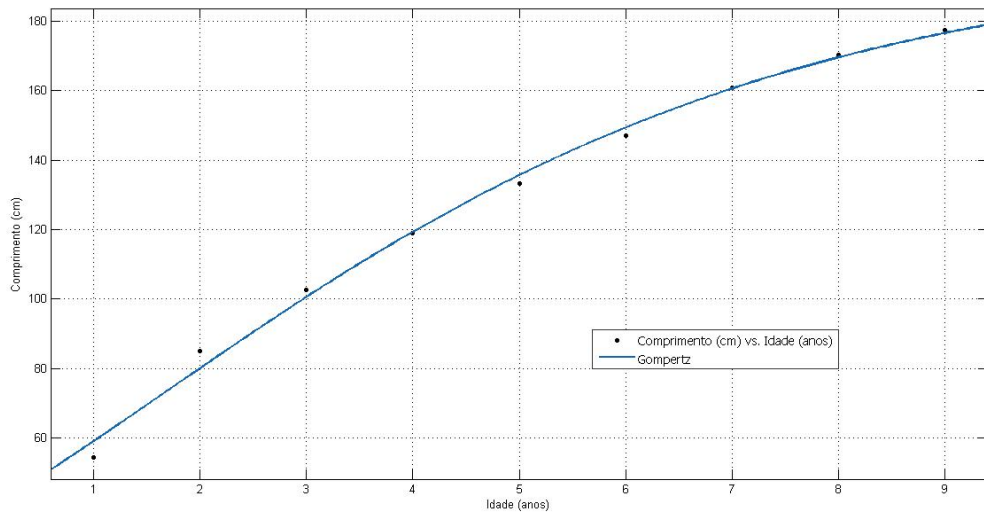


Figura 21 – Ajuste do modelo Gompertz referente a espécie bigeye tuna.

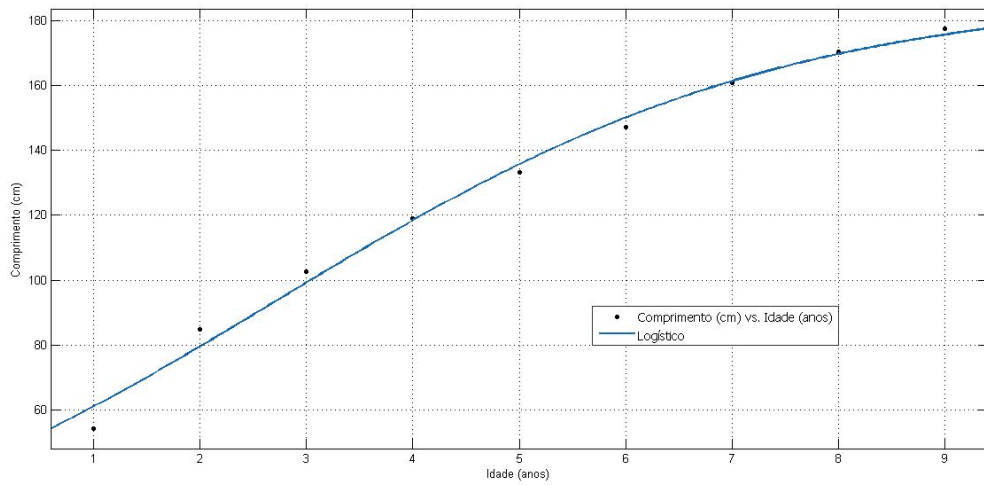


Figura 22 – Ajuste do modelo logístico referente a espécie bigeye tuna.

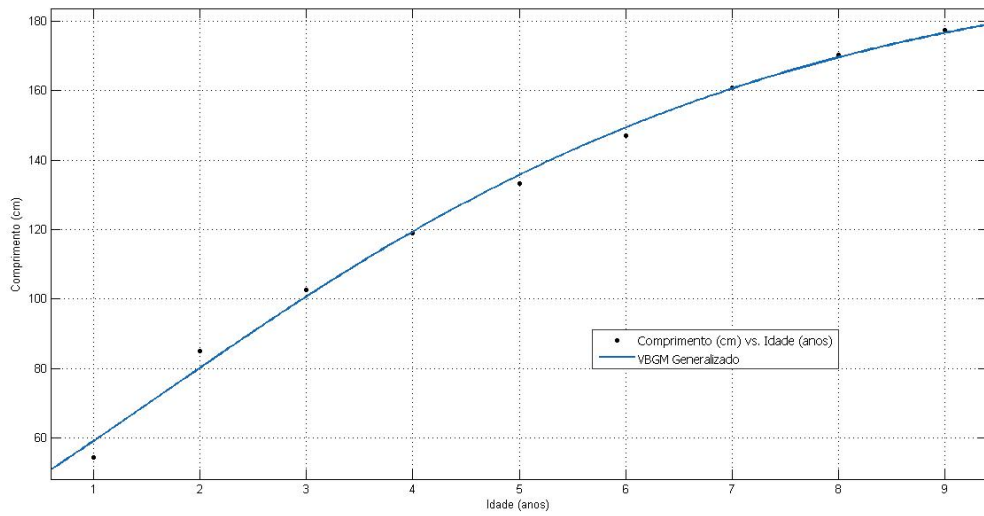


Figura 23 – Ajuste do modelo VBGM generalizado referente a espécie bigeye tuna.

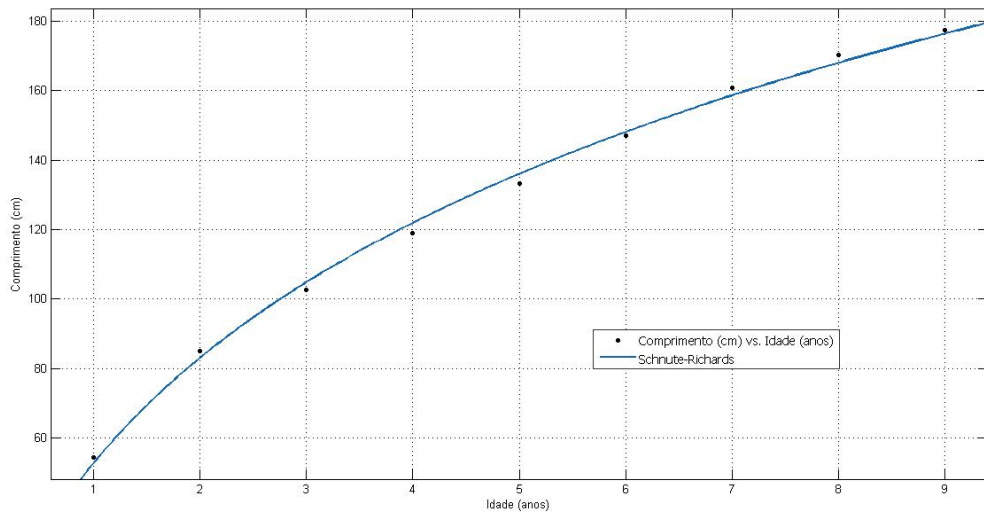


Figura 24 – Ajuste do modelo Schnute-Richards referente a espécie bigeye tuna.

APÊNDICE B – O coeficiente de  
determinação ajustado ( $R^2$  Aj.) e as  
estimativas dos parâmetros de crescimento  
dos modelos individuais: VBGM, Gompertz,  
logístico, VBGM generalizado e  
Schnute-Richards para cada espécie de peixe  
sob estudo (yellow tuna, striped seabream e  
bigeye tuna).

Tabela 33 – Coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$  Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie yellow tuna.

Modelos	$L_\infty$	$k^*$	$t_0$	$\lambda$	$t_4$	$p$	$\vartheta$	$\delta$	$v$	$R^2$ Aj.
VBGM	223.800	0.302	0.172	—	—	—	—	—	—	0.995
Gompertz	198.900	0.549	—	1.221	—	—	—	—	—	0.994
Logístico	188.500	0.833	—	—	2.047	—	—	—	—	0.992
VBGM Generalizado	198.500	0.551	-8.163	—	—	200.000	—	—	—	0.994
Schnute-Richards	42.510	6.430	—	—	—	—	3.229	350.000	-0.961	0.998

Tabela 34 – Coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$  Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie striped seabream.

Modelos	$L_\infty$	$k^*$	$t_0$	$\lambda$	$t_4$	$p$	$\vartheta$	$\delta$	$v$	$R^2$ Aj.
VBGM	399.600	0.225	-1.141	—	—	—	—	—	—	0.999
Gompertz	375.100	0.347	—	0.436	—	—	—	—	—	0.999
Logístico	362.500	0.471	—	—	1.584	—	—	—	—	0.998
VBGM Generalizado	375.300	0.346	-13.320	—	—	125.900	—	—	—	0.999
Schnute-Richards	137.800	5.241	—	—	—	—	2.907	68.580	-0.572	0.997

Tabela 35 – Coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$  Aj.) e as estimativas dos parâmetros de crescimento dos modelos individuais: VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie bigeye tuna.

Modelos	$L_\infty$	$k^*$	$t_0$	$\lambda$	$t_4$	$p$	$\vartheta$	$\delta$	$v$	$R^2$ Aj.
VBGM	227.600	0.154	-0.862	—	—	—	—	—	—	0.997
Gompertz	199.500	0.288	—	0.468	—	—	—	—	—	0.994
Logístico	188.400	0.421	—	—	2.749	—	—	—	—	0.990
VBGM Generalizado	200.000	0.283	-10.570	—	—	31.800	—	—	—	0.993
Schnute-Richards	3.458	2.364	—	—	—	—	0.851	97.070	-0.285	0.994



## APÊNDICE C – Estatísticas Descritivas

### C.1. Série de crescimento de peixes da espécie yellow tuna.

Tabela 36 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie yellow tuna.

Yellow tuna	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
VBGM	-21.800	-3.648	-0.485	-2.972	0.492	1.882	6.999	-2.355
Gompertz	1.101	2.923	4.364	5.923	7.582	15.010	4.425	0.747
Logístico	-5.686	-2.481	1.447	0.521	2.896	7.392	4.017	7.716
VBGM generalizado	-6.337	-2.963	0.432	-0.034	2.121	6.836	3.878	-113.226
Schnute Richards	-2.198	-0.764	-0.215	-0.068	0.605	3.055	1.500	-22.025

### C.2. Série de crescimento de peixes da espécie striped seabream.

Tabela 37 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie striped seabream.

Striped seabream	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
VBGM	-2.423	-1.571	-0.758	-0.198	1.503	2.338	1.995	-10.101
Gompertz	-66.280	-60.420	-49.860	-49.250	-39.300	-29.770	14.356	-0.291
Logístico	-5.065	-0.331	0.583	0.260	2.090	3.499	2.993	11.534
VBGM generalizado	-3.258	-0.768	0.534	0.195	1.639	2.555	2.121	10.873
Schnute Richards	-3.124	-2.350	-0.842	-0.354	1.845	2.798	2.551	-7.210

### C.3. Série de crescimento de peixes da espécie bigeye tuna.

Tabela 38 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais VBGM, Gompertz, logístico, VBGM generalizado e Schnute-Richards para a espécie bigeye tuna.

Bigeye tuna	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
VBGM	-3.961	-0.948	0.847	0.092	1.643	2.372	2.221	24.023
Gompertz	-36.060	-30.770	-23.670	-25.900	-21.040	-17.940	6.874	-0.265
Logístico	-5.513	-2.006	0.488	0.467	2.782	6.741	4.129	8.845
VBGM generalizado	-4.920	-1.147	0.376	0.377	2.393	4.687	3.184	8.454
Schnute Richards	-2.355	-1.945	0.912	0.327	2.412	2.800	2.343	7.157

### C.4. Série do Índice Nasdaq (ND)

Tabela 39 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal ND.

Modelos	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
1 - ANN	-215,300	-63,920	-31,410	-36,510	-6,923	98,150	44,717	-1,225
2 - TAEF	0,976	0,988	0,991	0,990	0,993	1,000	0,004	0,004
3 - ARIMA	-180,800	-21,010	0,447	1,481	23,580	139,100	37,733	25,478

### C.5. Série do Valor de Ações Google (GG)

Tabela 40 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal GG.

Modelos	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
1 - ANN	-5,993	-1,489	0,266	-0,035	1,604	6,524	2,505	-70,632
2 - TAEF	-4,767	-0,571	1,036	0,689	1,881	5,594	1,973	2,865
3 - ARIMA	-49,020	-4,795	3,690	2,537	10,550	50,040	14,982	5,905

### C.6. Série do Índice S&P500 (SP)

Tabela 41 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal SP.

Modelos	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
ANN	-0,154	-0,112	-0,089	-0,080	-0,050	0,001	0,042	-0,524
TAEF	-0,008	-0,004	-0,003	-0,002	-0,001	0,007	0,003	-1,384
ARIMA	-0,026	-0,007	-0,001	-0,0004	0,005	0,036	0,010	-27,718

### C.7. Série do Índice Dow Jones (DJ)

Tabela 42 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais ANN, TAEF e ARIMA referente a série temporal DJ.

Modelos	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
ANN	-0,129	-0,018	0,014	0,021	0,051	0,203	0,052	2,496
TAEF	-0,039	-0,010	0,002	0,001	0,009	0,054	0,017	14,408
ARIMA	-0,126	-0,023	0,001	0,001	0,023	0,101	0,038	46,038

### C.8. Série de Precipitação

Tabela 43 – Sumário descritivo dos resíduos dos modelos individuais garch11, garch12, garch13, garch21, garch22, garch23, garch31, garch32 e garch33 referente a série de precipitação.

Modelos	Mín	Q 1	Med	$\mu$	Q 3	Máx	$\sigma$	C.V
garch11	-2.729	-0.645	-0.109	-0.001	0.411	3.147	0.979	-785.784
garch12	-2.783	-0.648	-0.111	0.001	0.419	3.142	0.980	1686.427
garch13	-2.832	-0.647	-0.115	0.001	0.424	3.214	0.994	1505.413
garch21	-2.794	-0.652	-0.112	-0.001	0.413	3.214	0.996	-1035.536
garch22	-2.840	-0.654	-0.114	0.001	0.425	3.189	0.996	1167.962
garch23	-2.887	-0.649	-0.118	0.001	0.428	3.262	1.007	847.094
garch31	-2.802	-0.658	-0.112	-0.001	0.421	3.230	1.002	-902.814
garch32	-2.875	-0.664	-0.116	0.001	0.432	3.235	1.009	1293.928
garch33	-2.918	-0.657	-0.119	0.001	0.438	3.310	1.021	1079.517

## APÊNDICE D – Histogramas

### D.1. Série de crescimento de peixes da espécie yellow tuna.

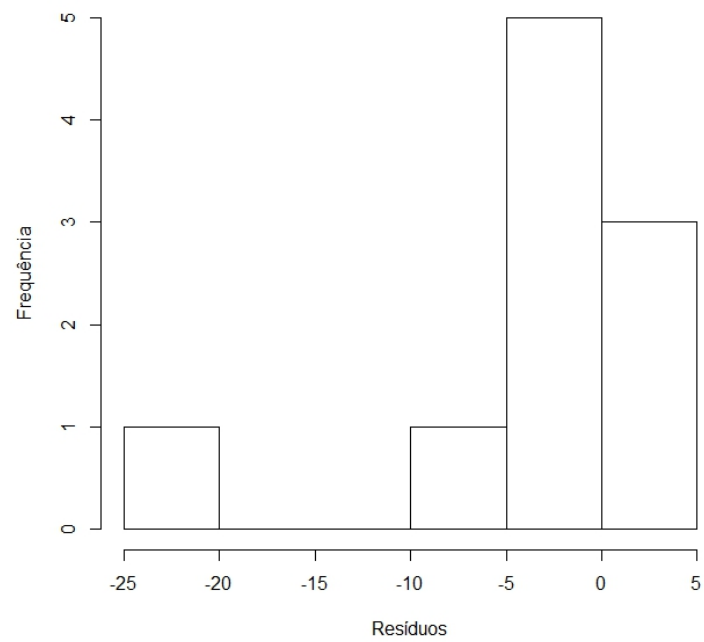


Figura 25 – Resíduos do modelo VBGM para a espécie yellow tuna.

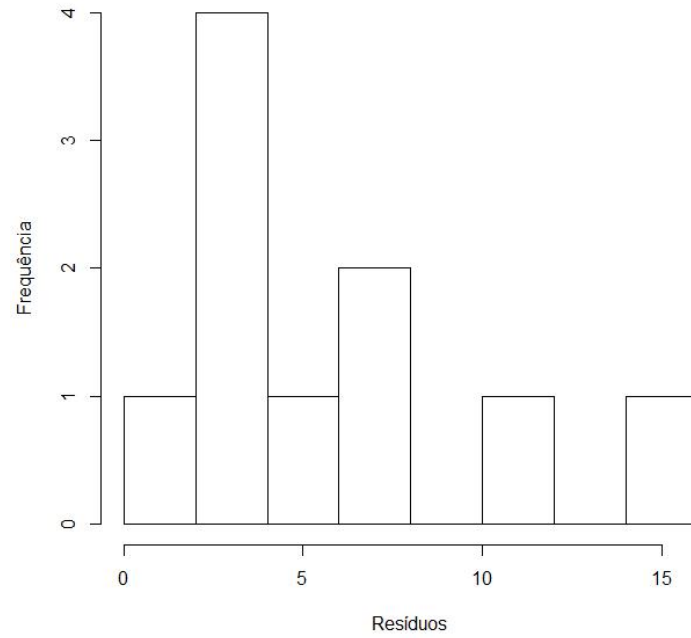


Figura 26 – Resíduos do modelo Gompertz para a espécie yellow tuna.

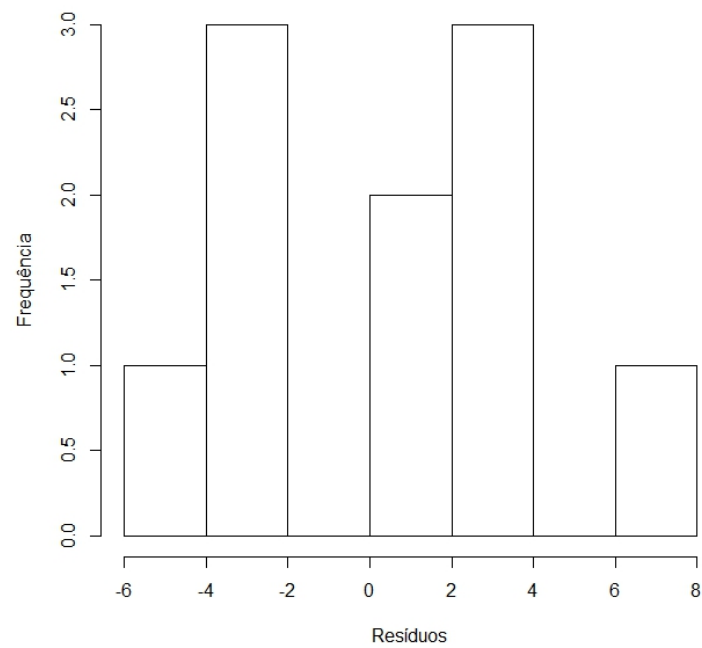


Figura 27 – Resíduos do modelo logístico para a espécie yellow tuna.

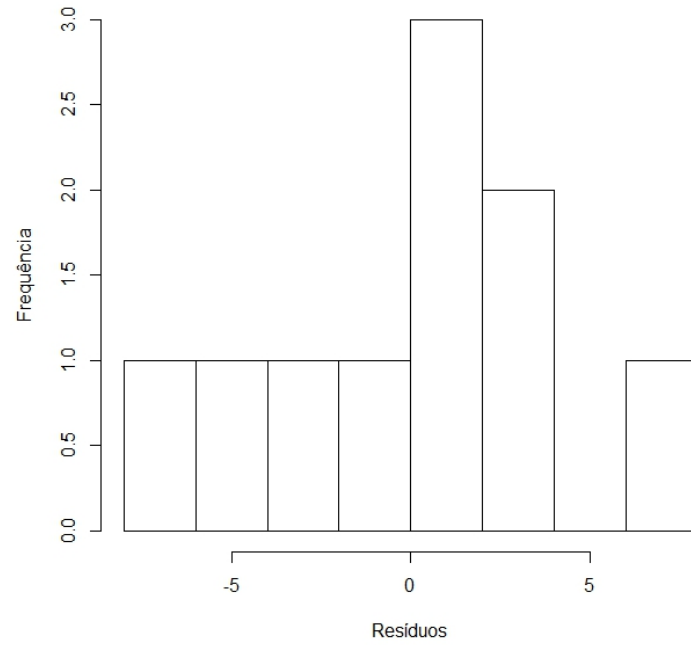


Figura 28 – Resíduos do modelo VBGM generalizado para a espécie yellow tuna.

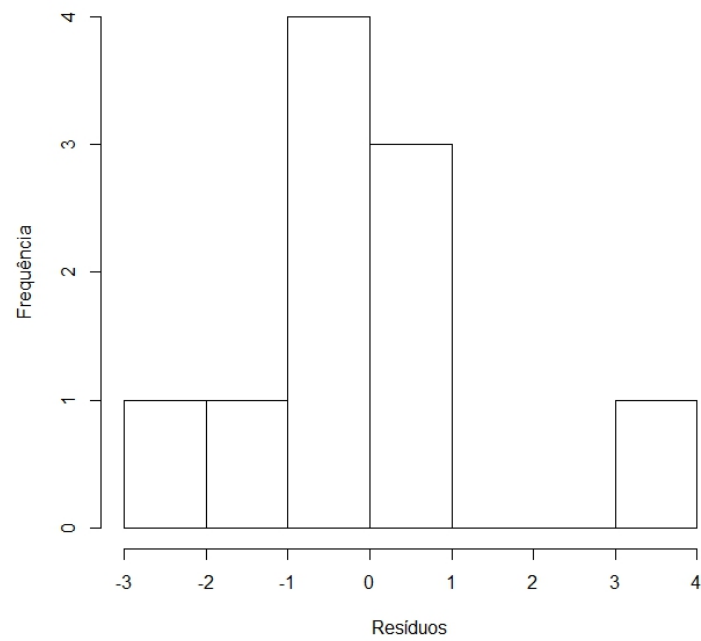


Figura 29 – Resíduos do modelo Schnute-Richards para a espécie yellow tuna.

## D.2. Série de crescimento de peixes da espécie striped seabream.

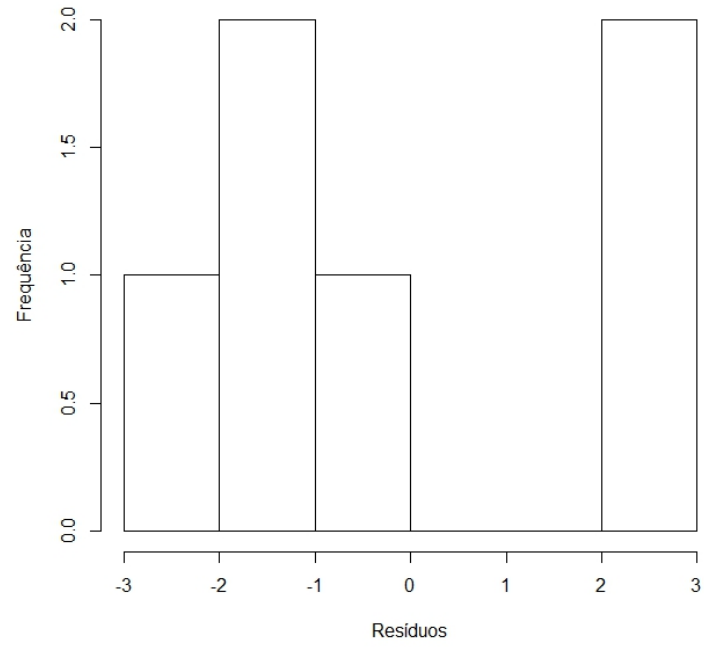


Figura 30 – Resíduos do modelo VBGM para a espécie striped seabream.

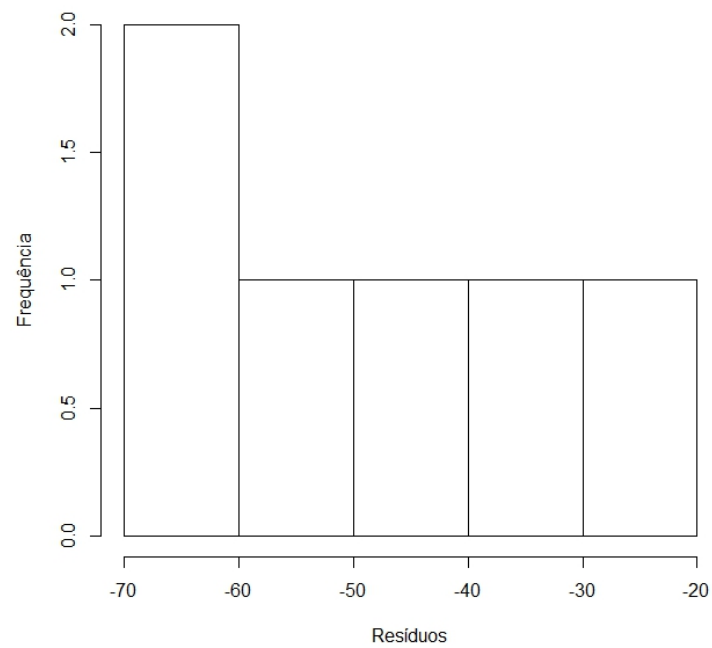


Figura 31 – Resíduos do modelo Gompertz para a espécie striped seabream.

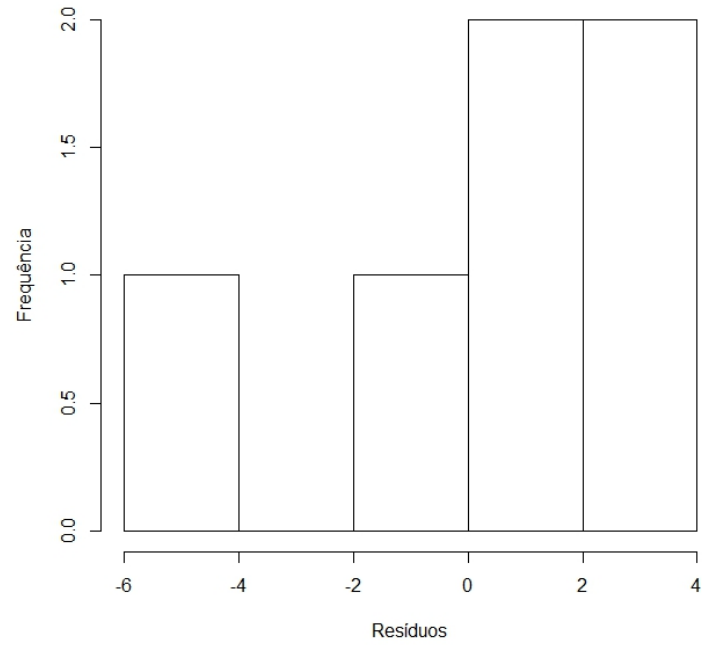


Figura 32 – Resíduos do modelo logístico para a espécie striped seabream.

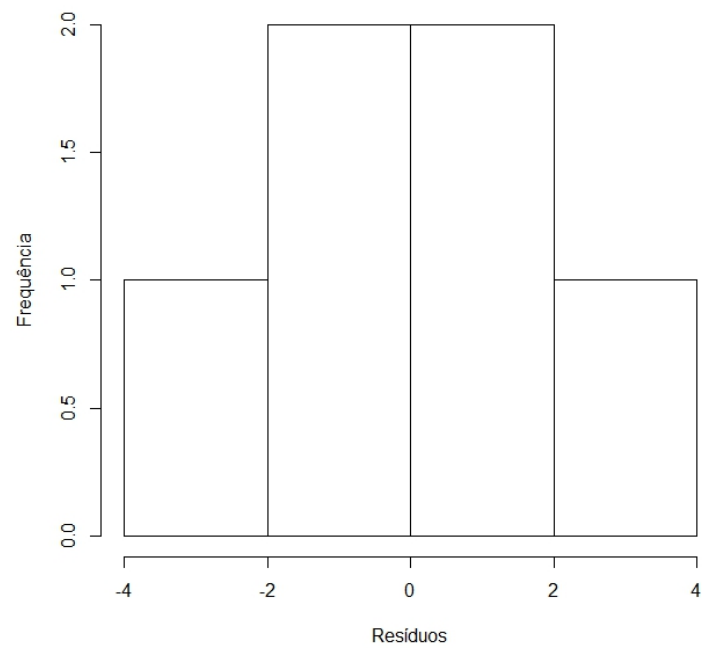


Figura 33 – Resíduos do modelo VBGM generalizado para a espécie striped seabream.



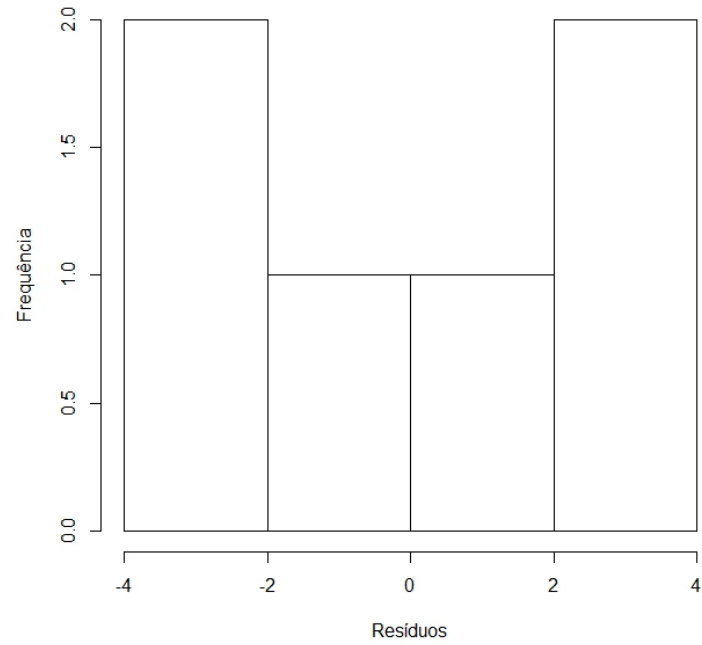


Figura 34 – Resíduos do modelo Schnute-Richards para a espécie striped seabream.

### D.3. Série de crescimento de peixes da espécie bigeye tuna.

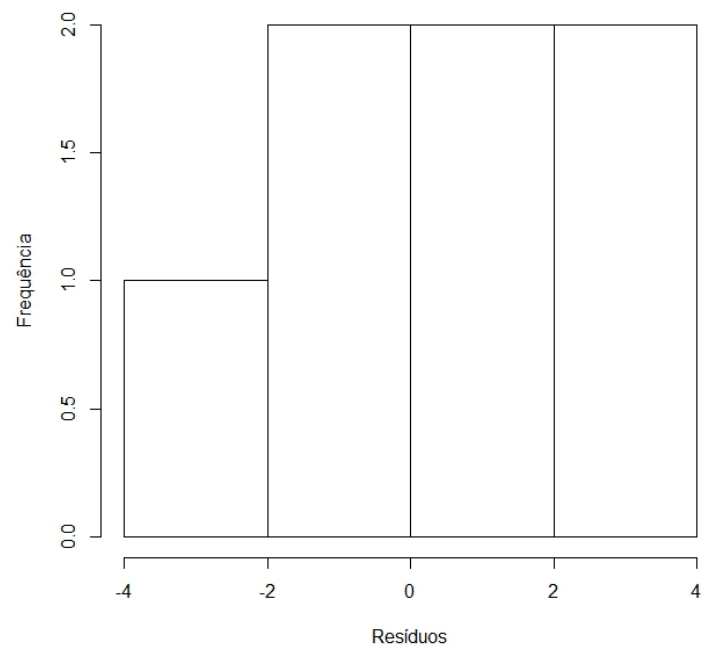


Figura 35 – Resíduos do modelo VBGM para a espécie bigeye tuna.

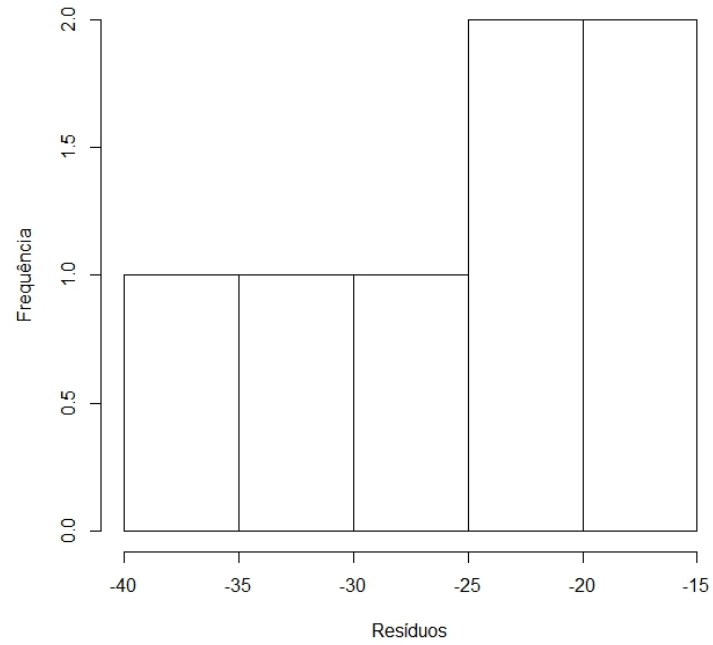


Figura 36 – Resíduos do modelo Gompertz para a espécie bigeye tuna.

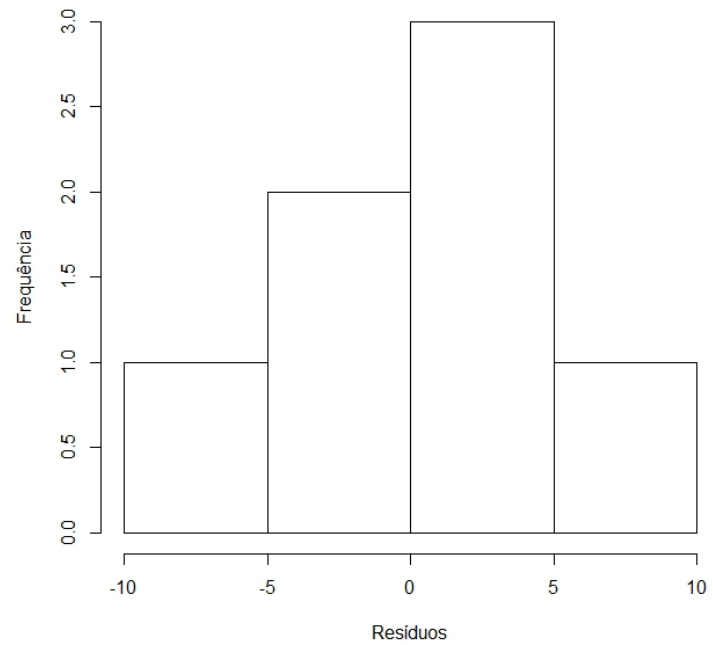


Figura 37 – Resíduos do modelo logístico para a espécie bigeye tuna.

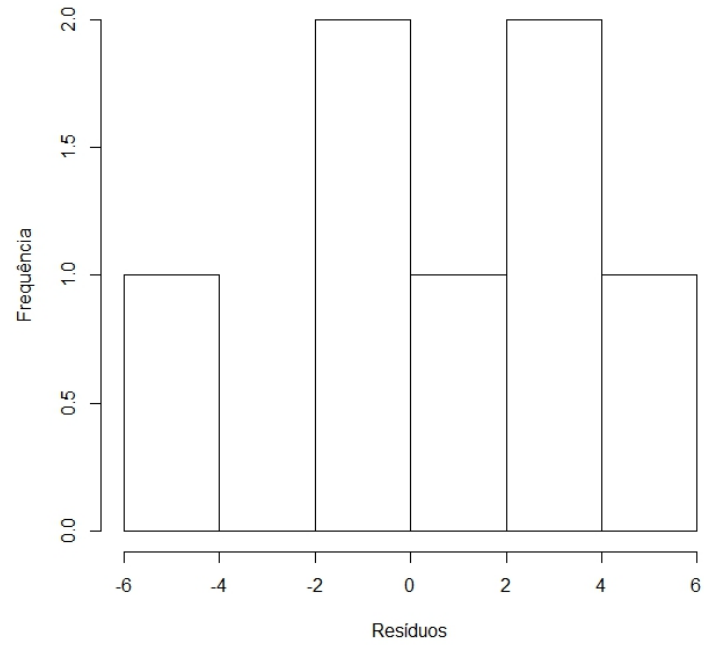


Figura 38 – Resíduos do modelo VBGM generalizado para a espécie bigeye tuna.

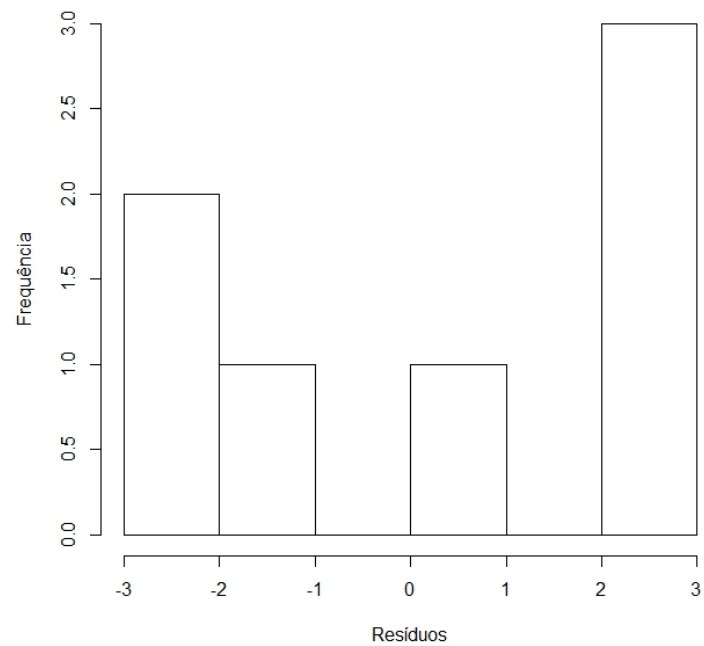


Figura 39 – Resíduos do modelo Schnute-Richards para a espécie bigeye tuna.

#### D.4. Série do Índice Nasdaq (ND)

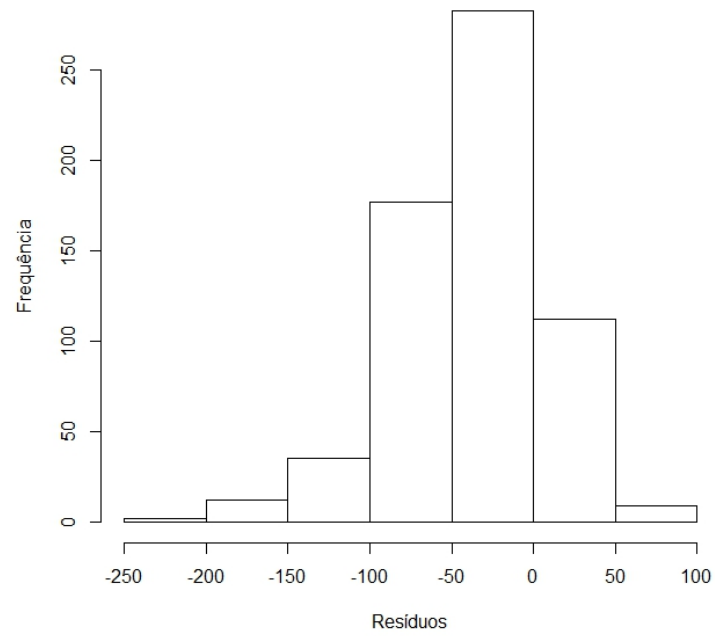


Figura 40 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal ND.

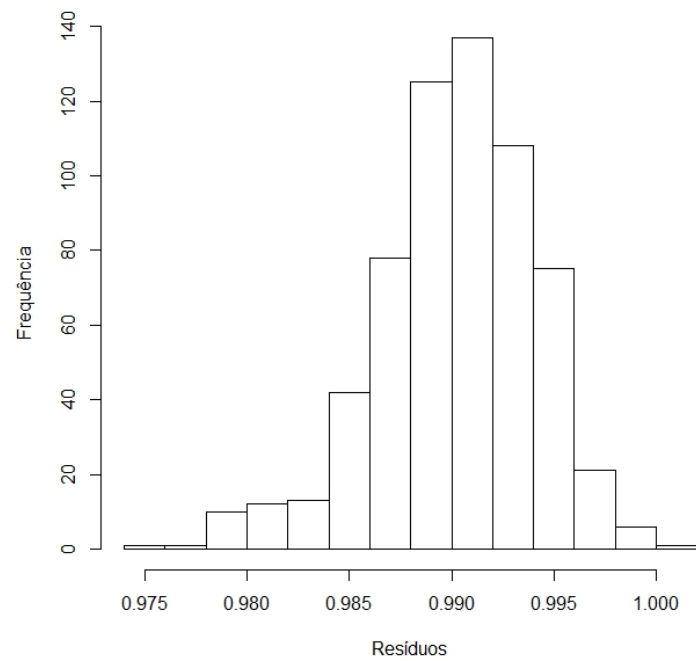


Figura 41 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal ND.

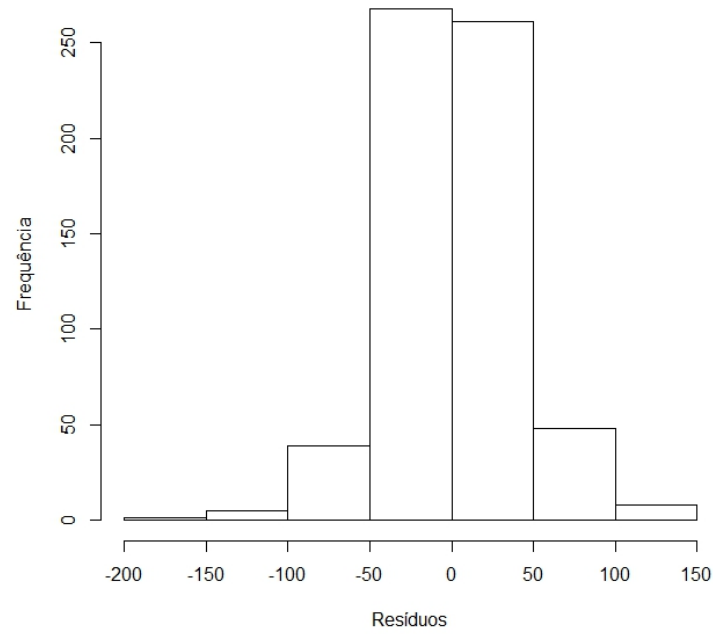


Figura 42 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal ND.

#### D.5. Série do Valor de Ações Google (GG)

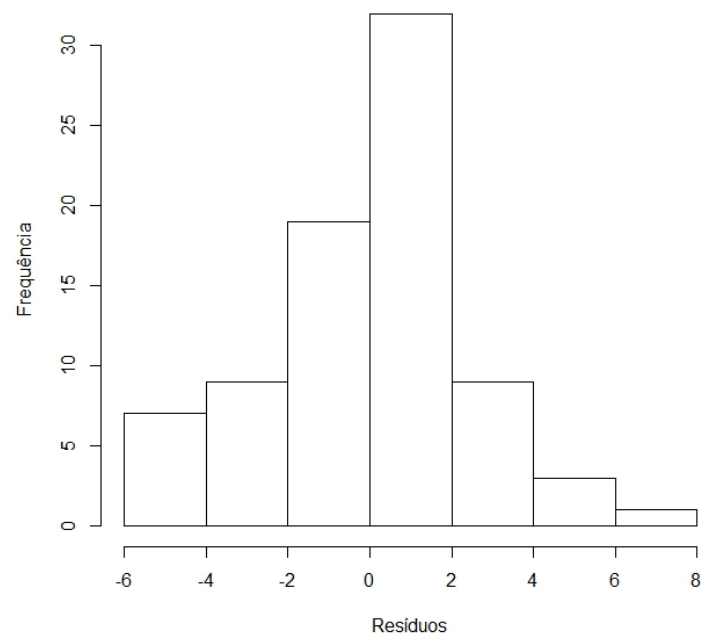


Figura 43 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal GG.

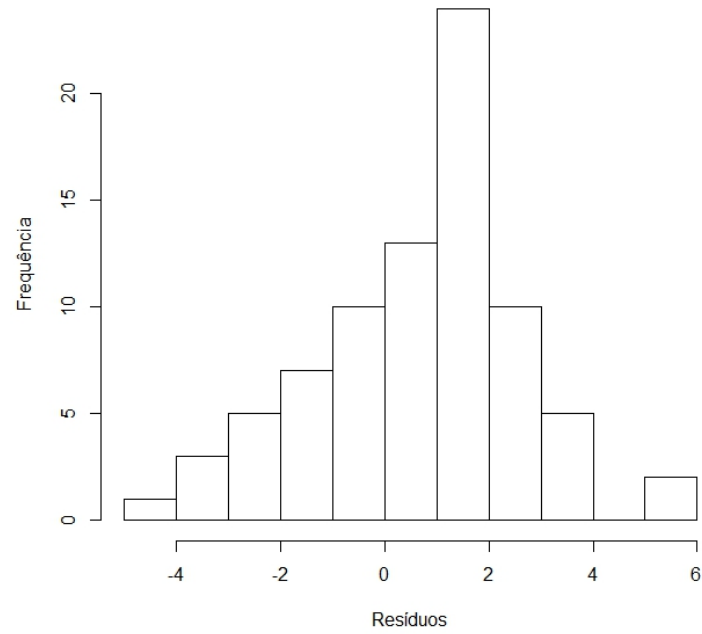


Figura 44 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal GG.

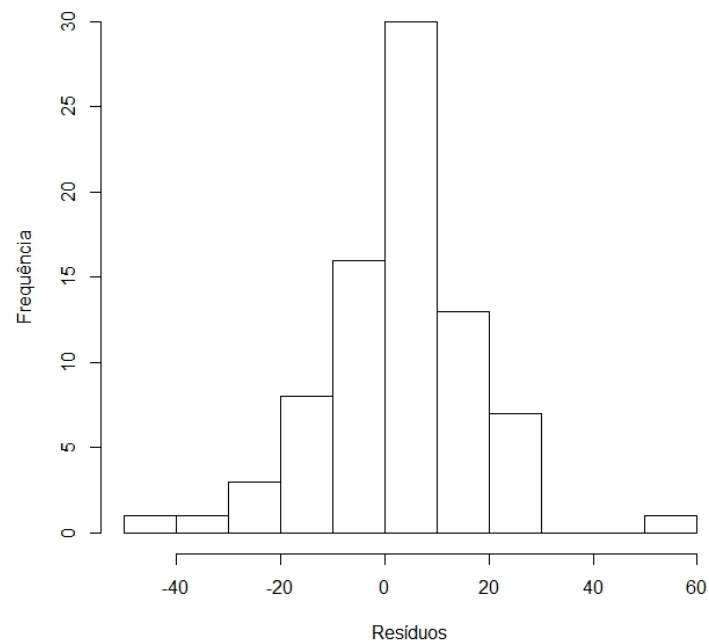


Figura 45 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal GG.

## D.6. Série do Índice S&P500 (SP)

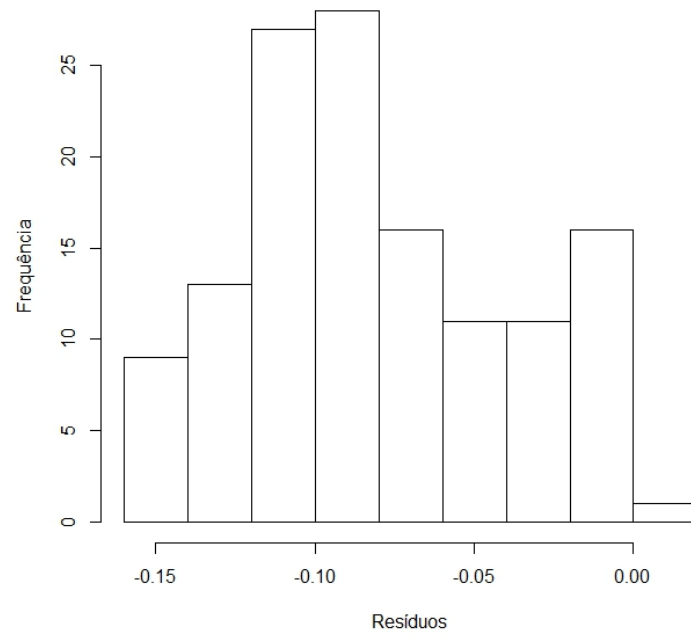


Figura 46 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal SP.

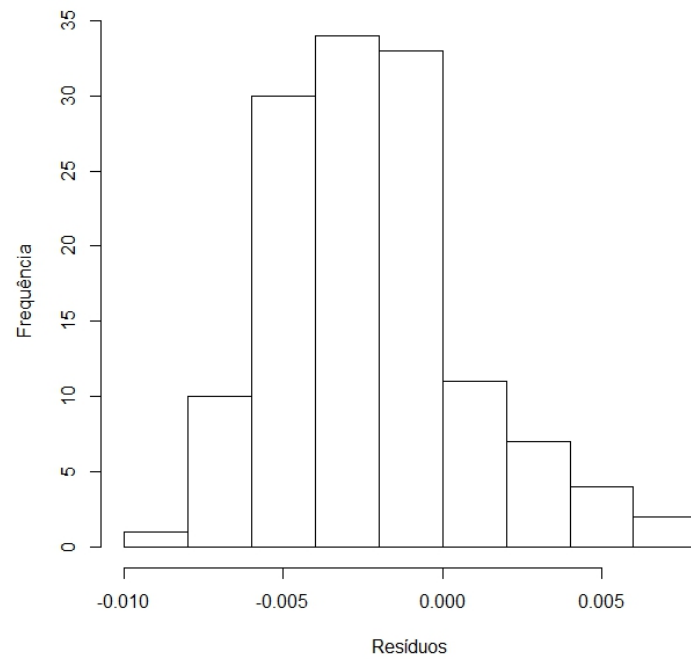


Figura 47 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal SP.

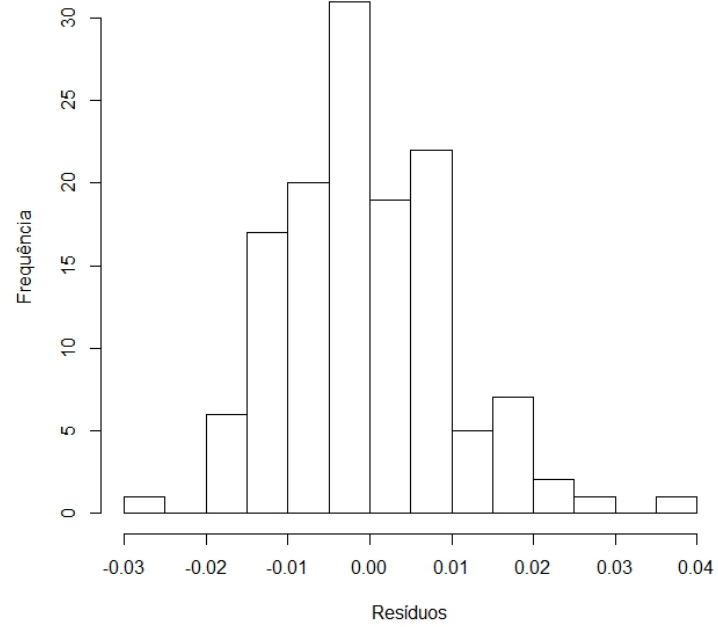


Figura 48 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal SP.

### D.7. Série do Índice Dow Jones (DJ)

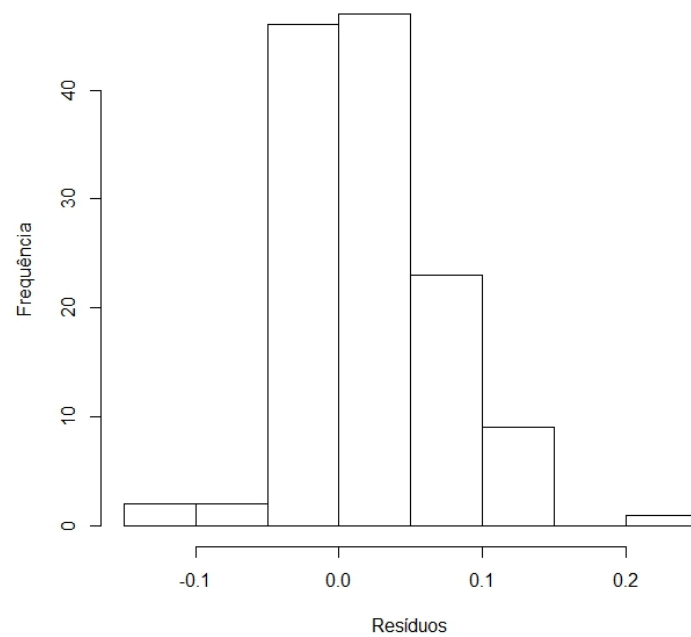


Figura 49 – Resíduos do modelo ANN para a série temporal DJ.



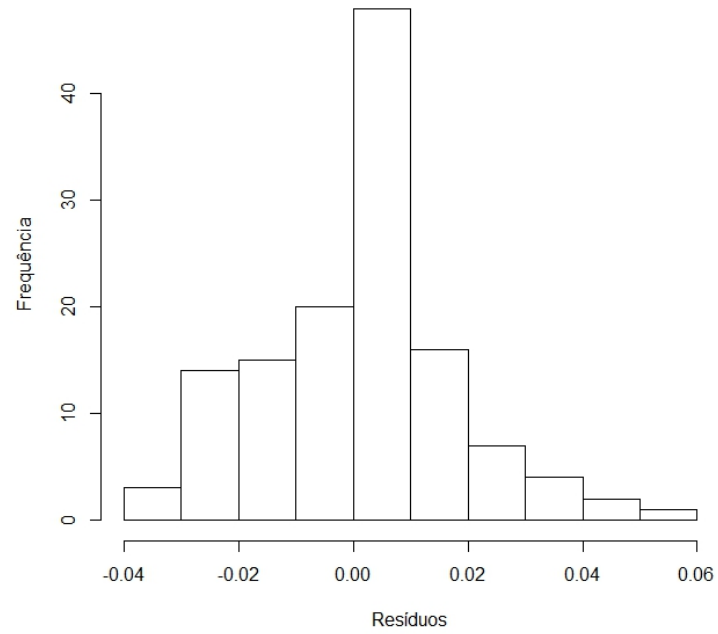


Figura 50 – Resíduos do modelo TAEF para a série temporal DJ.

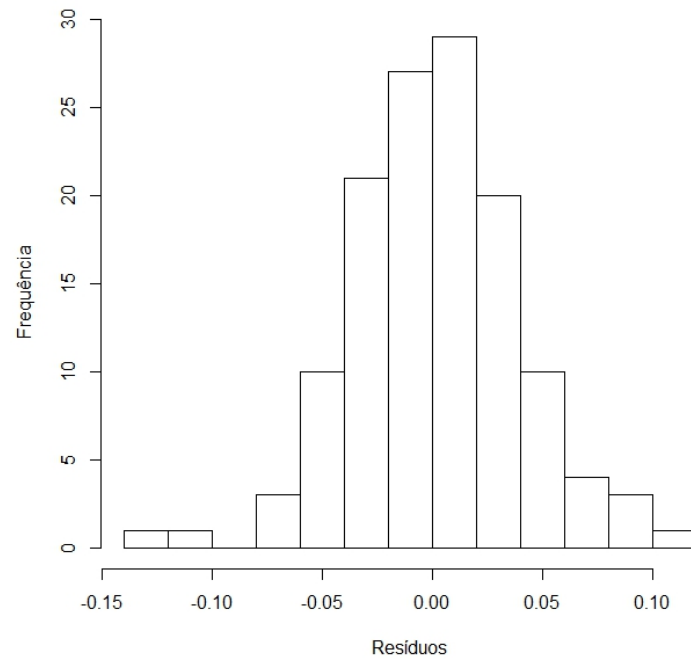


Figura 51 – Resíduos do modelo ARIMA para a série temporal DJ.

## D.7. Série de Precipitação

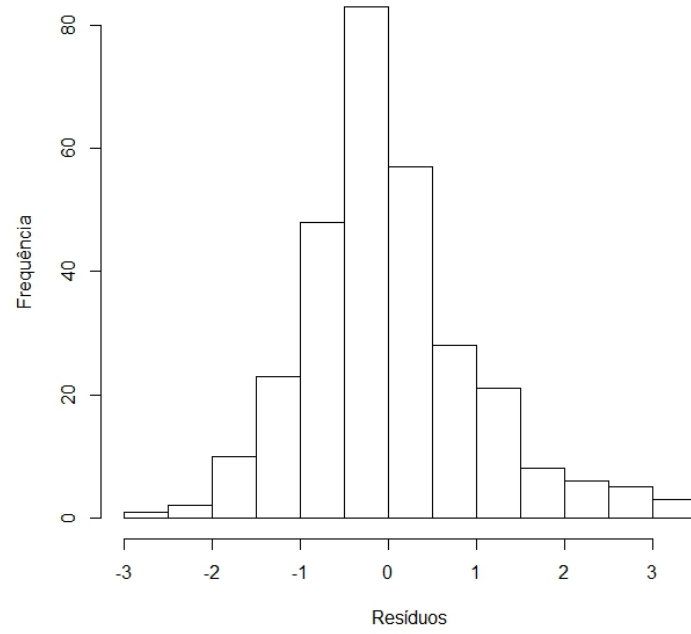


Figura 52 – Resíduos do modelo garch11 para a série de precipitação.

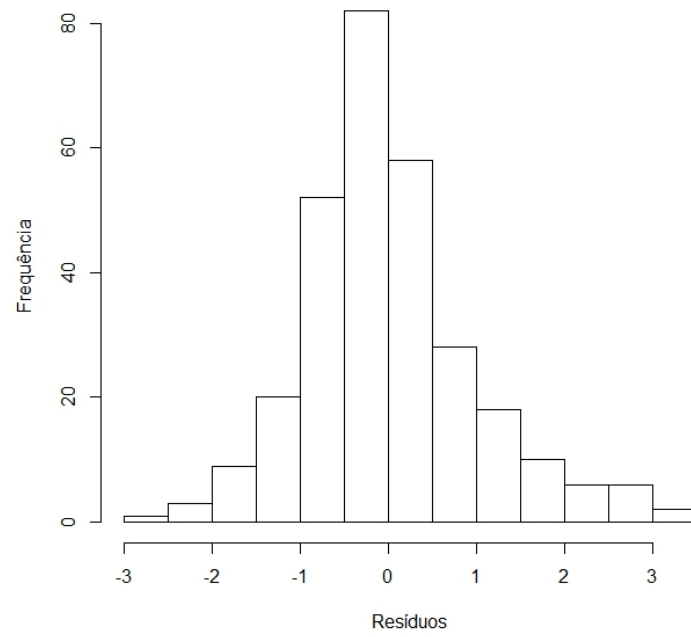


Figura 53 – Resíduos do modelo garch12 para a série de precipitação.

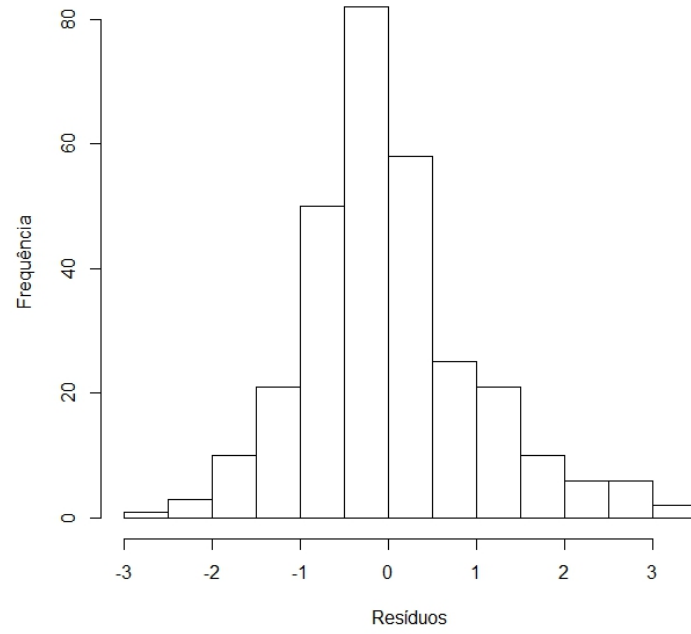


Figura 54 – Resíduos do modelo garch13 para a série de precipitação.

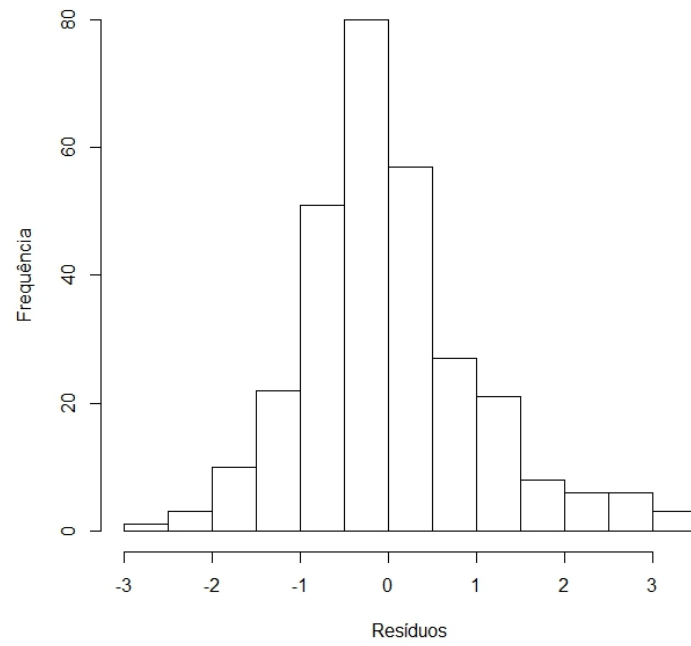


Figura 55 – Resíduos do modelo garch21 para a série de precipitação.

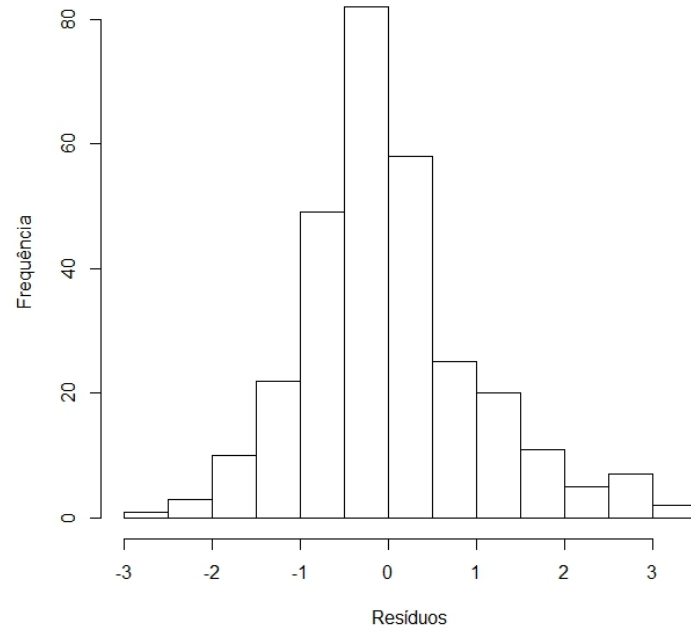


Figura 56 – Resíduos do modelo garch22 para a série de precipitação.

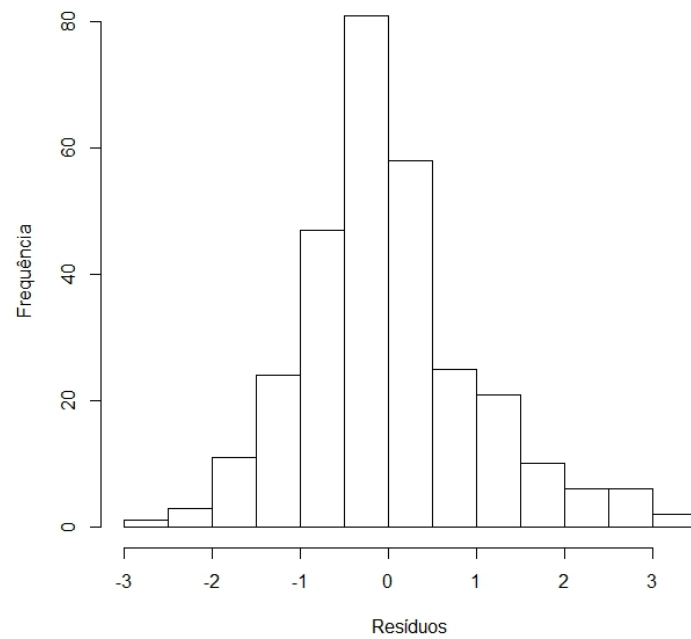


Figura 57 – Resíduos do modelo garch23 para a série de precipitação.

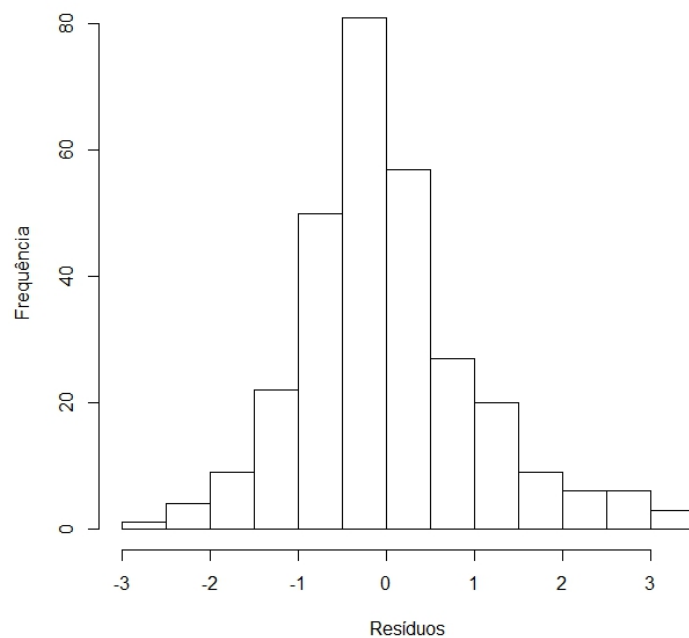


Figura 58 – Resíduos do modelo garch31 para a série de precipitação.

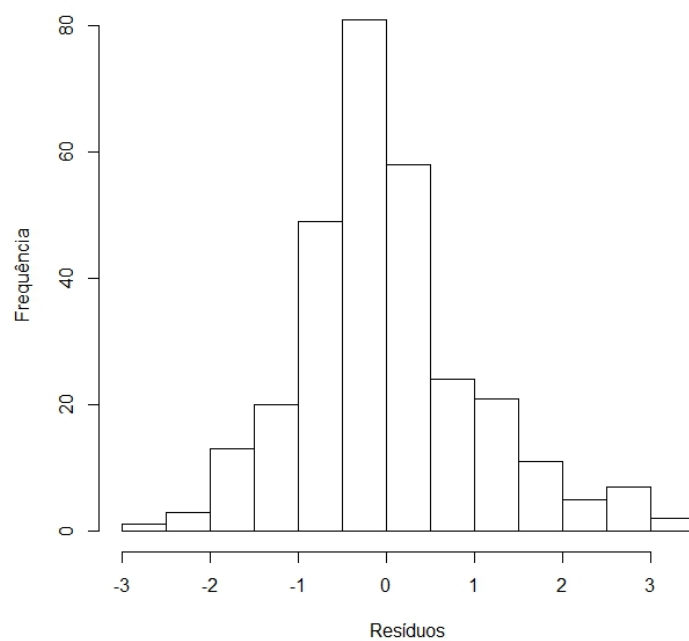


Figura 59 – Resíduos do modelo garch32 para a série de precipitação.

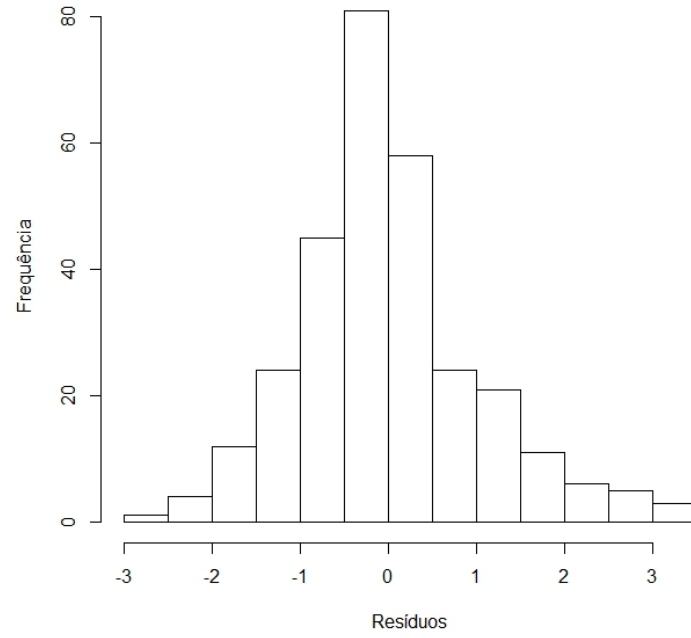


Figura 60 – Resíduos do modelo garch33 para a série de precipitação.

## APÊNDICE E – Correlações

### E.1. Série do Índice Nasdaq (ND)

Tabela 44 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal ND.

Modelos	ANN	TAEF	ARIMA
1 - ANN	1,00000	0,18930	0,74523
p-valor	—	0,00000	0,00000
2 - TAEF	0,18930	1,00000	-0,28619
p-valor	0,00000	—	0,00000
3- ARIMA	0,74523	-0,28619	1,00000
p-valor	0,00000	0,00000	—

### E.2. Série do Valor de Ações Google (GG)

Tabela 45 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal GG.

Modelos	ANN	TAEF	ARIMA
1 - ANN	1,00000	0,72174	-0,18550
p-valor	—	0,00000	0,09947
2 - TAEF	0,72174	1,00000	-0,07513
p-valor	0,00000	—	0,50770
3- ARIMA	-0,18550	-0,07513	1,00000
p-valor	0,09947	0,50770	—

### E.3. Série do Índice S&P500 (SP)

Tabela 46 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal SP.

Modelos	ANN	TAEF	ARIMA
1 - ANN	1,00000	0,43181	-0,03237
p-valor	—	0,00000	0,71250
2 - TAEF	0,43181	1,00000	0,18969
p-valor	0,00000	—	0,02937
3- ARIMA	-0,03237	0,18969	1,00000
p-valor	0,71250	0,02937	—

#### E.4. Série do Índice Dow Jones (DJ)

Tabela 47 – Matriz de correlações entre os modelos ANN, TAEF e ARIMA para série temporal DJ e os respectivos p-valor do teste de hipótese, para série temporal DJ.

Modelos	ANN	TAEF	ARIMA
1 - ANN	1,00000	0,19778	0,47095
p-valor	—	0,02410	0,02410
2 - TAEF	0,19778	1,00000	0,21410
p-valor	0,02410	—	0,01445
3- ARIMA	0,47095	0,21410	1,00000
p-valor	0,02410	0,01445	—



## APÊNDICE F – Covariância entre dois modelos (ou preditores)

$$COV(X_{t,1}, X_{t,2}) = COV(E_{t,1}, E_{t,2}), \quad (\text{F.1})$$

observe os cálculos a seguir:

$$\begin{aligned}
 COV(X_{t,1}, X_{t,2}) &= E(X_{t,1} \cdot X_{t,2}) - E(X_{t,1}) \cdot E(X_{t,2}) \\
 &= E[(u_t + E_{t,1}) \cdot (u_t + E_{t,2})] - E(u_t + E_{t,1}) \cdot E(u_t + E_{t,2}) \\
 &= E[u_t^2 + u_t \cdot E_{t,2} + u_t \cdot E_{t,1} + E_{t,1} \cdot E_{t,2}] - [(u_t + E(E_{t,1})) \cdot (u_t + E(E_{t,2}))] \\
 &= u_t^2 + u_t \cdot E(E_{t,2}) + u_t \cdot E(E_{t,1}) + E(E_{t,1} \cdot E_{t,2}) - \\
 &\quad [u_t^2 + u_t \cdot E(E_{t,2}) + u_t \cdot E(E_{t,1}) + E(E_{t,1}) \cdot E(E_{t,2})] \\
 &= E(E_{t,1} \cdot E_{t,2}) - E(E_{t,1}) \cdot E(E_{t,2}) \\
 &= COV(E_{t,1}, E_{t,2})
 \end{aligned}$$