

PATRÍCIA SILVA NASCIMENTO BARROS

CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES WEIBULL GENERALIZADA:
TEORIAS E APLICAÇÕES

RECIFE - PE
MAIO - 2015



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA
APLICADA

CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES WEIBULL GENERALIZADA: TEORIAS E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Doutor.

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Estudante: Patrícia Silva Nascimento Barros
Orientador: Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior
Co-Orientador: Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito

Recife, maio de 2015.

Ficha catalográfica

B277c Barros, Patrícia Silva Nascimento
Classes de distribuições Weibull generalizada: Teorias e aplicações / Patrícia Silva Nascimento Barros. – Recife, 2015.
186 f. : il.

Orientador(a): Wilson Rosa de Oliveira Junior.
Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, 2015.
Inclui apêndice(s) e referências.

1. Distribuição Weibull 2. Família gama-generalizada
3. Classes de distribuições Weibull Generalizada I. Oliveira Junior, Wilson Rosa de, orientador II. Título

CDD 574.018


UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA
APLICADA

CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES WEIBULL
GENERALIZADA: TEORIAS E APLICAÇÕES

Patrícia Silva Nascimento Barros

Tese julgada adequada para a obtenção do título de
Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defen-
dida e aprovada por unanimidade em 29/05/2015 pela
banca examinadora.

Orientador:

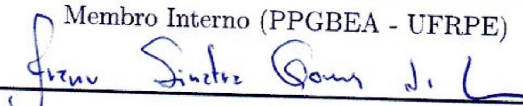


Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior
(PPGBEA - UFRPE)

Banca Examinadora:



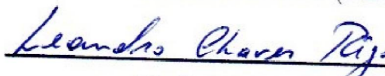
Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira
Membro Interno (PPGBEA - UFRPE)



Prof. Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva
Membro Externo (Deinfo - UFRPE)



Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito
Membro Externo (DAFG - UFPE)



Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo
Membro Externo (DE - UFPE)

Recife, 29/05/2015.

Dedico à meus pais Maria de Lourdes e Francisco Vitorino. Especialmente a meu filho, Khalel, e a meu marido Kleber.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada pela estrutura física e o ambiente intelectual propício para estudos científicos diversos, o qual pude desfrutar durante os anos em que transcorreu a minha pós-graduação.

Agradeço também, aos professores deste programa, por suas preciosas aulas e ensinamentos.

Ao meu orientador prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior e a meu Co-orientador Cícero Carlos Ramos de Brito, por suas aulas e pela orientação que tornaram possíveis a realização deste trabalho científico.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, com os quais tive contato efetivo e afetivo, e que sempre se orgulharam e incentivaram o meu crescimento.

Agradeço também, a meu marido Kleber pela força e incentivo à concluir este trabalho. E meu querido filho Khalel pela força para seguir em frente.

Resumo

A distribuição Weibull é muito popular para modelar dados de sobrevivência. Muitas modificações da distribuição Weibull foram propostas nos últimos anos. Inspirado pela noção da família gama-generalizada de distribuições de Zografos e Balakrishnan, é proposta, a classe de distribuições Weibull generalizada. Um tratamento compreensivo das propriedades matemáticas de algumas novas distribuições é feita, sendo encontradas as expressões para a função de distribuição, função densidade, função de risco, função geradora de momentos, função característica, média, variância, assimetria e curtose. Ajustou-se os novos modelos para conjuntos de dados reais verificando, pelos critérios de escolha, que os melhores ajustes foram obtidos pelos novos modelos. Dessa forma a classe de distribuições Weibull Generalizada mesmo tendo mais parâmetros a serem estimados, os algoritmos foram capazes de ajustar os dados de análise de sobrevivência.

Palavras-chave: Distribuição Weibull, Família gama-generalizada, Classes de distribuições Weibull Generalizada.

Abstract

The Weibull distribution is very popular to model survival data. Many modifications of the Weibull distribution have been proposed in recent years. Inspired by the notion of generalized gamma-generated family of distribution of Zografos e Balakrishnan, the Generalized Weibull Distributions Class is proposed. A comprehensive treatment of the mathematical properties of some new distribution is provided, expressions giving for the distribution function, density function, hazard function, moment generating function, characteristic function, mean, variance, skewness and kurtosis. Real data sets were modeled showing best fits, according the chosen criteria, were obtained by the new models. Thus for the Generalized Weibull Distributions Class, in spite of having more parameters to be estimated, the algorithms were able to best adjust the survival analysis data.

Palavras-chave: Weibull Distribution, Family Gamma-Generalized, Generalized Weibull Distributions Class.

Lista de Figuras

3.1	Função de densidade de probabilidade variando os valores de α, β, λ e θ . .	30
3.2	Função de risco variando os valores de α, β, λ e θ	31
3.3	Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull Log-Logística X	34
3.4	Função de densidade de probabilidade variando os valores de α , o β , o λ e o θ	41
3.5	Função de risco variando os valores de α, β, λ e θ	42
3.6	Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull Weibull K	45
3.7	Função de densidade de probabilidade variando os valores de α , o β , o λ e o θ	57
3.8	Função de risco variando os valores de α, β, λ e θ	58
3.9	Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull Weibull/(1 - Weibull)	61
3.10	Função de densidade de probabilidade variando os valores de α, β, λ e θ . .	73
3.11	Função de risco variando os valores de α, β, λ e θ	74

3.12	Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull Weibull Y	77
4.1	Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WLLX com $\alpha = 0, 3; \beta = 0, 5; \lambda = 1, 2; \theta = 1, 5$ e os ajustes para os dados	79
4.2	Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WWK com $\alpha = 0, 6; \beta = 0, 8; \lambda = 1, 5; \theta = 1, 0$ e os ajustes para os dados	80
4.3	Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WWZ com $\alpha = 0, 3; \beta = 0, 5; \lambda = 1, 2; \theta = 1, 5$ e os ajustes para os dados	82
4.4	Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WWY com $\alpha = 0, 3; \beta = 0, 5; \lambda = 1, 2; \theta = 1, 5$ e os ajustes para os dados	84
4.5	Histograma com as estimativas para os modelos WLLX, BGE, F e BF para os dados	86
4.6	Histograma com as estimativas dos modelos WWK, BGE, F e BF para os dados	89
4.7	Histograma com as estimativas para os modelos WWZ, W e BGE para os dados	91
4.8	Histograma com as estimativas dos modelos WWY, W, EE e PE para os dados	94

Lista de Tabelas

4.1	Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	79
4.2	Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados	80
4.3	Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	81
4.4	Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados	81
4.5	Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	82
4.6	Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados	83
4.7	Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	84
4.8	Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados	85
4.9	Dados definidos por Nichols e Padgett (2006) composto por 100 observações de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba)	85
4.10	Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	86

4.11 Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WLLX, BGE, F e BF	87
4.12 Dados obtidos a partir de (SMITH; NAYLOR, 1987) representam a resistência de fibras de vidro de 1,5 cm, medidos no National Physical Laboratory, Inglaterra	87
4.13 Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	88
4.14 Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WWK, BGE, F e BF	88
4.15 Dados definidos Hipel e McLeod (1994) composto pelo número relatado mensalmente de varicela na Cidade de Nova York entre 1931-1972, divididos por 1000	90
4.16 Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	91
4.17 Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WWZ, W e BGE	92
4.18 Dados definidos por Nichols e Padgett (2006) composto por 69 observações de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba)	92
4.19 Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões	93
4.20 Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WWY, W, EE e PE	93

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	2
2	Revisão de Literatura	3
2.1	Análise de sobrevivência	3
2.1.1	Função de sobrevivência e Função de risco	4
2.2	Medidas Estatísticas	5
2.3	Classes de Distribuições	7
2.3.1	Classes de Distribuições Exponenciada	7
2.3.2	Classes de Distribuições Beta	7
2.3.3	Classes de Distribuições Kumaraswamy	8
2.3.4	Classes da Gama-G generalizada de distribuições	9
2.3.5	Classes da Weibull-G generalizada de distribuições	10
2.4	Modelos de probabilidade	10
2.4.1	Distribuição Weibull	10
2.4.2	Distribuição Gama	11
2.4.3	Distribuição Beta	11
2.4.4	Distribuição Log-Logística	11

2.4.5	Distribuição Beta Weibull	12
2.4.6	Distribuição Fréchet	12
2.4.7	Distribuição Beta Fréchet	13
2.4.8	Distribuição Beta Exponencial Generalizada	13
2.5	Distribuição Exponencial Exponenciada	14
2.6	Distribuição Pareto Exponenciada	14
2.7	Método de Máxima Verossimilhança	14
2.8	Critérios para escolha do modelo	15
2.8.1	Critério de informação de Akaike - AIC	15
2.8.2	Critério de Informação de Akaike Corrigido - AICC	16
2.8.3	Critério de informação bayesiano - BIC	16
2.8.4	Critério de informação de Hannan-Quinn - HQIC	16
2.9	Testes de Hipóteses	17
2.9.1	Teste de Wald	17
2.9.2	Testes de aderência de uma distribuição	17
2.9.2.1	Testes de Cramér Von Mises e Anderson-Darling	17
2.9.2.2	Teste de Kolmogorov-Smirnov	19
2.10	Bootstrap	19
3	Modelo Proposto	21
3.1	Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$	21
3.1.1	Modelo Funcional da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$	21
3.1.2	Expansão da função de distribuição e densidade da classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$	22
3.1.3	Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$	23
3.1.4	Expansões para a função geradora de momentos e a função carac- terística da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$	27
3.1.5	Função log-verossimilhança da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$	27

3.2	Distribuição Weibull $-Log(1 - Log-Logística)$	28
3.2.1	Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica	31
3.2.2	Log-verossimilhança	33
3.2.3	Função quantílica	33
3.3	Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - Log(G))$	34
3.3.1	Modelo Funcional da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - Log(G))$	34
3.3.2	Expansões da função de distribuição e da densidade da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - Log(G))$	35
3.3.3	Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - Log(G))$	36
3.3.4	Expansões para a função geradora de momentos e função característica da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - Log(G))$	39
3.3.5	Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - Log(G))$	39
3.4	Distribuição Complementar Weibull $-Log(Weibull)$	40
3.4.1	Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica	42
3.4.2	Log-verossimilhança	44
3.4.3	Função quantílica	45
3.5	Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$	45
3.5.1	Modelo Funcional da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$	45
3.5.2	Expansões da função de distribuição e densidade da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$	46
3.5.3	Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$	48
3.5.4	Expansões para a função geradora de momentos e função característica da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$	54
3.5.5	Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$	56

3.6	Distribuição Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$	56
3.6.1	Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica	58
3.6.2	Log-verossimilhança	60
3.6.3	Função quantílica	61
3.7	Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$	61
3.7.1	Modelo Funcional da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$	61
3.7.2	Expansões da função de distribuição e densidade da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$	62
3.7.3	Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$	64
3.7.4	Expansões para a função geradora de momentos e a função característica da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$	70
3.7.5	Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$	71
3.8	Distribuição Weibull $(1 - Weibull)/Weibull$	71
3.8.1	Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica	74
3.8.2	Log-verossimilhança	76
3.8.3	Função quantílica	76
4	Aplicações	78
4.1	Aplicação 1: Dados Simulados	78
4.1.1	Weibull $-Log(1-Log-Logística)$	78
4.1.2	Weibull $-Log(Weibull)$	80
4.1.3	Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$	81
4.1.4	Weibull $(1 - Weibull)/Weibull$	83

4.2	Aplicação 2: Dados de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba), conjunto de dados 1	85
4.3	Aplicação 3: Dados de resistência de fibras de vidro de 1,5 cm	87
4.4	Aplicação 4: Número relatado mensalmente de varicela na Cidade de Nova York de 1931-1972	89
4.5	Aplicação 5: Dados de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba), conjunto de dados 2	92
5	Conclusões, Contribuições e Trabalhos Futuros	95
5.1	Conclusões	95
5.2	Contribuições	96
5.3	Trabalhos Futuros	96

CAPÍTULO 1

Introdução

A análise de sobrevivência é uma das áreas da estatística que mais cresceu nas últimas décadas (COLOSIMO; GIOLO, 2006). Esta área consiste de procedimentos estatísticos para analisar dados relacionados ao tempo até a ocorrência de algum evento de interesse (morte, cura, falha de um componente eletrônico, etc.), que em geral, pode ser acomodado por uma distribuição de probabilidade. Nos últimos anos tem sido desenvolvidas novas generalizações e/ou modificações de algumas distribuições em geral utilizadas em análise de sobrevivência. Em particular a distribuição Weibull, tendo as distribuições exponencial e Rayleigh como casos especiais, é uma distribuição muito utilizada para modelar dados em análise de sobrevivência (PHAM; LAI, 2007).

Na literatura existem muitas generalizações e extensões de distribuições simétricas e assimétricas, discretas e contínuas. Alguns dos quais podemos citar: Cordeiro e Lemonte (2012), Nadarajah e Gupta (2004), Silva *et al.* (2010), Mudholkar e Srivastava (1993), Mann *et al.* (1974), Mudholkar *et al.* (1995), Lai *et al.* (2003).

Para melhor compreensão dos fenômenos atípicos, faz-se necessário a criação de modelos mais flexíveis, ou seja, que consigam modelar melhor esses fenômenos, captando mais informações. Dessa forma, nota-se a importância da área de generalização de distribuições de probabilidade para construção de modelos que mais se adequam a dados reais.

O presente trabalho contempla cinco capítulos, incluindo este. O segundo capítulo está dedicado à revisão de literatura sobre análise de sobrevivência. Apresentamos uma revisão das principais medidas de probabilidade, as classes das distribuições e modelos de probabilidade. Fazemos uma revisão sobre o método de estimação de máxima veros-

similhança e bootstrap, bem como dos critérios e dos testes estatísticos utilizados para comparar o ajuste dos modelos nas aplicações a dados reais.

No terceiro capítulo, introduziremos as classes utilizadas para generalizar a distribuição Weibull. No quarto capítulo apresentamos aplicações a dados simulados e reais as novas distribuições. No quinto capítulo, exibimos as conclusões a partir das análises e comparações dos resultados obtidos.

1.1 Objetivos

No artigo (ZOGRAFOS; BALAKRISHNAN, 2009) é introduzida a família gama generalizada de distribuições. O objetivo principal dessa tese é introduzir quatro novas classes de distribuição: Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$; Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$; Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$; e Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$. Também tem como objetivo investigar os casos particulares dessas classes, quando $\delta = 0$, Weibull $-\text{Log}(1 - G)$ Weibull $-\text{Log}(G)$, Weibull $G/(1 - G)$ e Weibull $(1 - G)/G$. Outro objetivo é ajustar quatro novas distribuições: Weibull $-\text{Log}(1 - \text{Log-Logística})$ (WLLX), Weibull $-\text{Log}(Weibull)$ (WWK), Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$ (WWZ), Weibull $(1 - Weibull)/Weibull$ (WWY) a conjuntos de dados reais.

2.1 Análise de sobrevivência

A análise de sobrevivência é um ramo da estatística que analisa o tempo até o acontecimento de determinado evento. Existem dois campos de estudo: a) Análise de Sobrevivência: estudos de tempos de vida, evento = morte, recorrência de um sintoma ou doença, cura; e b) Análise de Confiabilidade: estudos de tempos de vida, evento = falha ou recorrência de um defeito. A seguir, definiremos alguns termos usados na literatura (COLOSIMO; GIOLO, 2006).

Tempo de falha é o tempo decorrido a partir de um instante inicial até a ocorrência do evento de interesse (morte, falha, recorrência). Pode, ainda, ser chamado de: tempo de sobrevivência; tempo de vida; tempo de recorrência (LAWLESS, 1982).

A censura ocorre quando o tempo de vida de um indivíduo ou unidade não é observado. O indivíduo deixa de ser observado ou o experimento deve ser encerrado e ainda existem itens em funcionamento. A falha, ou morte, ocorre por outras causas. São classificadas em (COLOSIMO; GIOLO, 2006):

- Tipo I - o estudo é conduzido até um tempo limite L , pré-fixado e os indivíduos que ainda não experimentaram o evento são censurados;
- Tipo II - o estudo é encerrado quando da ocorrência de r falhas e as $(n - r)$ unidades ainda em funcionamento, são todas censuradas em $t(r)$;

- Aleatória - semelhante à censura tipo I, porém, com os indivíduos sendo incorporados de maneira aleatória.

Seja T uma variável aleatória não negativa que representa o tempo de falha de um elemento, e seja C uma variável aleatória, independente de T , que representa o tempo de censura associado a este elemento. Assim, os dados observados são representados por $t = \min(T, C)$ e δ o indicador de censura, dado por (LAWLESS, 1982):

$$\delta = \begin{cases} 1, T \leq C; \\ 0, T > C. \end{cases}$$

em que $\delta = 0$ indica censura e $\delta = 1$ indica falha.

2.1.1 Função de sobrevivência e Função de risco

O tempo de sobrevivência de um indivíduo é denotado pela variável aleatória T . A distribuição de probabilidade destes tempos de sobrevivência pode ser representada por duas funções que são particularmente úteis e bastante usadas para ilustrar diferentes aspectos dos dados em aplicações de sobrevivência: a função de sobrevivência e a função de taxa de falha (ou risco) (COLOSIMO; GIOLO, 2006).

Suponha que a variável aleatória tenha função densidade de probabilidade (fdp) $f(t)$. A função de distribuição de T é então dada por (LAWLESS, 1982)

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx,$$

e representa a probabilidade de que o tempo de sobrevivência seja menor ou igual a t . A função de sobrevivência denotada por $S(t)$ é definida, então, como a probabilidade do tempo de sobrevivência ser maior que t . Em termos probabilísticos (COLOSIMO; GIOLO, 2006),

$$S(t) = P(T > t),$$

de onde segue que $S(t) = 1 - F(t)$. A função de sobrevivência pode ser interpretada como a probabilidade de uma observação não falhar até o tempo t .

A função taxa de falha pode ser obtida por meio da seguinte função (LAWLESS, 1982)

$$h(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + h | T \geq t)}{h},$$

que pode ser reescrita como

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

em que $f(t)$ é a fdp da variável aleatória T . A função taxa de falha é interpretada como a probabilidade de que a falha ocorra no instante t dado que não ocorreu antes de t .

A função taxa de falha é mais informativa do que a função de sobrevivência, pois diferentes funções de sobrevivência podem ter formas parecidas e funções de taxa de falha totalmente diferentes. Portanto, a modelagem da função taxa de falha é um importante método de análise para dados de tempo de falha, segundo (COLOSIMO; GIOLO, 2006).

2.2 Medidas Estatísticas

A seguir são apresentadas as definições das medidas estatísticas utilizadas nesta tese.

Os momentos tem uma importância em qualquer análise estatística especialmente em trabalhos aplicados. Algumas das mais importantes características de uma dada distribuição pode ser estudada através dos momentos se eles existirem.

Definição 1: O momento de ordem r da variável X é definido por $E(X^r)$, desde que essa quantidade exista. Se $E(X) = \mu < \infty$, definimos o momento central de ordem r por $E[(X - \mu)^r]$, sempre que essa quantidade exista.

Para variáveis aleatórias contínuas, o momento de ordem r e o momento central de ordem r são dados, respectivamente, por:

$$E(X^r) = \mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad (2.1)$$

e

$$E[(X - \mu)^r] = \mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx \quad (2.2)$$

As medidas de tendência central descrevem as características de um conjunto de dados, identificando uma posição central dentro do conjunto de dados. O valor esperado ou esperança matemática ou média de uma variável aleatória X , definido como o momento de ordem 1, é uma medida de tendência central, que é dado por:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.3)$$

Uma característica importante de uma variável aleatória é sua variabilidade que, em geral, é avaliada pela discrepância de seus valores em relação à média. Existem muitas medidas de variabilidade, mas a variância é a mais importante. Seja $\mu < \infty$, a variância de X é definida como o momento central de ordem 2, dado por

$$E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (2.4)$$

Seja X uma variável aleatória qualquer com média μ e desvio padrão σ . O coeficiente de assimetria de X , denotado por γ_1 , indica o grau de assimetria da sua distribuição de probabilidade e é dado por (MAGALHÃES, 2006):

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

Seja X uma variável aleatória qualquer com média μ e desvio padrão σ . O coeficiente de curtose de X , denotado por γ_2 , mede a intensidade dos picos da sua distribuição de probabilidade e é dado por (MAGALHÃES, 2006):

$$\gamma_2 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

A função geradora de momentos (fgm) é útil para encontrar os momentos de uma distribuição de probabilidade. Seja a variável aleatória X , a fgm é dada por (MAGALHÃES, 2006):

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$; com $t_0 > 0$.

A função quantílica Q é a função inversa da função de distribuição acumulada F de uma variável aleatória X . Método da transformada inversa: Seja X uma variável aleatória com função de distribuição acumulada (fda) F . Definimos F^{-1} como a função

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Seja $U \sim U(0, 1)$. A fda da transformada inversa $F^{-1}(U)$ é dada por

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Portanto, para gerar a variável aleatória X , dado uma variável aleatória $U \sim U(0, 1)$

e sua fda inversa F^{-1} , aplicamos o seguinte algoritmo:

- Gerar $U \sim U(0, 1)$;
- Retornar $X = F^{-1}(U)$.

2.3 Classes de Distribuições

Existem várias classes de distribuições na literatura. Algumas das quais citamos a seguir.

2.3.1 Classes de Distribuições Exponenciada

A classe de distribuições exponenciada foi definida por Mudholkar *et al.* (1995). Dada uma distribuição com função de distribuição acumulada (fda) contínua $G(t)$ conhecida como função de distribuição base, sua generalização ou exponenciação pode ser escrita como

$$F(x) = G^a(x), \quad a > 0,$$

consequentemente, a fdp é obtida diretamente por $f(x) = ag(x)G(x)^{a-1}$, em que $g(x) = dG(x)/dx$ é a função densidade de probabilidade da distribuição base. Gupta e Kundu (1999) obtêm as relações para um caso particular, denominando-o de distribuição Exponencial Generalizada (EG) como alternativa às distribuições gama e de Weibull.

2.3.2 Classes de Distribuições Beta

As distribuições da família beta foram obtidas por Nadarajah e Gupta (2004), com a inserção da função de distribuição acumulada da distribuição exponencial na integral da distribuição beta, formando-se a distribuição beta exponencial (BE). Seja uma distribuição com função de distribuição contínua $G(y)$. A distribuição beta-G será

$$F(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^{G(t)} w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1} dw,$$

com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, em que

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1} dw.$$

A função densidade da classe de distribuições beta é dada por

$$f(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} g(t) G(t)^{\alpha-1} (1 - G(t))^{\beta-1}, \quad t > 0.$$

Um inconveniente das distribuições beta-G é que elas são funções da distribuição beta incompleta, dada por

$$B_p(\alpha, \beta) = \int_0^p \omega^{\alpha-1} (1 - \omega)^{\beta-1} d\omega$$

que para $0 < p < 1$ não tem forma analítica fechada, sendo portanto necessário algum método numérico para obtenção dos resultados.

2.3.3 Classes de Distribuições Kumaraswamy

Para contornar o problema das distribuições beta, Pascoa *et al.* (2011), propõem a distribuição de Kumaraswamy (Kw), definindo-se as distribuições K-G por

$$F(t) = 1 - (1 - G(t)^\alpha)^\beta, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

pois esta leva a uma função de distribuição analiticamente solúvel para uma dada distri-

buição primitiva G . A função densidade geral dessa família é dada por

$$f(t) = \alpha \beta g(t) G(t)^{\alpha-1} \{1 - G(t)^\alpha\}^{\beta-1}.$$

Evidentemente, quando $\alpha = \beta = 1$ temos a densidade da distribuição de base. Os parâmetros adicionais α e β controlam a assimetria e as caudas da distribuição (NADARAJAH; ELJABRI, 2013).

Recentemente foram publicados trabalhos com esta classe de distribuições. Por exemplo, Cordeiro *et al.* (2010) propuseram Kw normal, Kw gumbel, Kw gama entre outras. Santana *et al.* (2012) introduz um modelo de regressão baseado na distribuição Kw log-logística. Mais recentemente, Bourguignon *et al.* (2013) deriva a distribuição Kw Pareto que tem como sub-casos a Pareto e a Pareto exponenciada.

2.3.4 Classes da Gama-G generalizada de distribuições

Foram desenvolvidas e discutidas várias formas de generalização de distribuições nos últimos anos. Foi introduzida em (ZOGRAFOS; BALAKRISHNAN, 2009) a família gama-generalizada de distribuições em que é definida a função de distribuição acumulada da gama-generalizada (para $x \in R$) por:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{-\log[S(x)]} t^{\delta-1} e^{-t} dt, \quad (2.5)$$

em que $S(x) = 1 - G(x)$ é a função de sobrevivência e $\Gamma(\delta) = \int_0^\infty x^{\delta-1} e^{-x} dx$ é a função gama.

Ristić e Balakrishnan (2012) propôs uma alternativa definida pela função de distribuição acumulada dada por:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{-\log[G(x)]} t^{\delta-1} e^{-t} dt, \quad (2.6)$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição acumulada. Com essa generalização introduziram o modelo Gama Exponencial Exponenciado (GEE).

Com a generalização (2.6), Pinho *et al.* (2012) definiu o modelo Gama Weibull exponenciado (GWE) e suas propriedades.

Ramos *et al.* (2013) utilizou a generalização (2.5) e propuseram a distribuição Log-logística Zografos-Balakrishnan, que contém a distribuição log-logística como um modelo especial.

Nadarajah *et al.* (2015) forneceu um tratamento completo de propriedades matemáticas gerais de distribuições Zografos-Balakrishnan-G. Discutiram também a estimativa dos parâmetros por máxima verossimilhança e forneceram uma aplicação para um conjunto de dados reais.

Brito (2014) introduziu a classe Gama $(1 - G)/G$, definida pela função de distribuição dada por

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{[1-G(x)]/G(x)}^\infty t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt, \quad (2.7)$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição acumulada. E desenvolveu todas as propriedades.

Torabi e Hedesh (2012) definiu a classe Gama $G/(1 - G)$, que é dada pela seguinte função de distribuição

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{G(x)/(1-G(x))} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} dt, \quad (2.8)$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição acumulada. Introduziram a Gama Uniforme e desenvolveram todas as propriedades.

2.3.5 Classes da Weibull-G generalizada de distribuições

Bourguignon *et al.* (2014) propôs a classe Weibull-G da seguinte forma

$$F(x) = \int_0^{G(x)/[1-G(x)]} \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} dt, \quad (2.9)$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição acumulada. Desenvolveram os momentos incompletos e a função geradora de momentos. E encontraram a Weibull Uniforme, a Weibull Weibull, a Weibull Burr XII e a Weibull Normal.

Alzaatreh *et al.* (2013) definiu a classe Weibull-X da seguinte forma:

$$F(x) = \int_0^{-\text{Log}[1-G(x)]} r(t) dt, \quad (2.10)$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição acumulada, $R(t) = 1 - e^{-(t/\beta)^c}$ é a função de distribuição acumulada e $r(t)$ é a função densidade da Weibull. Encontraram a entropia de Shannon.

2.4 Modelos de probabilidade

A seguir são apresentadas os modelos probabilísticos utilizados nas aplicações para comparar com os novos modelos.

2.4.1 Distribuição Weibull

Foi desenvolvida por Weibull (1951) que lançou um artigo descrevendo esta distribuição e propondo diversas aplicações. O campo de aplicações da distribuição Weibull é vasto e abrange quase todas as áreas da ciência. Seja $X \sim W(\lambda, \theta)$, a função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \lambda \theta (\lambda x)^{\theta-1} e^{-(\lambda x)^\theta} \quad (2.11)$$

com $\lambda > 0$, $\theta > 0$, $x > 0$ e a função de distribuição é

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\theta} \quad (2.12)$$

2.4.2 Distribuição Gama

Em estatística, uma distribuição Gama é uma distribuição de probabilidade contínua, com dois parâmetros r (parâmetro de forma) e α (parâmetro de escala), dos quais se exige $r > 0$ e $\alpha > 0$, cuja função de densidade para valores $x > 0$ é (STACY, 1962)

$$f(x; \alpha, r) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}$$

Aqui, Γ é a função gama, que é dada por $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$.

Um caso particular da distribuição Gama, com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{n}{2}$, onde n é um inteiro positivo, é a distribuição de Chi-quadrado.

2.4.3 Distribuição Beta

Na teoria da probabilidade e estatística, a distribuição beta é uma família de distribuições contínuas de probabilidade definidas sobre o intervalo $[0, 1]$ parametrizado por dois parâmetros positivos, chamados a e b , que aparecem como expoentes da variável aleatória e controlam o formato da distribuição (MCDONALD; XU, 1995). A distribuição beta é uma distribuição de probabilidade cuja função de densidade para valores $0 < x < 1$ é

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{(1-x)^{b-1} x^{a-1}}{B(a, b)}$$

Aqui, Γ é a função gama e B é a função beta.

Um caso especial da distribuição beta, com $a = 1$ e $b = 1$ é a probabilidade uniforme.

2.4.4 Distribuição Log-Logística

Distribuição na teoria da probabilidade e estatística, log-logística é uma distribuição de probabilidade contínua para uma variável aleatória não-negativo. Ele é usado no estudo de eventos de vida cuja intensidade primeiro aumenta e depois diminui, como a mortalidade por câncer após o diagnóstico ou tratamento. Ele também é usado em

hidrologia para modelar o fluxo de um rio ou o nível de chuvas, e economia para modelar a desigualdade de renda.

Existem várias parametrizações diferentes da distribuição em uso (BENNETT, 1983). O parâmetro $\alpha > 0$ é um parâmetro de escala e é também a mediana da distribuição. O parâmetro $\beta > 0$ é um parâmetro de forma. A distribuição é unimodal quando $\beta > 1$ e sua dispersão diminui à medida que aumenta β .

A função de distribuição acumulada é

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{1 + (x/\alpha)^{-\beta}} \quad (2.13)$$

$$= \frac{(x/\alpha)^\beta}{1 + (x/\alpha)^\beta} \quad (2.14)$$

$$= \frac{x^\beta}{\alpha^\beta + x^\beta} \quad (2.15)$$

em que $x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$.

A função densidade de probabilidade é

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{(1 + (x/\alpha)^\beta)^2}$$

2.4.5 Distribuição Beta Weibull

Seja $X \sim BW(a, b, \lambda, c)$, a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição são dadas por (LEE *et al.*, 2007):

$$f(x) = \frac{c\lambda^c}{B(a, b)} x^{c-1} e^{-b(\lambda x)^c} (1 - e^{-(\lambda x)^c}) \quad (2.16)$$

em que $a > 0, b > 0, c > 0, \lambda > 0$ e $x > 0$.

$$F(x) = I_{1-e^{-(\lambda x)^c}}(a, b) \quad (2.17)$$

2.4.6 Distribuição Fréchet

A distribuição de Fréchet foi introduzida por Maurice Fréchet, um matemático francês (FRÉCHET, 1927). Utilizada em aplicações de financiamento, a distribuição de Fréchet tem sido de grande utilidade para a modelagem adequada dos retornos do mercado, que

têm muitas vezes caudas pesadas ((LONGIN, 1996); (EMBRECHTS *et al.*, 1997)). Seja $X \sim F(\sigma, \lambda)$, a função de densidade de probabilidade é dada por :

$$f(x) = \lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-(\sigma/x)^\lambda} \quad (2.18)$$

e a função de distribuição é

$$F(x) = e^{-(\sigma/x)^\lambda} \quad (2.19)$$

2.4.7 Distribuição Beta Fréchet

Seja $X \sim BF(\sigma, a, b)$, a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição são dadas, respectivamente, por (GUPTA; NADARAJAH, 2004):

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} g(x) G(x)^{a-1} (1 - G(x))^{b-1} \quad (2.20)$$

em que $g(x) = \lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-(\sigma/x)^\lambda}$ é a função densidade de probabilidade da fréchet e $G(x) = e^{-(\sigma/x)^\lambda}$ é a função de distribuição da fréchet, com $a, b, \lambda, \sigma > 0$.

$$F(x) = I_{e^{-(\sigma/x)^\lambda}}(a, b) \quad (2.21)$$

2.4.8 Distribuição Beta Exponencial Generalizada

Seja $X \sim PE(\alpha, \beta)$, a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição são dadas, respectivamente, por (BARRETO-SOUZA *et al.*, 2010):

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} g(x) G(x)^{a-1} (1 - G(x))^{b-1} \quad (2.22)$$

em que $g(x) = \alpha\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}$ é a função densidade de probabilidade da Exponencial Generalizada e $G(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$ é a função de distribuição da Exponencial Generalizada.

$$F(x) = I_{(1-e^{-\lambda x})^\alpha}(a, b) \quad (2.23)$$

2.5 Distribuição Exponencial Exponenciada

A distribuição exponencial exponenciada (EE) tem a seguinte função de distribuição acumulada (GUPTA; KUNDU, 2001),

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$$

Por conseguinte, tem a função de densidade dada por

$$f(x) = \alpha\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$$

Os dois parâmetros da distribuição exponencial exponenciada representam os parâmetros de forma e de escala como uma distribuição Gama ou uma distribuição de Weibull.

2.6 Distribuição Pareto Exponenciada

Uma variável aleatória X é dita ter uma distribuição Pareto exponenciada, se a sua função densidade de probabilidade é dada por (KHAN; KUMAR, 2010),

$$f(x) = \theta\lambda[1 - (1 + x)^{-\lambda}]^{\theta-1}(1 + x)^{-(\lambda+1)}$$

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = [1 - (1 + x)^{-\lambda}]^\theta$$

Aqui θ e λ são dois parâmetros de forma. Para $\theta = 1$ a distribuição acima corresponde a distribuição Pareto do segundo tipo.

2.7 Método de Máxima Verossimilhança

Segundo Colosimo e Giolo (2006), existem vários métodos de estimação. Um dos mais conhecidos é o método de mínimos quadrados. No entanto, este método é inapropriado para estudos de tempo de vida, devido a sua incapacidade de incorporar censuras no seu processo de estimação. Para modelos de análise de sobrevivência o método mais utilizado é o de máxima verossimilhança, devido ao fato de o mesmo ser capaz de incorporar dados censurados, além de possuir propriedades ótimas para grandes amostras, como por

exemplo, a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$. A função de verossimilhança de θ correspondente a esta amostra aleatória é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \boldsymbol{\theta})$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de θ , que maximizam $L(\theta)$, ou de forma equivalente, $l(\theta) = \log[L(\theta)]$. Os estimadores são encontrados resolvendo-se o sistema de equações

$$U(\theta) = \frac{\delta l(\theta)}{\delta \theta} = 0$$

Algumas vezes, devido a complexidade da função de verossimilhança, estas equações não possuem uma forma fechada, desta forma deve-se obter os parâmetros pela maximização numérica da função de log-verossimilhança usando algoritmos de otimização não-linear.

2.8 Critérios para escolha do modelo

Alguns critérios comuns na literatura podem ser utilizados para seleção de modelos. Estes devem levar em consideração a complexidade do modelo no critério de seleção. Essencialmente, penalizam a verossimilhança, utilizando o número de parâmetros do modelo e, eventualmente, o tamanho da amostra. Essa penalização é feita subtraindo-se do valor da verossimilhança uma determinada quantidade que depende de quão complexo é o modelo.

2.8.1 Critério de informação de Akaike - AIC

Akaike (1974) propôs utilizar a informação de Kullback-Leibler para a seleção de modelos. Ele estabeleceu uma relação entre a máxima verossimilhança e a informação de Kullback-Leibler desenvolvendo então um critério para estimar a informação e Kullback-Leibler, posteriormente chamado critério de informação de Akaike (*AIC*).

Considerando uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n de tamanho n e o vetor de parâmetros θ , a estatística *AIC* pode ser calculada por:

$$AIC = -2 \log L(\theta) + 2(p)$$

em que $\log L(\theta)$ é a função de log-verossimilhança do modelo escolhido e p é o número de parâmetros a serem estimados. O modelo que apresentar menor AIC será o que se ajusta melhor aos dados.

2.8.2 Critério de Informação de Akaike Corrigido - AICC

Liang e Zou (2008) propuseram um AIC corrigido ($AICC$). Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n e o vetor de o parâmetros θ , a estatística $AICC$ é dada por:

$$AICC = AIC + \frac{2(p+2)(p+3)}{n-p-3}$$

em que p é o número de parâmetros a serem estimados e n é o número de observações da amostra. O modelo que melhor se ajusta será o que apresentar menor $AICC$.

2.8.3 Critério de informação bayesiano - BIC

O critério de informação bayesiano (BIC), também chamado de critério de Schwarz (SCHWARZ *et al.*, 1978), é um critério de avaliação de modelos definido em termos da probabilidade a posteriori, sendo assim chamado porque Schwarz forneceu um argumento bayesiano para prová-lo. Dado uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n de tamanho n e o vetor de o parâmetros θ , a estatística BIC é dada por:

$$BIC = -2 \log L(\theta) + p \log n,$$

em que $\log L(\theta)$ é a função de log-verossimilhança do modelo escolhido, p é o número de parâmetros a serem estimados e n é o número de observações da amostra. Segundo esse critério, o melhor modelo será aquele que apresentar menor valor para BIC .

2.8.4 Critério de informação de Hannan-Quinn - HQIC

O critério de informação de Hannan-Quinn ($HQIC$) é um critério de seleção de modelos alternativo ao AIC e BIC . Proposto por (HANNAN; QUINN, 1979) é definido por

$$HQIC = 2p \log \log(n) - 2 \log L(\hat{\theta})$$

Este critério tem pouco uso prático pois, a maioria dos conjuntos de dados tem poucas observações. Assim como os critérios anteriores, a seleção do modelo é através da comparação do HQIC de todos os modelos possíveis selecionando o de menor *HQIC* (BURNHAM; ANDERSON, 2002).

2.9 Testes de Hipóteses

2.9.1 Teste de Wald

O teste de Wald foi devido à Abraham Wald (1902-1950) e teve grande contribuição na inferência estatística em meados do século XX (WASSERMAN, 2004). Sob a hipótese nula $H_0 : \theta = 0$; tem distribuição assintótica normal padrão, isto é

$$\frac{\hat{\theta} - 0}{\hat{EP}(\hat{\theta})} \underset{a}{\sim} N(0, 1)$$

A estatística do teste de Wald é definida por:

$$W = \frac{\hat{\theta}}{\hat{EP}(\hat{\theta})}$$

em que $\hat{\theta}$ é a estimativa do parâmetro e $\hat{EP}(\hat{\theta})$ é o erro-padrão do estimador.

Este valor é comparado com o valor crítico da distribuição normal padrão, que ao nível de confiança de 95% é, aproximadamente, igual a 2 (sendo mais rigoroso: 1,96). Assim, se o valor da estatística W for maior que 2 a estimativa é dita significativa.

2.9.2 Testes de aderência de uma distribuição

2.9.2.1 Testes de Cramér Von Mises e Anderson-Darling

Definição: Função de distribuição empírica: Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ (eventualmente com repetições) uma amostra aleatória observada da função de distribuição F_X . A função de distribuição associada a X^* que atribui uniformemente

$$P[X^* = x_i] = \frac{1}{n}$$

é a chamada função de distribuição empírica (fde), e denota-se por F_n .

Os testes de Cramer-Von Mises e Anderson-Darling são baseados na função de distribuição empírica (fde) dos dados, e apresentam vantagens sobre o teste de aderência qui-quadrado, incluindo maior poder e invariância em relação aos pontos médios dos intervalos escolhidos. Os testes Anderson-Darling e Cramer-von Mises pertencem à classe quadrática de estatísticas baseadas na fde, pois trabalham com as diferenças quadráticas entre a distribuição empírica e a hipotética. As estatísticas de Cramer-von Mises (W^*) e Anderson-Darling (A^*) são descritas em detalhes em Chen e Balakrishnan (1995). Em geral, quanto menor for o valor das estatísticas W^* e A^* , melhor o ajuste para os dados.

O teste de Anderson-Darling foi proposto por Anderson-Darling (1952) e é mais utilizado quando o tamanho da amostra não é maior que 25. Este teste baseia-se na função de distribuição empírica.

Considere $\delta_i = F(x_{(i)}; \theta)$ uma f.d.a., com $x_{(i)}$ em ordem crescente. Faça $y_{(i)} = \Phi^{-1}(\delta_i)$, em que Φ representa a distribuição normal padrão.

Seja $p_{(i)} = \Phi\left(\frac{[y_{(i)} - \bar{y}]}{s_y}\right)$, em que \bar{y} é a média e s_y o desvio padrão dos $y_{(i)}$, respectivamente.

Assim, a expressão da estatística de teste de Anderson-Darling é calculada da seguinte forma. Seja

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i-1)\log(p_{(i)}) + (2n+1-2i)\log(1-p_{(i)})] \quad (2.24)$$

em que $p_{(i)} = \Phi\left(\frac{[y_{(i)} - \bar{y}]}{s_y}\right)$ são percentis ordenados da distribuição normal padrão e Φ representa a função de distribuição acumulada normal padrão. A estatística de Anderson-Darling é dada por $A^* = A^2 \left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2}\right)$.

O Teste de Cramér Von Mises também se baseia na distribuição acumulada e foi proposto por Darling (1957). A expressão da estatística de teste de Cramér Von Mises é calculada da seguinte forma. Seja

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(p_{(i)} - \frac{2i-1}{2n}\right)^2, \quad (2.25)$$

em que $p_{(i)}$ é definido como na seção anterior. A estatística de Cramér Von Misses é dada por $W^* = W^2 \left(1 + \frac{0,5}{n}\right)$.

2.9.2.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov

Para uma variável aleatória X , o teste K-S baseia-se na análise do ajustamento entre a função de distribuição populacional admitida em H_0 , F_0 , e a função de distribuição empírica \hat{F}_n . Assim, sendo F a função de distribuição (desconhecida) da população, as hipóteses a testar serão:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x),$$

em que F_0 é a função de distribuição proposta, contínua e completamente especificada.

No teste de Kolmogorov-Smirnov considera-se a estatística

$$K - S = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)|,$$

como uma medida da discrepância entre a função de distribuição da amostra F_n e a função de distribuição proposta F_0 . Observe-se que K-S representa a distância vertical máxima entre as imagens da função de distribuição da amostra, $F_n(x)$, e da função de distribuição proposta $F_0(x)$, dando assim uma ideia do ajustamento, como aliás se pretendia. Ou seja, quanto menor o valor de K-S melhor o ajustamento.

O p-valor, ou nível descritivo, é a probabilidade de se obter um valor tão ou mais extremo (desfavorável) que o valor observado, se H_0 for verdadeiro. Geralmente é uma das saídas fornecidas por softwares estatísticos. Considerando um nível de 5%, se o p-valor for maior que 5% o modelo se ajusta aos dados.

2.10 Bootstrap

Bootstrap é um método de reamostragem proposto por Bradley Efron em 1979. Os métodos de bootstrap são uma classe de métodos de Monte Carlo não paramétricos que estimam a distribuição da população por reamostragem. Existem muitas técnicas de reamostragem que visam estimar parâmetros de uma distribuição de interesse. Uma vantagem em utilizar a técnica de reamostragem Bootstrap é a generalidade com que pode ser aplicada, pois requer que menos suposições sejam feitas. Outras vantagens são que geralmente fornece respostas mais precisas, além de favorecer o entendimento (WASSERMAN, 2004).

Geralmente tomamos uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n de uma distribuição F_X e construímos uma função $\hat{\theta} = g(X_1, \dots, X_n)$ chamada estatística da qual se realizam inferências

sobre um parâmetro θ da população. O método bootstrap repete esse procedimento utilizando a amostra aleatória como base para se construir uma distribuição empírica F_n (JAMES *et al.*, 2013). O algoritmo a seguir ilustra todo o processo.

Algoritmo Bootstrap:

1. Simule $X_1^*, \dots, X_n^* \sim F_n$;
2. Calcule $\hat{\theta}^* = g(X_1^*, \dots, X_n^*)$;
3. Repita os passos (1) e (2), B vezes e compute $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$;
4. Calcule

$$EP_{boot}(\hat{\theta}^*) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}_{(\cdot)}^*)^2}$$

$$\text{em que } \hat{\theta}_{(\cdot)}^* = \frac{1}{B} \sum_{r=1}^B \hat{\theta}_r^*$$

Uma correção para as estimativas bootstrap podem ser obtidas definindo

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta}^* - \hat{vies}$$

fazendo $\hat{vies} = \hat{\theta}_{(\cdot)}^* - \hat{\theta}^*$, temos

$$\tilde{\theta} = 2\hat{\theta}^* - \hat{\theta}_{(\cdot)}^*$$

Supondo que $\hat{\theta}_{(\cdot)}^*$ e $\hat{\theta}^*$ são independentes e o erro padrão de $\tilde{\theta}$ fica

$$EP(\tilde{\theta}) = \sqrt{4Var(\hat{\theta}^*) + Var(\hat{\theta}_{(\cdot)}^*)}$$

em que $Var(\hat{\theta}^*)$ é o quadrado do $EP_{boot}(\hat{\theta}^*)$. Para se obter uma estimativa para $Var(\hat{\theta}_{(\cdot)}^*)$ se repete o algoritmo de bootstrap uma quantidade arbitrária C , tomando-se ao final do processo a variância amostral de $\hat{\theta}_{(\cdot),1}^*, \dots, \hat{\theta}_{(\cdot),C}^*$.

Utilizamos essa técnica bootstrap para obter as estimativas e respectivos erros-padrões de ajustes de densidades a conjunto univariados de dados.

As nomenclaturas das classes e distribuições propostas seguem o padrão proposto por Brito (2014), fazendo uso dos Corolários 3.1.5, 3.1.6 e 3.1.7.

3.1 Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$

3.1.1 Modelo Funcional da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$

Definimos a classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$, que é uma generalização da classe proposta por Alzaatreh *et al.* (2013). Seja X uma distribuição da classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$, temos, para $x > 0$, a seguinte função de distribuição acumulada:

$$\begin{aligned} F_G(x) &= \int_{\delta(1-G(x))}^{\delta-\log(1-G(x))} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= e^{-\lambda^\theta (\delta(1-G(x)))^\theta} - e^{-\lambda^\theta (\delta-\log(1-G(x)))^\theta}, \quad \delta \geq 0, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos, para $x > 0$, a função densidade de probabilidade dada por:

$$\begin{aligned}
f_G(x) &= \lambda^\theta \theta \delta g(x) (\delta(1 - G(x)))^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta (\delta(1-G(x)))^\theta} \\
&\quad + \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{1 - G(x)} (\delta - \log(1 - G(x)))^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(1-G(x)))^\theta}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.2 Expansão da função de distribuição e densidade da classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$

Podemos obter uma expansão da função de distribuição da seguinte maneira.

Como,

$$W(y) = e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(1-y))^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(y - \frac{e-1}{e} \right)^k, \quad \text{com } 0 < y < 1$$

em que

$$a_k = \frac{W^{(k)}\left(\frac{e-1}{e}\right)}{k!}$$

Logo temos que

$$F_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(G(x) - \frac{e-1}{e} \right)^k$$

Como

$$\left(G(x) - \frac{e-1}{e} \right)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j G^{k-j}(x)$$

Portanto temos

$$e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(1-G(x)))^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j G^{k-j}(x)$$

Como

$$e^{-\lambda^\theta (\delta(1-G(x)))^\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta}}{s!} (1 - G(x))^{s\theta}$$

e como

$$(1 - G(x))^{s\theta} = \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} (-1)^z G^z(x)$$

Logo temos:

$$e^{-\lambda^\theta (\delta(1-G(x)))^\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^z(x)$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} F_G(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^z(x) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j G^{k-j}(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja de variável aleatória contínua, temos $f_G(x) = F'_G(x)$, portanto

$$\begin{aligned} f_G(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z g(x) G^{z-1}(x) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.3 Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$

Seja X uma distribuição da classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$, o m -ésimo momento é dado por

$$\begin{aligned}
E(X^m) &= \mu_m = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{z-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{m,1,k-j-1} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Em particular, temos a seguinte expansão para a média, como $\mu = \mu_1$, então teremos:

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{1,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{1,1,k-j-1} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

A seguir, os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m .

Como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x),$$

temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu_{m-r} \mu^r.$$

Como

$$\begin{aligned}
\mu_{m-r} &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{m-r,1,k-j-1}, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned} \mu'_m = & \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \tau_{m-r,1,k-j-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, o m -ésimo momento central é dado por

$$\begin{aligned} \mu'_m = & \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \\ & - \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{m}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \tau_{m-r,1,k-j-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Em particular, temos uma expansão para a variância dada por

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mu'_2 = & \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \\ & - \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \tau_{2-r,1,k-j-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

A expansão do coeficiente geral é obtida da seguinte forma

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então temos

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ temos que a expansão para o coeficiente de assimetria para a classe Weibull $(\delta(1-G), \delta - \text{Log}(1-G))$ é dada por

$$C_a = \frac{\mu'_3}{\sigma^3}$$

em que

$$\begin{aligned}\mu'_3 &= \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{3-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{3}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \tau_{3-r,1,k-j-1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma^3 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \tau_{2-r,1,k-j-1} \right)^{3/2}.\end{aligned}$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$, temos que o coeficiente de curtose é dado por

$$C_c = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}$$

em que

$$\begin{aligned}\mu'_4 &= \sum_{r=0}^4 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{4-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{4}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \tau_{4-r,1,k-j-1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma^4 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \tau_{2-r,1,k-j-1} \right)^2.\end{aligned}$$

3.1.4 Expansões para a função geradora de momentos e a função característica da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$

Seja X uma distribuição da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$, a função geradora de momentos é dada por

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{z-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \rho_{t,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \rho_{t,1,k-j-1} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Seja X uma distribuição da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$, a função característica é dada por

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \rho_{it,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j) \rho_{it,1,k-j-1} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

3.1.5 Função log-verossimilhança da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$

A seguir, veremos a função log-verossimilhança da classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$. A função de log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\xi) &= n \log \theta + n \theta \log \lambda + \log \prod_{i=1}^n \left[\delta g(x_i) [\delta(1 - G(x_i))]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta [\delta(1 - G(x_i))]^\theta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{g(x_i)}{1 - G(x_i)} [\delta - \log(1 - G(x_i))]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta [\delta - \log(1 - G(x_i))]^\theta} \right] \tag{3.13}
\end{aligned}$$

3.2 Distribuição Weibull $-Log(1-Log-Logística)$

Para $\delta = 0$, temos o caso particular, a classe Weibull-X que foi definida por Alzaatreh *et al.* (2013). As propriedades desta classe estão no Apêndice A. A função de distribuição acumulada da distribuição Weibull $-Log(1-Log-Logística)$ (WLLX) é dada por

$$\begin{aligned} F_{LL}(x) &= \int_0^{-\log\left(1 - \frac{1}{1 + (\frac{x}{\alpha})^{-\beta}}\right)} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= 1 - e^{-\left(\lambda \log\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)^\theta}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$. Neste caso utilizou-se a função de distribuição acumulada da Log-Logística. Como $G(x)$ é uma função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F_{LL}(x)$ temos que a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_{LL}(x) = \frac{\beta \theta \lambda \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta-1} \left(\lambda \log\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)^{\theta-1} e^{-\left(\lambda \log\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)^\theta}}{\alpha \left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)}, \quad (3.15)$$

em que, $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

A seguir, apresentamos os cálculos do desenvolvimento da expansão da função de distribuição e da densidade da distribuição Weibull $-Log(1-Log-Logística)$.

Sejam $G(x) = LL(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{\alpha})^{-\beta}}$ e $\delta = 0$, logo substituindo na classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \log(1 - G))$, temos que:

$$F_G(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} (-1)^{s+z} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^z(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j G^{k-j}(x)$$

$$F_{LL}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j \left(\frac{1}{1 + (\frac{x}{\alpha})^{-\beta}}\right)^{k-j}$$

Como $\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}\right)^{j-k} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{j-k}{l} (-1)^l \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta}$, logo temos que:

$$\begin{aligned}
F_{LL}(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j \sum_{l=0}^{\infty} \binom{j-k}{l} (-1)^l \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{j} \binom{j-k}{l} a_k (-1)^{j+l} \left(\frac{e-1}{e}\right)^j \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Esta expansão não é interessante para os cálculos dos momentos, dessa forma fazemos o seguinte, como $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta} = -\log(e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta}})$, temos que

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta} = -\log\left(1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta}}\right)\right) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta}\right)^z}{z}$$

Como $\left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta}\right)^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{z}{\nu} (-1)^{\nu} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\nu l\beta}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta} &= \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{z}{\nu} (-1)^{\nu} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\nu l\beta}}}{z} \\
&= \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{z}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{z} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\nu l\beta}} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Assim a função de distribuição é dada por,

$$\begin{aligned}
F_{LL}(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{j} \binom{j-k}{l} a_k (-1)^{j+l} \left(\frac{e-1}{e}\right)^j \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-l\beta} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{j} \binom{j-k}{l} a_k (-1)^{j+l} \left(\frac{e-1}{e}\right)^j \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{z}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{z} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\nu l\beta}} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k}{j} \binom{j-k}{l} \binom{z}{\nu} \frac{a_k (-1)^{j+l+\nu}}{z} \left(\frac{e-1}{e}\right)^j e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\nu l\beta}} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Como a distribuição $LL(x)$ é de variável aleatória contínua, teremos $f_{LL}(x) = F'_{LL}(x)$, portanto,

$$f_{LL}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k}{j} \binom{j-k}{l} \binom{z}{\nu} \frac{a_k (-1)^{j+l+\nu+1} \left(\frac{e-1}{e}\right)^j}{z} (-1)^{\alpha^{-1}} \nu l \beta (\alpha^{-1} x)^{\nu l \beta - 1} e^{-(\alpha^{-1} x)^{-\nu l \beta}} \quad (3.19)$$

Podemos reescrever a expansão da densidade da seguinte forma

$$f_W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} h_{\alpha^{-1}, \nu l \beta}(x) \quad (3.20)$$

em que

$$\zeta_{j,k,l,z,\nu} = \binom{k}{j} \binom{j-k}{l} \binom{z}{\nu} \frac{a_k (-1)^{j+l+\nu} \left(\frac{e-1}{e}\right)^j}{z}$$

e

$$h_{\alpha^{-1}, \nu l \beta}(x) = \nu l \beta (\alpha^{-1} x)^{\nu l \beta} e^{-(\alpha^{-1} x)^{-\nu l \beta}}$$

A Figura 3.1 contém a função densidade de probabilidade variando os valores de α , β , λ e θ . É possível observar que os formatos são variados, incluindo, exponencial, simétrica e assimétrica positiva dependendo dos valores dos parâmetros.

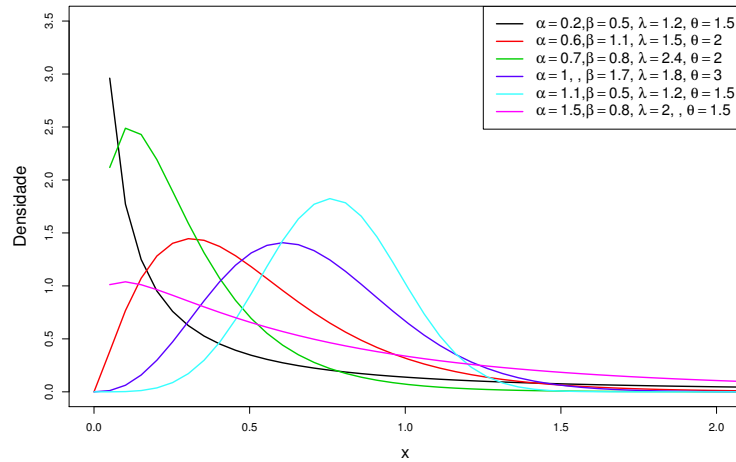


Figura 3.1: Função de densidade de probabilidade variando os valores de α , β , λ e θ

A função de sobrevivência é dada por

$$S(x) = 1 - F(x) = e^{-\left(\lambda \text{Log}\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)^\theta}. \quad (3.21)$$

A função de risco é dada por

$$h(x) = \frac{\beta\theta\lambda\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta-1}\left(\lambda\text{Log}\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)\right)^{\theta-1}}{\alpha\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)}, \quad (3.22)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

A Figura 3.2 apresenta a função de risco variando os valores de α , β , λ e θ . A função de risco apresenta comportamentos constantes, crescentes e decrescentes.

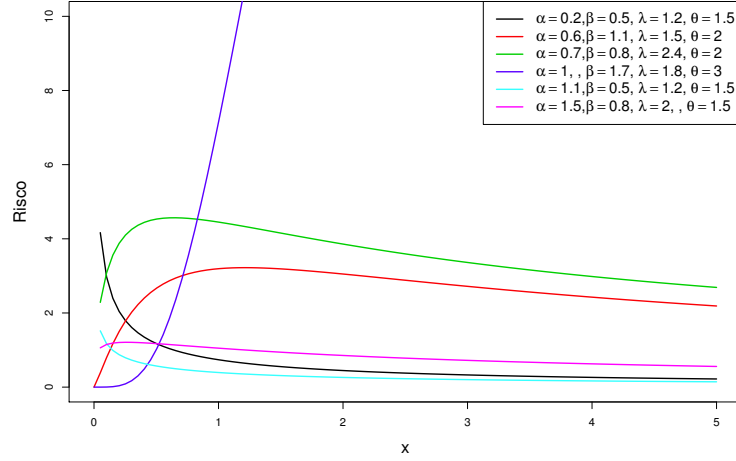


Figura 3.2: Função de risco variando os valores de α , β , λ e θ

3.2.1 Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica

Seja X uma distribuição Weibull $-Log(1 - Log-Logística)$, o momento de ordem r é dado por

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \int_0^{\infty} x^r g_{\alpha^{-1},\nu\beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \alpha^r \Gamma\left[1 + \frac{r}{\nu\beta}\right] \end{aligned}$$

Em particular, temos o momento de ordem 1, a média que é dado por

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \int_0^{\infty} x g_{\alpha^{-1},\nu\beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \alpha \Gamma \left[1 + \frac{1}{\nu\beta} \right]\end{aligned}$$

O momento central de ordem 2, a variância é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \int_0^{\infty} (x - \mu)^2 g_{\alpha^{-1},\nu\beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \alpha^2 \left(\Gamma \left[1 + \frac{2}{\nu\beta} \right] - \Gamma \left[1 + \frac{1}{\nu\beta} \right]^2 \right)\end{aligned}$$

O coeficiente de assimetria é dado por

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \int_0^{\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^3 g_{\alpha^{-1},\nu\beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \frac{\alpha^3 \Gamma \left[1 + \frac{3}{\nu\beta} \right] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}\end{aligned}$$

O coeficiente de curtose, é dado por:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \int_0^{\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^4 g_{\alpha^{-1},\nu\beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \frac{\alpha^4 \Gamma \left[1 + \frac{4}{\nu\beta} \right] - 3\gamma_1\mu\sigma^3 - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4}\end{aligned}$$

A função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \int_0^{\infty} e^{tx} g_{\alpha^{-1},\nu l\beta}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{r+1}}{\nu l \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\nu l \beta} \right] \right)
\end{aligned}$$

A função característica é dada por:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \int_0^{\infty} e^{itx} g_{\alpha^{-1},\nu l\beta}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l,z,\nu} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha it)^{r+1}}{\nu l \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\nu l \beta} \right] \right)
\end{aligned}$$

3.2.2 Log-verossimilhança

A função de log-verossimilhança da distribuição Weibull $-Log(1-Log-Logística)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\theta) &= n \log \beta + n \log \theta + n \log \lambda + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\alpha}{x_i} \right) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left(\lambda \log \left(1 + \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \lambda^\theta \left(\log \left(1 + \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \right)^\theta - \sum_{i=1}^n \log \alpha \left(1 + \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right)
\end{aligned}$$

3.2.3 Função quantílica

Invertendo a função de distribuição obtemos a função quantílica da distribuição $T \sim WLLX(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$

$$t = Q(p) = \alpha \left[e^{\frac{(-\log(1-p))^{1/\theta}}{\lambda}} - 1 \right]^{1/\beta}. \quad (3.23)$$

Com a função quantílica 3.23 obtemos 450 números pseudo aleatórios da distribuição $T \sim WLLX(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ com $\alpha = 0,3, \beta = 0,5, \lambda = 1,2$ e $\theta = 1,5$. Os parâmetros estimados pelo método de máxima verossimilhança: $\alpha = 0,139, \beta = 0,448, \lambda = 0,944$ e $\theta = 1,786$. A Figura 3.3 mostra o histograma com os parâmetros verdadeiros e estimados da distribuição Weibull $-Log(1-Log-Logística)$. A log-verossimilhança para os estimadores

de máxima verossimilhança foi 0,202 e para os parâmetros verdadeiros 0,205 mostrando um bom ajuste pelo método de máxima verossimilhança.

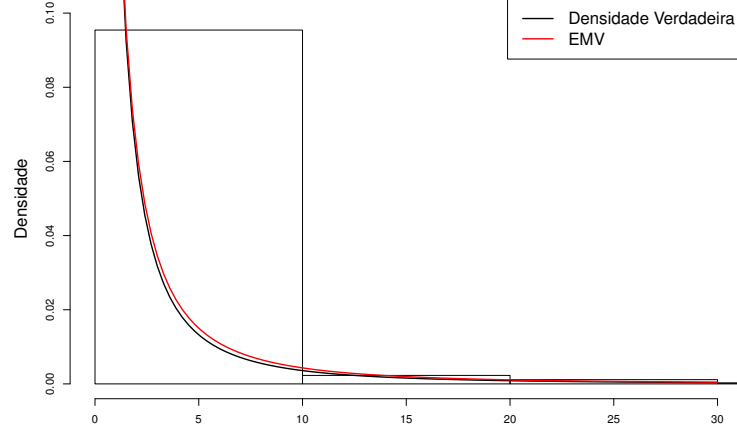


Figura 3.3: Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull Log-Logística X

3.3 Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$

3.3.1 Modelo Funcional da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$

Definimos a classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$ que é uma generalização da classe definida por Tahir *et al.* (2014). Seja X uma distribuição da classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$, a função de distribuição acumulada é dada por:

$$\begin{aligned} F_G(x) &= 1 - \int_{\delta G(x)}^{\delta - \log(G(x))} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= 1 + e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(G(x)))^\theta} - e^{-\lambda^\theta (\delta G(x))^\theta}, \quad \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade dada por:

$$f_G(x) = \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{G(x)} (\delta - \log(G(x)))^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(G(x)))^\theta} + \lambda^\theta \delta \theta g(x) (\delta G(x))^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta (\delta G(x))^\theta} \quad (3.25)$$

3.3.2 Expansões da função de distribuição e da densidade da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$

A seguir é apresentado os cálculos da expansão da função de distribuição e da densidade da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$.

Como

$$W(y) = e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(y))^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y - e^{-1})^k, \quad \text{com } 0 < y < 1$$

em que

$$a_k = \frac{w^{(k)} e^{-1}}{k!}$$

Logo temos que

$$e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(G(x)))^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (G(x) - e^{-1})^k$$

Como

$$(G(x) - e^{-1})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j e^{-j} G^{k-j}(x)$$

Logo temos

$$e^{-\lambda^\theta (\delta - \log(G(x)))^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} G^{k-j}(x)$$

Como

$$e^{-\lambda^\theta (\delta G(x))^\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^{s\theta}(x)$$

Logo temos a expansão da função de distribuição dada por

$$F_G(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} G^{k-j}(x) - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^{s\theta}(x)$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja de variável aleatória contínua, teremos, $f_G(x) = F'_G(x)$,

portanto

$$\begin{aligned}
f_G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x) \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} g(x) G^{s\theta-1}(x)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

3.3.3 Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$

Seja X uma distribuição da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$, temos o momento de ordem m dado por

$$\begin{aligned}
E(X^m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \int_0^{\infty} x^r g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \int_0^{\infty} x^r g(x) G^{s\theta-1}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{r,1,k-j-1} \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \tau_{r,1,s\theta-1}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Em particular, temos a seguinte expansão para a média:

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{1,1,k-j-1} \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \tau_{1,1,s\theta-1}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

A seguir, os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m .

como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu_{m-r} \mu^r$$

Como

$$\begin{aligned} \mu_{m-r} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{m-r,1,k-j-1} \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Temos,

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{m-r,1,k-j-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Portanto o m-ésimo momento central é dado por,

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{m}{r} \binom{k}{j} a_k \mu^r (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{m-r,1,k-j-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m}{r} \frac{(-1)^{s+r}}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \mu^r \tau_{m-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Em particular, temos que a expansão para a variância:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mu'_2 &= \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k \mu^r (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{2-r,1,k-j-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} \frac{(-1)^{s+r}}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \mu^r \tau_{2-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

A expansão do coeficiente geral.

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então teremos

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ teremos que a expansão para o coeficiente de assimetria para a classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$ é dado por

$$C_a = \frac{\mu'_3}{\sigma^3}$$

em que

$$\begin{aligned} \mu'_3 &= \sum_{r=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{3}{r} \binom{k}{j} a_k \mu^r (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{3-r,1,k-j-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{3}{r} \frac{(-1)^{s+r}}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \mu^r \tau_{3-r,1,s\theta-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^3 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k \mu^r (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{2-r,1,k-j-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} \frac{(-1)^{s+r}}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \mu^r \tau_{2-r,1,s\theta-1} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$, temos o coeficiente de curtose:

$$C_c = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}$$

em que

$$\begin{aligned} \mu'_4 &= \sum_{r=0}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{4}{r} \binom{k}{j} a_k \mu^r (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{4-r,1,k-j-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{4}{r} \frac{(-1)^{s+r}}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \tau_{4-r,1,s\theta-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^3 = & \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k \mu^r (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{2-r,1,k-j-1} \right. \\ & \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} \frac{(-1)^{s+r}}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \mu^r \tau_{2-r,1,s\theta-1} \right)^2 \end{aligned}$$

3.3.4 Expansões para a função geradora de momentos e função característica da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$

Seja X uma distribuição da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$, a função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} M_X(t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \rho_{t,1,k-j-1} \\ & - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \rho_{t,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

A função característica é dada por:

$$\begin{aligned} \phi_X(t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \rho_{it,1,k-j-1} \\ & - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} s\theta \delta^{s\theta} \rho_{it,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3.5 Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$

A seguir, é obtida a função de log-verossimilhança da classe Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$. A função de log-verossimilhança é, então:

$$\begin{aligned} \ell(\lambda, \theta, \xi) &= n \log \theta + n\theta \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log g(x_i) \\ &+ \log \left[\prod_{i=1}^n \frac{[\delta - \log G(x_i)]^{\theta-1}}{G(x_i)} e^{-\lambda^\theta [\delta - \log G(x_i)]^\theta} + G^{\theta-1}(x_i) \delta^\theta e^{-\lambda^\theta (\delta G(x_i))^\theta} \right] \end{aligned}$$

3.4 Distribuição Complementar Weibull -Log(Weibull)

Para $\delta = 0$, temos o caso particular, que foi definido por Tahir *et al.* (2014). As propriedades estão no Apêndice B. A função de distribuição acumulada da distribuição Weibull -Log(Weibull) (WWK) é dada por

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\log(1-e^{-(\alpha x)^\beta})}^{\infty} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= e^{-\lambda^\theta (-\text{Log}(1-e^{-(\alpha x)^\beta}))^\theta}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$. Neste caso utilizou-se $G(x) = 1 - e^{-(\alpha x)^\beta}$ que é a função de distribuição acumulada da Weibull. Os parâmetros $\beta > 0$ e $\theta > 0$ são de forma e $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ são os parâmetros de escala. Como $G(x)$ é uma função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \theta \beta \lambda^\theta \alpha^\beta \frac{x^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta}}{1 - e^{-(\alpha x)^\beta}} (-\text{Log}[1 - e^{-(\alpha x)^\beta}])^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta (-\text{Log}[1 - e^{-(\alpha x)^\beta}])^\theta}, \quad (3.36)$$

em que, $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

Sejam $G(x) = (1 - e^{-(\alpha x)^\beta})$ e $\delta = 0$, logo substituindo na Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$, temos que:

$$F_G(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} G^{k-j}(x) - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^{s\theta}(x)$$

$$F_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (1 - e^{-(\alpha x)^\beta})^{k-j}$$

Como $(1 - e^{-(\alpha x)^\beta})^{k-j} = \sum_{l=0}^{k-j} \binom{k-j}{l} (-1)^l e^{-l(\alpha x)^\beta}$, logo temos que

$$\begin{aligned} F_G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} \sum_{l=0}^{k-j} \binom{k-j}{l} (-1)^l e^{-l(\alpha x)^\beta} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \binom{k}{j} \binom{k-j}{l} a_k (-1)^{j+l} e^{-j-l(\alpha x)^\beta} \end{aligned}$$

Como a distribuição $G(x)$ é de variável aleatória contínua, teremos $f_G(x) = F'_G(x)$, portanto

$$f_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x)$$

em que $\zeta_{j,k,l}^* = \zeta_{j,k,l}^*(\theta\lambda) = \binom{k}{j} \binom{k-j}{l} a_k (-1)^{j+l+1} e^{-j}$ e $g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) = l\beta\alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-l(\alpha x)^\beta}$

A função de sobrevivência é dada por

$$S(x) = 1 - F(x) = 1 - e^{-\lambda^\theta (-\text{Log}(1 - e^{-(\alpha x)^\beta}))^\theta}. \quad (3.37)$$

A Figura 3.4 contém a função de densidade de probabilidade variando os valores de α , β , λ e θ . Verifica-se que a função densidade apresenta formas diferentes, como simétricas e assimétricas positivas.

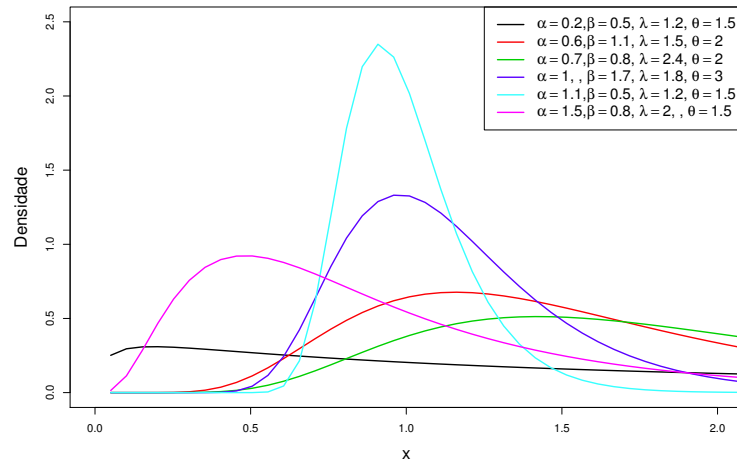


Figura 3.4: Função de densidade de probabilidade variando os valores de α , o β , o λ e o θ

A função de risco é dada por

$$h(x) = \frac{\alpha\beta\theta\lambda^\theta(\alpha x)^{\beta-1}(-\text{Log}[1 - e^{-(\alpha x)^\beta}])^{\theta-1}e^{-(\alpha x)^\beta - \lambda^\theta(-\text{Log}[1 - e^{-(\alpha x)^\beta}])^\theta}}{(1 - e^{-(\alpha x)^\beta})(1 - e^{-\lambda^\theta(-\text{Log}(1 - e^{-(\alpha x)^\beta}))^\theta})}, \quad (3.38)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

A Figura 3.5 apresenta a função de risco variando os valores de α , β , λ e θ . O comportamento da função de risco apresenta formatos crescentes, decrescentes e constantes.

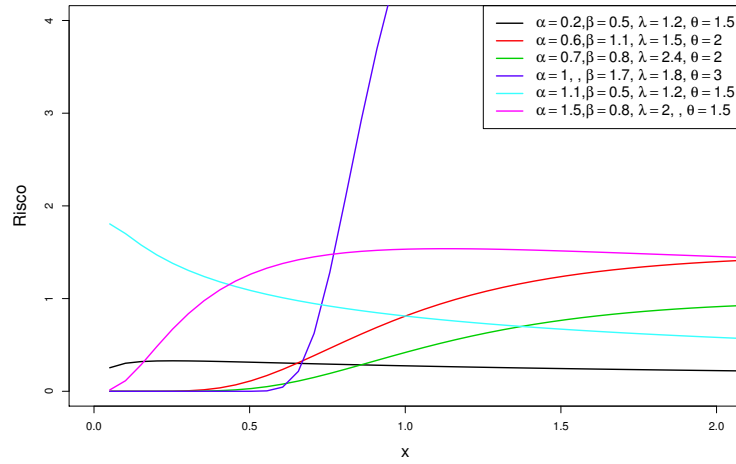


Figura 3.5: Função de risco variando os valores de α , β , λ e θ

3.4.1 Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica

Seja X uma distribuição Weibull $-\text{Log}(\text{Weibull})$, o r -ésimo momento é dado por:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \int_0^{\infty} x^r g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* (\alpha l^{1/\beta})^{-r} \Gamma \left[\frac{r + \beta}{\beta} \right] \end{aligned}$$

O momento de ordem 1, a média é dado por:

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \int_0^{\infty} x g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* (\alpha l^{1/\beta})^{-1} \Gamma \left[\frac{1+\beta}{\beta} \right]\end{aligned}$$

A variância é dada por

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* (\alpha l^{1/\beta})^{-2} \left(\Gamma \left[1 + \frac{2}{\beta} \right] - \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta} \right]^2 \right)$$

O coeficiente de assimetria é dado por:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \int_0^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^3 g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \frac{1}{\sigma^3} \left((\alpha l^{1/\beta})^{-3} \Gamma \left[1 + \frac{3}{\beta} \right] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3 \right)\end{aligned}$$

O coeficiente de curtose é dado por:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \int_0^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^4 g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \frac{1}{\sigma^4} \left((\alpha l^{1/\beta})^{-4} \Gamma \left[1 + \frac{4}{\beta} \right] - 3\gamma_1\mu\sigma^3 - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4 \right)\end{aligned}$$

A função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \int_0^{\infty} e^{tx} g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{r+1}}{(\alpha^{1/\beta})^{r+1} \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\beta} \right] \right)
\end{aligned}$$

A função característica é dada por:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \int_0^{\infty} e^{itx} g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} \zeta_{j,k,l}^* \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{r+1}}{(\alpha^{1/\beta})^{r+1} \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\beta} \right] \right)
\end{aligned}$$

3.4.2 Log-verossimilhança

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas seguindo WWK e $\boldsymbol{\xi} = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)'$. A função de log-verossimilhança é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\ell(\alpha, \beta, \theta, \lambda) &= n \log \theta + n \log \beta + n \theta \log \alpha - \sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^\beta + \sum_{i=1}^n \log(x_i^{\beta-1}) - \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\alpha x_i)^\beta}) \\
&\quad - \lambda^\theta \sum_{i=1}^n (-\log(1 - e^{-(\alpha x_i)^\beta}))^\theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log(-\log(1 - e^{-(\alpha x_i)^\beta}))
\end{aligned}$$

3.4.3 Função quantílica

Invertendo a função de distribuição obtemos a função quantílica da distribuição $T \sim WWK(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$

$$t = Q(p) = \left[\alpha^{-\beta} \log \left(\frac{e^{\frac{(-\log(p))^{1/\theta}}{\lambda}}}{e^{\frac{(-\log(p))^{1/\theta}}{\lambda}} - 1} \right) \right]^{1/\beta}. \quad (3.39)$$

Com a função quantílica 3.39 obtemos 450 números pseudo aleatórios da distribuição $T \sim WWK(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ com $\alpha = 0,6, \beta = 0,8, \lambda = 1,5$ e $\theta = 1,0$. Os parâmetros estimados pelo método de máxima verossimilhança: $\alpha = 31,634, \beta = 0,399, \lambda = 48,336$ e $\theta = 0,529$. A Figura 3.6 mostra o histograma com os parâmetros verdadeiros e estimados da distribuição Weibull $-Log(Weibull)$. A log-verossimilhança para os estimadores de máxima verossimilhança foi de 0,222 e para os parâmetros verdadeiros 0,224 indicando um bom ajuste apesar dos altos valores das estimativas de α e λ .

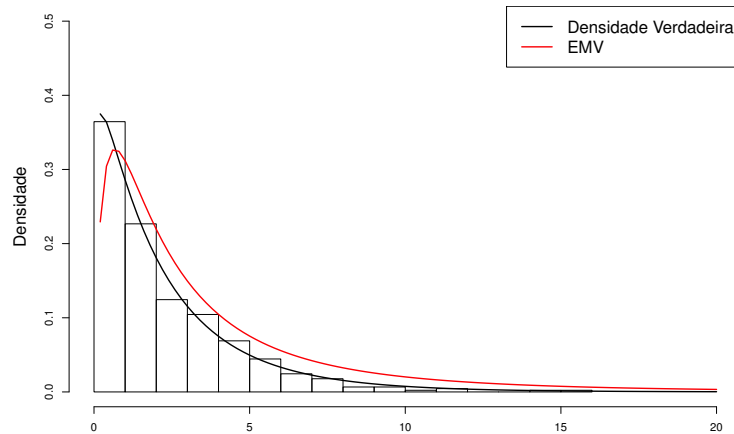


Figura 3.6: Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull Weibull K

3.5 Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$

3.5.1 Modelo Funcional da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$

Definimos a classe weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$, que é uma generalização da classe desenvolvida por Bourguignon *et al.* (2014). Seja X uma distribuição da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$, a função de distribuição acumulada é dada por:

$$\begin{aligned}
F_G(x) &= \int_{\delta(1-G(x))}^{\delta+G(x)/(1-G(x))} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\
&= e^{-\lambda^\theta \delta^\theta (1-G(x))^\theta} - e^{-\lambda^\theta \left(\delta + \frac{G(x)}{1-G(x)}\right)^\theta}, \quad \theta \geq 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade dada por:

$$\begin{aligned}
f_G(x) &= \lambda^\theta \delta^\theta g(x) (1-G(x))^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \delta^\theta (1-G(x))^\theta} \\
&\quad + \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{(1-G(x))^2} \left(\delta + \frac{G(x)}{1-G(x)} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left(\delta + \frac{G(x)}{1-G(x)}\right)^\theta}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

3.5.2 Expansões da função de distribuição e densidade da Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta + G/(1-G))$

A seguir, são apresentados os cálculos para a obtenção das expansões da função de distribuição e densidade da Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta + G/(1-G))$.

Temos que

$$e^{-\lambda^\theta (\delta + G(x)/(1-G(x)))^\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \left[\delta + \frac{G(x)}{1-G(x)} \right]^{-\theta j}$$

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$

$$\begin{aligned}
[e^{-\lambda^\theta (\delta + G(x)/(1-G(x)))^\theta}] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \left[1 + \frac{G(x)}{\delta(1-G(x))} \right]^{\theta j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} G^k(x) \delta^{-k} (1-G(x))^{-k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j - k}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} G^k(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-k}{l} (-1)^l G^l(x) \\
&= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j - k}}{j!} G^{k+l}(x)
\end{aligned}$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$

$$\begin{aligned}
[e^{-\lambda^\theta(\delta+G(x))/(1-G(x))}]^\theta &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \frac{G^{\theta j}}{(1-G(x))^{\theta j}} \left[1 + \frac{\delta(1-G(x))}{G(x)}\right]^{\theta j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \frac{G^{\theta j}}{(1-G(x))^{\theta j}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \delta^k \frac{(1-G(x))^k}{G^k(x)} \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} G^{\theta-k}(x) (1-G(x))^{k-\theta j} \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} G^{\theta-k}(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k-\theta j}{l} (-1)^l G^l(x) \\
&= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} G^{\theta j+l-k}(x)
\end{aligned}$$

Como

$$e^{-\lambda^\theta(\delta(1-G(x)))^\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} (1-G(x))^{s\theta}$$

e

$$(1-G(x))^{s\theta} = \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} (-1)^z G^z(x)$$

Logo temos

$$e^{-\lambda^\theta(\delta(1-G(x)))^\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^z(x)$$

Portanto,

Para $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
F_G(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^z(x) \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} G^{k+l}(x)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Para $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
F_G(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^z(x) \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} G^{\theta j+l-k}(x)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja de variável aleatória contínua, teremos, $f_G(x) = F'_G(x)$, portanto

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
f_G(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z g(x) G^{z-1}(x) \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) g(x) G^{k+l-1}(x)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Para $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
F_G(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z g(x) G^{z-1}(x) \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) g(x) G^{\theta j+l-k-1}(x)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.5.3 Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta + G/(1-G))$

Seja X uma distribuição da Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta + G/(1-G))$, o momento de ordem m é dado por:

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
E(X^m) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{z-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{k+l-1}(x) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \tau_{m,1,k+l-1}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
E(X^m) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{z-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{\theta j+l-k-1}(x) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \tau_{m,1,\theta j+l-k-1}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Em particular, temos a seguinte expansão para a média:

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{1,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \tau_{1,1,k+l-1}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{1,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \tau_{1,1,\theta j+l-k-1} \end{aligned} \quad (3.49)$$

A seguir, os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m .

Como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu_{m-r}$$

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu_{m-r} &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l) \tau_{m-r,1,k+l-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Portanto, o momento central de ordem m é dado por

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l) \tau_{m-r,1,k+l-1} \right] \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{s\theta}{z} \mu^r \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^m \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l) \tau_{m-r,1,k+l-1} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}\mu_{m-r} &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \tau_{m-r,1,\theta j+l-k-1}\end{aligned}\quad (3.52)$$

Portanto, o momento central de ordem m é dado por

$$\begin{aligned}\mu'_m &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \tau_{m-r,1,\theta j+l-k-1} \right] \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{m-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^m \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} (\theta j + l - k) \delta^k}{j!} \tau_{m-r,1,\theta j+l-k-1}\end{aligned}\quad (3.53)$$

Em particular, temos que a expansão para a variância:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mu'_2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \mu^r \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{-\theta j}{k} \mu^r \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{2-r,1,k+\theta j-1}\end{aligned}\quad (3.54)$$

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mu'_2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \mu^r \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \tau_{2-r,1,k+l-1}\end{aligned}\quad (3.55)$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mu'_2 &= \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} (\theta j + l - k) \delta^k}{j!} \tau_{2-r,1,\theta j+l-k-1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

A expansão do coeficiente geral.

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então teremos

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ teremos que a expansão para o coeficiente de assimetria para a classe Weibull $-Log(G)$ é dado por

$$C_a = \frac{\mu'_3}{\sigma^3}$$

em que

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_3 &= \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{s\theta}{z} \mu^r \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{3-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \tau_{3-r,1,k+l-1} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma^3 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \mu^r \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \tau_{2-r,1,k+l-1} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_3 &= \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{3-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} (\theta j + l - k) \delta^k}{j!} \tau_{3-r,1,\theta j+l-k-1} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \sigma^3 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} (\theta j + l - k) \delta^k}{j!} \tau_{2-r,1,\theta j+l-k-1} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$, temos o coeficiente de curtose:

$$C_a = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}$$

em que

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_4 &= \sum_{r=0}^4 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{s\theta}{z} \mu^r \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{4-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^4 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \tau_{4-r,1,k+l-1} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \sigma^4 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \mu^r \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \tau_{2-r,1,k+l-1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_4 &= \sum_{r=0}^4 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{4-r,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^4 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} (\theta j + l - k) \delta^k}{j!} \tau_{4-r,1,\theta j+l-k-1} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \sigma^4 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z+r}}{s!} \mu^r \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \tau_{2-r,1,z-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \mu^r \frac{(-1)^{j+l+r} \lambda^{\theta j} (\theta j + l - k) \delta^k}{j!} \tau_{2-r,1,\theta j+l-k-1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

3.5.4 Expansões para a função geradora de momentos e função característica da Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta + G/(1-G))$

Seja X uma distribuição da Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta + G/(1-G))$, a função geradora de momentos é dada por:

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{z-1}(x) dx \\ &\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{k+l-1}(x) dx \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \rho_{t,1,z-1} \\ &\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (k+l) \rho_{t,1,k+l-1} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Se $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{z-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{\theta j + l - k - 1}(x) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \rho_{t,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \rho_{t,1,\theta j + l - k - 1} \tag{3.66}
\end{aligned}$$

A função característica é dada por:

Se $\delta > \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} e^{itx} g(x) G^{z-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j - k}}{j!} (k + l) \int_0^{\infty} e^{itx} g(x) G^{k+l-1}(x) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \rho_{it,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j - k}}{j!} (k + l) \rho_{it,1,k+l-1} \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Para $\delta < \frac{G(x)}{1-G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \int_0^{\infty} e^{itx} g(x) G^{z-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \int_0^{\infty} e^{itx} g(x) G^{\theta j + l - k - 1}(x) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{s\theta}{z} \frac{(-1)^{s+z}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} z \rho_{it,1,z-1} \\
&\quad - \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (\theta j + l - k) \rho_{it,1,\theta j + l - k - 1} \tag{3.68}
\end{aligned}$$

3.5.5 Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$

A seguir, é obtida a função de log-verossimilhança da classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$. A função de log-verossimilhança é, então:

$$\begin{aligned} \ell(\lambda, \theta, \xi) = n\theta \log \lambda + \log \left[\prod_{i=1}^n \delta^\theta g(x_i) [1 - G(x_i)]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \delta^\theta [1 - G(x_i)]^\theta} \right. \\ \left. + \prod_{i=1}^n \frac{\theta g(x_i)}{[1 - G(x_i)]^\theta} \left[\delta + \frac{G(x_i)}{1 - G(x_i)} \right]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left[\delta + \frac{G(x_i)}{1 - G(x_i)} \right]^\theta} \right] \end{aligned}$$

3.6 Distribuição Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$

Para $\delta = 0$, temos o caso particular, a classe Weibull-Z, proposta por Bourguignon *et al.* (2014). As propriedades estão no Apêndice C. A função de distribuição acumulada da distribuição Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$ (WWZ) é dada por

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\frac{1 - e^{-(\alpha x)^\beta}}{e^{(\alpha x)^\beta}}} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= 1 - e^{-\lambda^\theta (e^{(\alpha x)^\beta} - 1)^\theta}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$. Neste caso utilizou-se a função de distribuição acumulada da Weibull. Como $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \theta \lambda^\theta \beta \alpha^\beta \frac{x^{\beta-1}}{e^{-(\alpha x)^\beta}} \left(\frac{1 - e^{-(\alpha x)^\beta}}{e^{-(\alpha x)^\beta}} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left(\frac{1 - e^{-(\alpha x)^\beta}}{e^{-(\alpha x)^\beta}} \right)^\theta} \quad (3.70)$$

em que, $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

Temos a seguinte expansão para a função de distribuição acumulada,

$$F_G(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} (1 - e^{-(\alpha x)^\beta})^{k+\theta j}$$

Como $(1 - e^{-(\alpha x)^\beta})^{k+\theta j} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+\theta j}{l} (-1)^l e^{-l(\alpha x)^\beta}$, logo temos que

$$\begin{aligned} F_G(x) &= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+\theta j}{l} (-1)^l e^{-l(\alpha x)^\beta} \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \binom{k+\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+k+l} \lambda^{\theta j}}{j!} e^{-l(\alpha x)^\beta} \end{aligned}$$

Como a distribuição $G(x)$ é de variável aleatória contínua, teremos $f_G(x) = F'_G(x)$, portanto

$$f_G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x)$$

em que $\zeta_{j,k,l}^{**} = \zeta_{j,k,l}^{**}(\theta\lambda) = \binom{-\theta j}{k} \binom{k+\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+k+l} \lambda^{\theta j}}{j!}$ e $g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) = l\beta\alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-l(\alpha x)^\beta}$.

A Figura 3.7 contém a função de densidade de probabilidade variando os valores de α , β , λ e θ . Verifica-se que a função densidade tem formas diferentes quando se varia os valores dos parâmetros, apresenta formatos simétricos e assimétricos positivos.

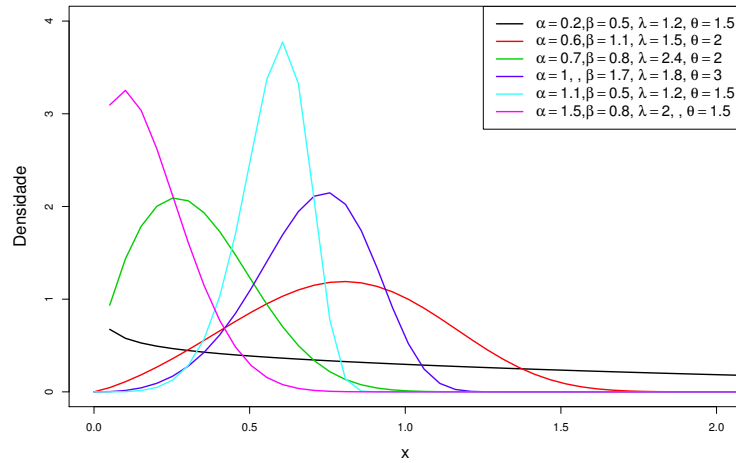


Figura 3.7: Função de densidade de probabilidade variando os valores de α , o β , o λ e o θ

A função de sobrevivência é dada por

$$S(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda^\theta (e^{(\alpha x)^\beta} - 1)^\theta}. \quad (3.71)$$

A função de risco é dada por

$$h(x) = \alpha\beta\theta\lambda^\theta (\alpha x)^{\beta-1} (e^{(\alpha x)^\beta} - 1)^{\theta-1} e^{(\alpha x)^\beta}, \quad (3.72)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

A Figura 3.8 apresenta a função de risco variando os valores de α , β , λ e θ . A função de risco apresenta comportamento constante e crescente dependendo dos valores dos parâmetros.

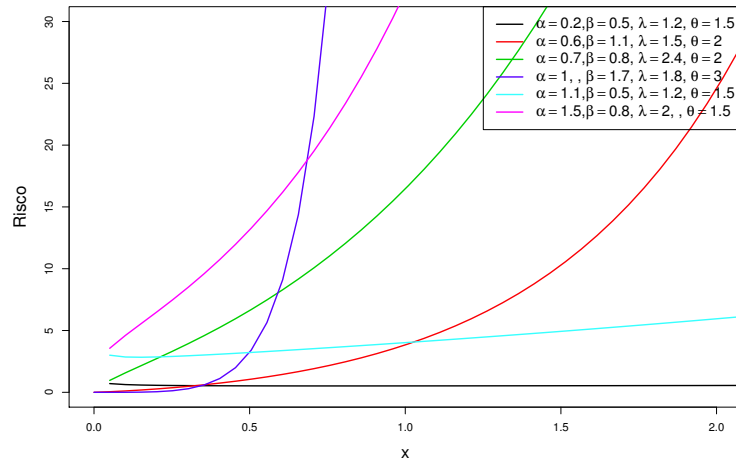


Figura 3.8: Função de risco variando os valores de α , β , λ e θ

3.6.1 Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica

Seja X uma distribuição Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$, o momento de ordem r é dado por

$$\begin{aligned}
 E(X^r) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \int_0^{\infty} x^r g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \frac{1}{(\alpha l^{1/\beta})^r} \Gamma \left[1 + \frac{r}{\beta} \right]
 \end{aligned}$$

O momento de ordem 1, a média é

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \int_0^{\infty} x g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \frac{1}{\alpha l^{1/\beta}} \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta} \right]\end{aligned}$$

A variância é dada por

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \int_0^{\infty} (x - \mu)^2 g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \frac{1}{(\alpha l^{1/\beta})^2} \left(\Gamma \left[1 + \frac{2}{\beta} \right] - \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta} \right]^2 \right)\end{aligned}$$

O coeficiente de assimetria é dado por:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \int_0^{\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^3 g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \frac{1}{\sigma^3} \left((\alpha l^{1/\beta})^{-3} \Gamma \left[1 + \frac{3}{\beta} \right] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3 \right)\end{aligned}$$

O coeficiente de curtose é dado por

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \int_0^{\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^4 g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \frac{1}{\sigma^4} \left((\alpha l^{1/\beta})^{-4} \Gamma \left[1 + \frac{4}{\beta} \right] - 3\gamma_1\mu\sigma^3 - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4 \right)\end{aligned}$$

A função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \int_0^{\infty} e^{tx} g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{r+1}}{(\alpha^{1/\beta})^{r+1} \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\beta} \right] \right)
\end{aligned}$$

A função característica é dada por:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \int_0^{\infty} e^{itx} g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{**} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{r+1}}{(\alpha^{1/\beta})^{r+1} \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\beta} \right] \right)
\end{aligned}$$

3.6.2 Log-verossimilhança

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas seguindo WWZ e $\boldsymbol{\xi} = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)'$. A função de log-verossimilhança é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\ell(\alpha, \beta, \theta, \lambda) &= n \log \theta + n\theta \log \lambda + n \log \beta + n\beta \log \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^\beta \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{1 - e^{-(\alpha x_i)^\beta}}{e^{-(\alpha x_i)^\beta}} \right)^{\theta-1} - \sum_{i=1}^n \lambda^\theta \left(\frac{1 - e^{-(\alpha x_i)^\beta}}{e^{-(\alpha x_i)^\beta}} \right)^\theta
\end{aligned}$$

3.6.3 Função quantílica

Invertendo a função de distribuição obtemos a função quantílica da distribuição $T \sim WWZ(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$

$$t = Q(p) = \frac{\left[\log \left(1 - \frac{\log(1-p)}{\lambda^\theta} \right) \right]^{1/\beta}}{\alpha}. \quad (3.73)$$

Com a função quantílica 3.73 obtemos 450 números pseudo aleatórios da distribuição $T \sim WWZ(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ com $\alpha = 0,3, \beta = 0,5, \lambda = 1,2$ e $\theta = 1,5$. Os parâmetros estimados pelo método de máxima verossimilhança: $\alpha = 0,259, \beta = 0,395, \lambda = 0,858$ e $\theta = 1,264$. A Figura 3.9 mostra o histograma com os parâmetros verdadeiros e estimados da distribuição Weibull $Weibull/(1-Weibull)$. A log-verossimilhança para os estimadores de máxima verossimilhança foi de 0,199 e dos parâmetros verdadeiros 0,302, indicando um bom ajuste de máxima verossimilhança.

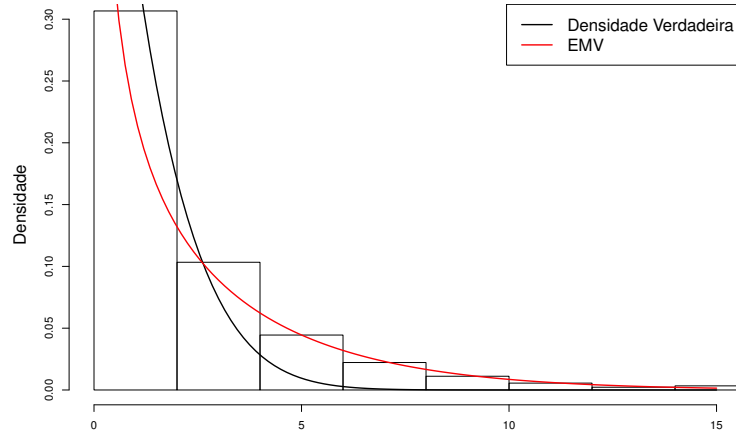


Figura 3.9: Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull $Weibull/(1-Weibull)$

3.7 Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$

3.7.1 Modelo Funcional da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$

Definimos a classe complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$, que é uma generalização da classe Weibull-Y proposta nesta tese. Seja X uma distribuição da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$, a função de distribuição acumulada é dada por:

$$\begin{aligned}
F_G(x) &= \int_{\delta G(x)}^{\delta+(1-G(x))/G(x)} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\
&= 1 + e^{-\lambda^\theta (\delta+(1-G(x))/G(x))^\theta} - e^{-\lambda^\theta (\delta G(x))^\theta}, \quad \theta \geq 0
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade dada por:

$$\begin{aligned}
f_G(x) &= \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{G^2(x)} \left(\delta + \frac{1-G(x)}{G(x)} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta (\delta + \frac{1-G(x)}{G(x)})^\theta} \\
&\quad + \lambda^\theta \delta^\theta g(x) (G(x))^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta (\delta G(x))^\theta}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

3.7.2 Expansões da função de distribuição e densidade da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$

A seguir, os cálculos para a expansão da função de distribuição e da densidade para a Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$.

Como

$$e^{-\lambda^\theta (\delta+(1-G(x))/G(x))^\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \left[\delta + \frac{1-G(x)}{G(x)} \right]^{\theta j}$$

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda^\theta (\delta+(1-G(x))/G(x))^\theta} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \delta^{\theta j} \left[1 + \frac{1-G(x)}{\delta G(x)} \right]^{\theta j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (\lambda \delta)^{\theta j}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \left[\frac{1-G(x)}{\delta G(x)} \right]^k \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^j (\lambda \delta)^{\theta j}}{\delta^k j!} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} (-1)^l G^{l-k}(x) \\
&= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} G^{l-k}(x)
\end{aligned}$$

Se $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda^\theta(\delta+(1-G(x))/G(x))^\theta} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \left[\frac{1-G(x)}{G(x)} \right]^{\theta j} \left[1 + \frac{\delta G(x)}{1-G(x)} \right]^{\theta j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \left[\frac{1-G(x)}{G(x)} \right]^{\theta j} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \delta^k G^k(x) (1-G(x))^{-k} \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} \binom{\theta j}{k} \delta^k G^{k-\theta j}(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\theta j - k}{l} G^l(x) (-1)^l \\
&= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} G^{k+l-\theta j}(x)
\end{aligned}$$

Como

$$e^{-\lambda^\theta(\delta G(x))^\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^{s\theta}(x)$$

Logo temos, a seguinte expansão da função de distribuição:

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
F_G(x) &= 1 + \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j - k}}{j!} G^{l-k}(x) \\
&\quad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^{s\theta}(x)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
F_G(x) &= 1 + \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} G^{k+l-\theta j}(x) \\
&\quad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^{s\theta}(x)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja de variável aleatória contínua, temos $f_G(x) = F'_G(x)$, portanto

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} f_G(x) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) g(x) G^{l-k-1}(x) \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} g(x) G^{s\theta-1}(x) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} f_G(x) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) g(x) G^{k+l-\theta j-1}(x) \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} g(x) G^{s\theta-1}(x) \end{aligned} \quad (3.79)$$

3.7.3 Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1-G)/G)$

Seja X uma distribuição da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1-G)/G)$, o momento de ordem m é dado por

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} E(X^m) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{l-k-1}(x) dx \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{s\theta-1}(x) dx \\ &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{m,1,l-k-1} \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
E(X^m) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{k+l-\theta j-1}(x) dx \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \int_0^{\infty} x^m g(x) G^{s\theta-1}(x) dx \\
&= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{m,1,k+l-\theta j-1} \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m,1,s\theta-1} \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Em particular, temos a seguinte expansão para a média:

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{1,1,l-k-1} \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{1,1,s\theta-1} \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{1,1,k+l-\theta j-1} \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{1,1,s\theta-1} \tag{3.83}
\end{aligned}$$

A seguir, os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m .

Como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu_{m-r}$$

Então, se $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu_{m-r} &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{m-r,1,l-k-1} \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \left[\sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{m-r,1,l-k-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

Portanto, o momento central de ordem m é dado por

$$\begin{aligned} \mu'_m &= \sum_{r=0}^m \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{m-r,1,l-k-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Se $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu_{m-r} &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{m-r,1,k+l-\theta j-1} \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Temos,

$$\begin{aligned} \mu'_m = & \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \left[\sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{m-r,1,k+l-\theta j-1} \right. \\ & \left. - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \right] \end{aligned} \quad (3.88)$$

Portanto, o momento central de ordem m é dado por

$$\begin{aligned} \mu'_m = & \sum_{r=0}^m \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{m-r,1,k+l-\theta j-1} \\ & - \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{m-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Em particular, temos que a expansão para a variância:

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mu'_2 = & \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j - k}}{j!} (l-k) \tau_{2-r,1,l-k-1} \\ & - \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{2-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mu'_2 = & \sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{2-r,1,k+l-\theta j-1} \\ & - \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{2-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.91)$$

A expansão do coeficiente geral.

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então teremos

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ teremos que a expansão para o coeficiente de assimetria para a classe Weibull $-Log(G)$ é dado por

$$C_a = \frac{\mu'_3}{\sigma^3}$$

em que

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_3 &= \sum_{r=0}^3 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{3-r,1,l-k-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{3}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{3-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.92)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^3 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{2-r,1,l-k-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{2-r,1,s\theta-1} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_3 &= \sum_{r=0}^3 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{3-r,1,k+l-\theta j-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{3}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{3-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.93)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^3 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{2-r,1,k+l-\theta j-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{2-r,1,s\theta-1} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.94)$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$, temos o coeficiente de curtose:

$$C_c = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}$$

em que

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_4 &= \sum_{r=0}^4 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{4-r,1,l-k-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^4 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{4}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{4-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.95)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^4 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \tau_{2-r,1,l-k-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{2-r,1,s\theta-1} \right)^2 \end{aligned}$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \mu'_4 &= \sum_{r=0}^4 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{4-r,1,k+l-\theta j-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^4 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{4}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{4-r,1,s\theta-1} \end{aligned} \quad (3.96)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^4 &= \left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \tau_{2-r,1,k+l-\theta j-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2}{r} (-1)^{s+r} \mu^r \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \tau_{2-r,1,s\theta-1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.97)$$

3.7.4 Expansões para a função geradora de momentos e a função característica da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$

Seja X uma distribuição da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$, a função geradora de momentos é dada por:

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{l-k-1}(x) dx \\
 &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{s\theta-1}(x) dx \\
 &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \rho_{t,1,l-k-1} \\
 &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \rho_{t,1,s\theta-1} \tag{3.98}
 \end{aligned}$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{k+l-\theta j-1}(x) dx \\
 &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) G^{s\theta-1}(x) dx \\
 &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j - k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \rho_{t,1,k+l-\theta j-1} \\
 &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \rho_{t,1,s\theta-1} \tag{3.99}
 \end{aligned}$$

A função característica é dada por:

Para $\delta > \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^{\theta j-k}}{j!} (l-k) \rho_{it,1,l-k-1} \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \rho_{it,1,s\theta-1}\end{aligned}\quad (3.100)$$

Para $\delta < \frac{1-G(x)}{G(x)}$, temos

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{\theta j-k}{l} \frac{(-1)^{j+l} \lambda^{\theta j} \delta^k}{j!} (k+l-\theta j) \rho_{it,1,k+l-\theta j-1} \\ &\quad - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} s \theta \delta^{s\theta} \rho_{it,1,s\theta-1}\end{aligned}\quad (3.101)$$

3.7.5 Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1-G)/G)$

A seguir, é obtida a função de log-verossimilhança da classe Weibull $(1-G)/G$ Generalizada. A função de log-verossimilhança é, então:

$$\begin{aligned}\ell(\lambda, \theta, \xi) &= n\theta \log \lambda + \log \prod_{i=1}^n \left[\frac{\theta g(x_i)}{G^2(x_i)} \left[\delta + \frac{1-G(x_i)}{G(x_i)} \right]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left[\delta + \frac{1-G(x_i)}{G(x_i)} \right]^\theta} \right. \\ &\quad \left. + \delta^\theta g(x_i) G^{\theta-1}(x_i) e^{-\lambda^\theta \delta^\theta G^\theta(x_i)} \right]\end{aligned}$$

3.8 Distribuição Weibull $(1 - Weibull)/Weibull$

Para $\delta = 0$, temos o caso particular, a classe Weibull-Y, proposta nesta tese. As propriedades estão no Apêndice D. A função de distribuição acumulada da distribuição Weibull $(1 - Weibull)/Weibull$ (WWY) é dada por

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\frac{e^{-(\alpha x)^\beta}}{1-e^{-(\alpha x)^\beta}}}^{\infty} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\
&= e^{-\lambda^\theta \left(\frac{e^{-(\alpha x)^\beta}}{1-e^{-(\alpha x)^\beta}} \right)^\theta}
\end{aligned} \tag{3.102}$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$. Neste caso utilizou-se $G(x) = 1 - e^{-(\alpha x)^\beta}$ que é a função de distribuição acumulada da Weibull. Como $G(x)$ é uma função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \theta \beta \lambda^\theta \alpha^\beta \frac{x^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta}}{(1 - e^{-(\alpha x)^\beta})^2} \left(\frac{e^{-(\alpha x)^\beta}}{1 - e^{-(\alpha x)^\beta}} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left(\frac{e^{-(\alpha x)^\beta}}{1 - e^{-(\alpha x)^\beta}} \right)^\theta}$$

Sejam $G(x) = W(x) = 1 - e^{-(\alpha x)^\beta}$ e $\delta = 0$, logo substituindo na Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$, temos que:

$$F_G(x) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} G^{k-\theta j}(x) - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G^{s\theta}(x)$$

e

$$F_W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} (1 - e^{-(\alpha x)^\beta})^{k-\theta j}$$

Como $(1 - e^{-(\alpha x)^\beta})^{k-\theta j} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k-\theta j}{l} (-1)^l e^{-l(\alpha x)^\beta}$, logo temos que:

$$\begin{aligned}
F_W(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k-\theta j}{l} (-1)^l e^{-l(\alpha x)^\beta} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+k+l} \lambda^{\theta j}}{j!} e^{-l(\alpha x)^\beta}
\end{aligned}$$

Como a distribuição $W(x)$ é de variável aleatória contínua, teremos $f_W(x) = F'_W(x)$, portanto

$$f_W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x)$$

em que $\zeta_{j,k,l}^{***} = \zeta_{j,k,l}(\theta\lambda) = \binom{\theta j}{k} \binom{k-\theta j}{l} \frac{(-1)^{j+k+l+1} \lambda^{\theta j}}{j!}$ e $g_{\alpha l^{1/\beta}, \beta}(x) = l\beta\alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-l(\alpha x)^\beta}$

A Figura 3.10 contém a função de densidade de probabilidade variando os valores de α , β , λ e θ . Verifica-se que a função densidade apresenta formas simétricas e assimétricas positivas e negativas quando varia-se os valores dos parâmetros.

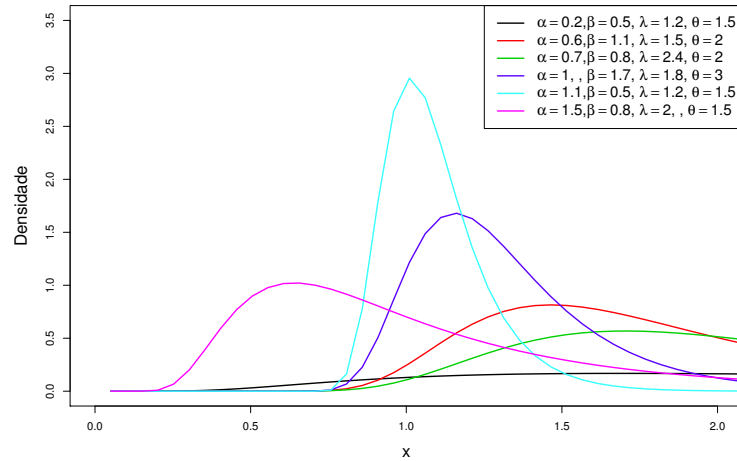


Figura 3.10: Função de densidade de probabilidade variando os valores de α , β , λ e θ

A função de sobrevivência é dada por

$$S(x) = 1 - F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-k\theta}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda^{k\theta}}{k!} \left(1 - W(x; \alpha(k\theta + j)^{\frac{1}{\beta}}, \beta)\right). \quad (3.103)$$

A função de risco é dada por

$$h(x) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-k\theta}{j} \frac{(-1)^{k+j+1} \lambda^{k\theta}}{k!} w(x; \alpha(k\theta + j)^{\frac{1}{\beta}}, \beta)}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-k\theta}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda^{k\theta}}{k!} \left(1 - W(x; \alpha(k\theta + j)^{\frac{1}{\beta}}, \beta)\right)}, \quad (3.104)$$

em que $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

A Figura 3.11 apresenta a função de risco variando os valores de α , β , λ e θ . A função de risco apresenta forma de U invertido, decrescente e constante dependendo dos valores dos parâmetros.

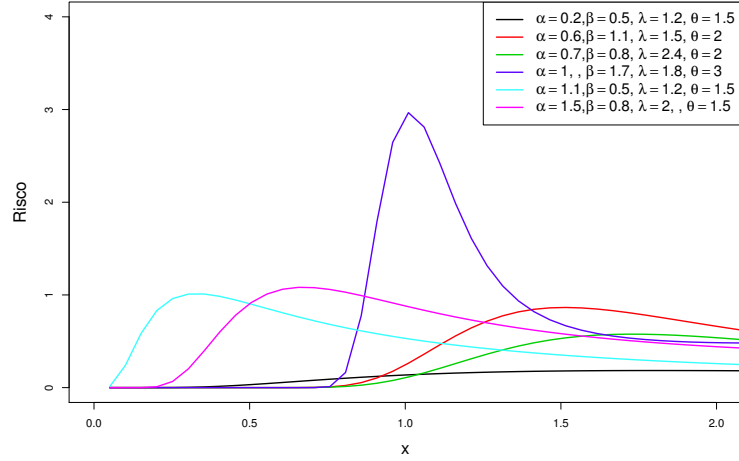


Figura 3.11: Função de risco variando os valores de α , β , λ e θ

3.8.1 Expansões dos Momentos, função geradora de momentos e função característica

Suponha que $X \sim WWY(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$. O r -ésimo momento é dado por:

$$\begin{aligned}
 E(X^r) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \int_0^{\infty} x^r g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \frac{1}{(\alpha^{1/\beta})^r} \Gamma \left[1 + \frac{r}{\beta} \right]
 \end{aligned}$$

O momento de ordem 1, a média, é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mu &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \int_0^{\infty} x g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \frac{1}{\alpha^{1/\beta}} \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta} \right]
 \end{aligned}$$

A variância é

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \int_0^{\infty} (x - \mu)^2 g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \frac{1}{(\alpha l^{1/\beta})^2} \left(\Gamma \left[1 + \frac{2}{\beta} \right] - \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta} \right]^2 \right)\end{aligned}$$

O coeficiente de assimetria, é dado por:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \int_0^{\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^3 g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \frac{1}{\sigma^3} \left((\alpha l^{1/\beta})^{-3} \Gamma \left[1 + \frac{3}{\beta} \right] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3 \right)\end{aligned}$$

O coeficiente de curtose, é dado por:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \int_0^{\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^4 g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \frac{1}{\sigma^4} \left((\alpha l^{1/\beta})^{-4} \Gamma \left[1 + \frac{4}{\beta} \right] - 3\gamma_1\mu\sigma^3 - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4 \right)\end{aligned}$$

A função geradora de momentos é dada por (ver Muraleedharan et al (2007)):

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \int_0^{\infty} e^{tx} g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{r+1}}{(\alpha l^{1/\beta})^{r+1} \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\beta} \right] \right)\end{aligned}$$

A função característica é dada por

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \int_0^{\infty} e^{itx} g_{\alpha^{1/\beta}, \beta}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{j,k,l}^{***} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{r+1}}{(\alpha^{1/\beta})^{r+1} \beta m!} \Gamma \left[\frac{m+1}{\beta} \right] \right)\end{aligned}$$

3.8.2 Log-verossimilhança

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas seguindo WWY e $\xi = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)'$. A função de log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}\ell(\alpha, \beta, \theta, \lambda) &= n \log \alpha + n \log \beta + n \log \theta + n \log \lambda + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log(\alpha x_i) \\ &\quad - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \log \left(e^{(\alpha x_i)^\beta} - 1 \right) + \sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^\beta - \lambda^\theta \left(e^{(\alpha x_i)^\beta} - 1 \right)^{-\theta}.\end{aligned}$$

3.8.3 Função quantílica

Invertendo a função de distribuição obtemos a função quantílica da distribuição $T \sim WWY(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$

$$t = Q(p) = \frac{[\log(1 + (-\lambda^{-\theta} \log(p))^{-1/\theta})]^{1/\beta}}{\alpha}. \quad (3.105)$$

Com a função quantílica 3.105 obtemos 450 números pseudo aleatórios da distribuição $T \sim WWY(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ com $\alpha = 0, 3$, $\beta = 0, 5$, $\lambda = 1, 2$ e $\theta = 1, 5$. Os parâmetros estimados pelo método de máxima verossimilhança: $\alpha = 1, 108$, $\beta = 0, 336$, $\lambda = 2, 777$ e $\theta = 1, 798$.

A Figura 3.12 mostra o histograma com os parâmetros verdadeiros e estimados da distribuição Weibull Weibull Y. A log-verossimilhança para os estimadores de máxima verossimilhança foi de 0,138 e para os parâmetros verdadeiros foi de 0,143, mostrando um bom ajuste de máxima verossimilhança.

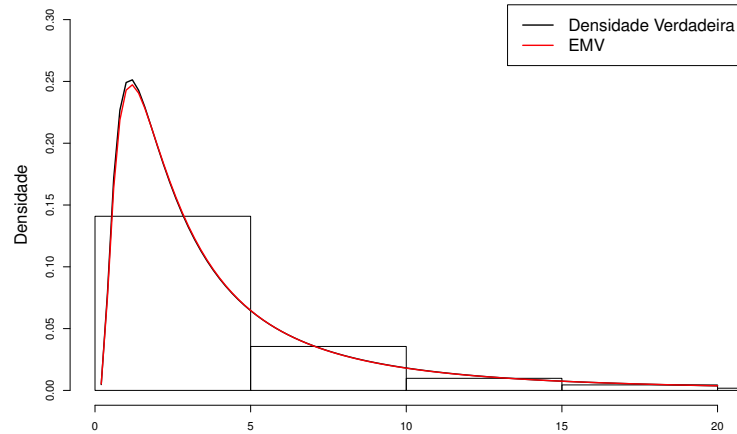


Figura 3.12: Histograma com os valores gerados, a densidade com os parâmetros verdadeiros e a densidade com as estimativas MV da distribuição Weibull Weibull Y

4.1 Aplicação 1: Dados Simulados

4.1.1 Weibull *-Log(1-Log-Logística)*

Seja $\xi = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ os parâmetros da distribuição Weibull *-Log(1-Log-Logística)* (WLLX). Foram simulados 450 valores da distribuição WLLX com $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,5$, $\lambda = 1,2$, $\theta = 1,5$ para testar a adequação da distribuição proposta. Ajustou-se, aos dados, a densidade com os parâmetros verdadeiros, sua estimativa de máxima verossimilhança (EMV) via algoritmo de estimação BFGS para os dados, se repetiu a simulação de máxima verossimilhança 1000 vezes utilizando reamostragem bootstrap e bootstrap corrigido. O código R utilizado está no Apêndice E. Na Figura 4.1 se pode observar o histograma e os respectivos ajustes para os dados. Verifica-se que os ajustes dos EMV, bootstrap e bootstrap corrigido estão semelhantes.

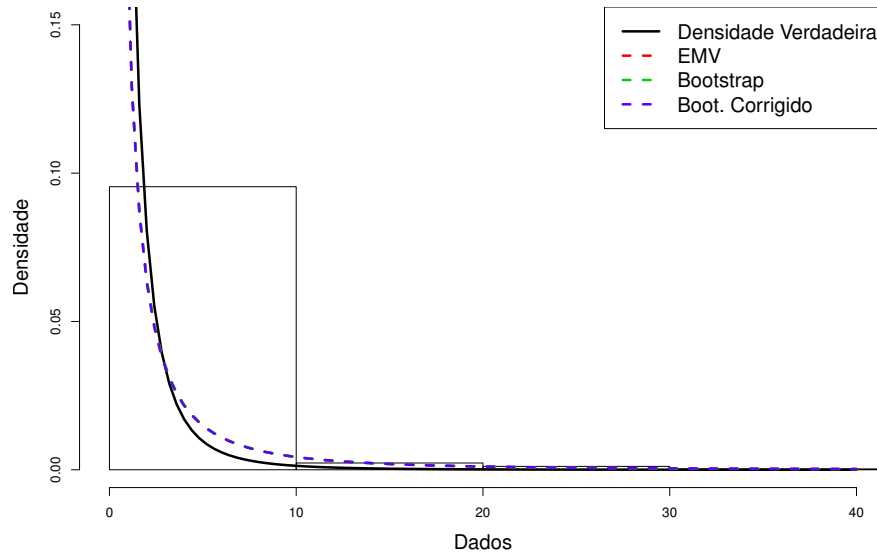


Figura 4.1: Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WLLX com $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,5$; $\lambda = 1,2$; $\theta = 1,5$ e os ajustes para os dados

A Tabela (4.1) apresenta-se os valores dos parâmetros verdadeiros, as estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados e os respectivos erros-padrão entre parênteses. O teste de Wald, para os EMV, ao nível de significância de 5% para $H_0 : \alpha = 0$ contra $H_1 : \alpha \neq 0$, $H_0 : \lambda = 0$ contra $H_1 : \lambda \neq 0$ e $H_0 : \theta = 0$ contra $H_1 : \theta \neq 0$, apresenta valores da estatística do teste menores que 2, assim rejeita-se H_0 , então as estimativas de α , λ e θ não são significativas. Para o parâmetro β , obteve-se o valor de $W = 2,68$, logo a estimativa de máxima verossimilhança de β é significativa ao nível de 5%. As estimativas pelo método bootstrap e bootstrap corrigido são todas significativas, ao nível de 5% pelo teste de Wald.

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	α	β	λ	θ
Parâmetros	0,3	0,5	1,2	1,5
EMV	0,119 (0,353)	0,439 (0,164)	0,911 (0,606)	1,845 (1,105)
Bootstrap	0,130 (0,030)	0,449 (0,010)	0,927 (0,069)	1,794 (0,113)
Bootstrap Corrigido	0,158 (0,060)	0,462 (0,019)	0,983 (0,138)	1,684 (0,227)

Na Tabela 4.2 observa-se os critérios e as estatísticas dos testes de aderência com p-valores entre parênteses para o teste K-S das estimativas pelos métodos utilizados e para os parâmetros verdadeiros. Verifica-se que os valores dos critérios e das estatísticas para os estimadores de EMV, bootstrap e bootstrap corrigido são semelhantes. Do que foi visto, pode-se utilizar o método bootstrap no lugar do método de máxima verossimilhança quando essas estimativas não forem significativas.

Tabela 4.2: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados

	Parâmetros	EMV	Bootstrap	Bootstrap Corrigido
<i>AIC</i>	587,422	585,794	585,804	585,884
<i>AICC</i>	587,843	586,215	586,225	586,303
<i>BIC</i>	597,842	596,214	596,224	596,303
<i>HQIC</i>	591,639	590,011	590,021	590,100
<i>W*</i>	0,0117	0,0121	0,0122	0,0125
<i>A*</i>	0,093	0,099	0,098	0,097
K-S (p-valor)	0,035 (0,787)	0,018 (0,999)	0,019 (0,999)	0,029 (0,921)

4.1.2 Weibull $-Log(Weibull)$

Seja $\xi = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ os parâmetros da distribuição Weibull $-Log(Weibull)$ (WWK). Foram simulados 450 valores da distribuição WWK com $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,8$, $\lambda = 1,5$, $\theta = 1,0$ para testar a adequação da distribuição proposta. Ajustou-se, aos dados, a densidade com os parâmetros verdadeiros, sua estimativa de máxima verossimilhança (EMV) via algoritmo de estimação BFGS para os dados, se repetiu a simulação de máxima verossimilhança 1000 vezes utilizando reamostragem bootstrap e bootstrap corrigido. O código R utilizado está no Apêndice E. Na Figura 4.2 se pode observar o histograma e os respectivos ajustes para os dados. Verifica-se que os ajustes dos EMV, bootstrap e bootstrap corrigido estão semelhantes.

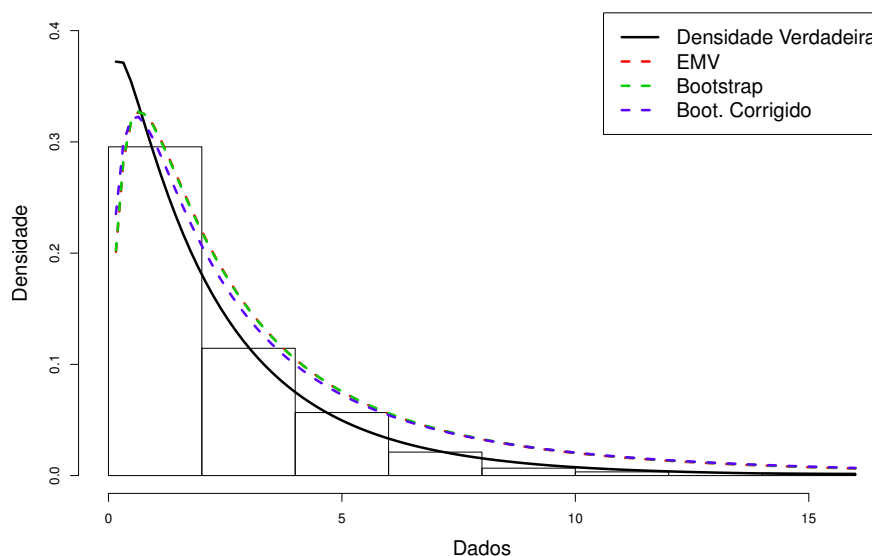


Figura 4.2: Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WWK com $\alpha = 0,6$; $\beta = 0,8$; $\lambda = 1,5$; $\theta = 1,0$ e os ajustes para os dados

A Tabela 4.3 apresenta-se os valores dos parâmetros verdadeiros, as estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados e os respectivos erros-padrão entre parênteses. O teste de Wald, para os EMV, ao nível de significância de 5% para $H_0 : \alpha = 0$ contra $H_1 : \alpha \neq 0$ e $H_0 : \lambda = 0$ contra $H_1 : \lambda \neq 0$, apresenta valores da estatística do teste menores que 2, assim rejeita-se H_0 , então as estimativas de α e λ não são significativas. Para os parâmetros β e θ , obteve-se os valores de $W = 11,4$ e $W = 6,2$, respectivamente, logo a estimativa de máxima verossimilhança de β e θ são significativas ao nível de 5%. As estimativas pelo método bootstrap e bootstrap corrigido são todas significativas, ao nível de 5% pelo teste de Wald.

Tabela 4.3: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	α	β	λ	θ
Parâmetros	0,6	0,8	1,5	1,0
EMV	34,994 (19,672)	0,399 (0,035)	56,437 (38,029)	0,512 (0,083)
Bootstrap	33,624 (7,479)	0,395 (0,010)	50,095 (17,487)	0,529 (0,031)
Bootstrap Corrigido	108,828 (14,986)	0,389 (0,021)	332,564 (35,025)	0,340 (0,062)

Na Tabela 4.4 observa-se os critérios e as estatísticas dos testes de aderência com p-valores entre parênteses para o teste K-S das estimativas pelos métodos utilizados e para os parâmetros verdadeiros. Verifica-se que os valores dos critérios e das estatísticas para os estimadores de EMV, bootstrap e bootstrap corrigido são similares. Dessa forma, pode-se utilizar o método bootstrap no lugar do método de máxima verossimilhança quando essas estimativas não forem significativas.

Tabela 4.4: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados

	Parâmetros	EMV	Bootstrap	Bootstrap Corrigido
<i>AIC</i>	1657,350	1579,305	1576,795	1578,350
<i>AICC</i>	1657,771	1579,726	1577,216	1578,771
<i>BIC</i>	1667,771	1589,726	1587,216	1588,770
<i>HQIC</i>	1661,567	1583,523	1581,013	1582,567
W^*	0,052	0,215	0,224	0,177
A^*	0,408	1,719	1,784	1,428
K-S (p-valor)	0,045 (0,321)	0,038 (0,519)	0,039 (0,479)	0,071 (0,020)

4.1.3 Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$

Seja $\xi = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ os parâmetros da distribuição Weibull $Weibull/(1 - Weibull)$ (WWZ). Foram simulados 450 valores da distribuição WWZ com $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,5$, $\lambda = 1,2$, $\theta = 1,5$ para testar a adequação da distribuição proposta. Ajustou-se, aos dados,

a densidade com os parâmetros verdadeiros, sua estimativa de máxima verossimilhança (EMV) via algoritmo de estimação BFGS para os dados, se repetiu a simulação de máxima verossimilhança utilizando reamostragem bootstrap e bootstrap corrigido. O código R utilizado está no Apêndice E. Na Figura 4.3 se pode observar o histograma e os respectivos ajustes para os dados. Verifica-se que os ajustes dos EMV, bootstrap e bootstrap corrigido estão semelhantes.

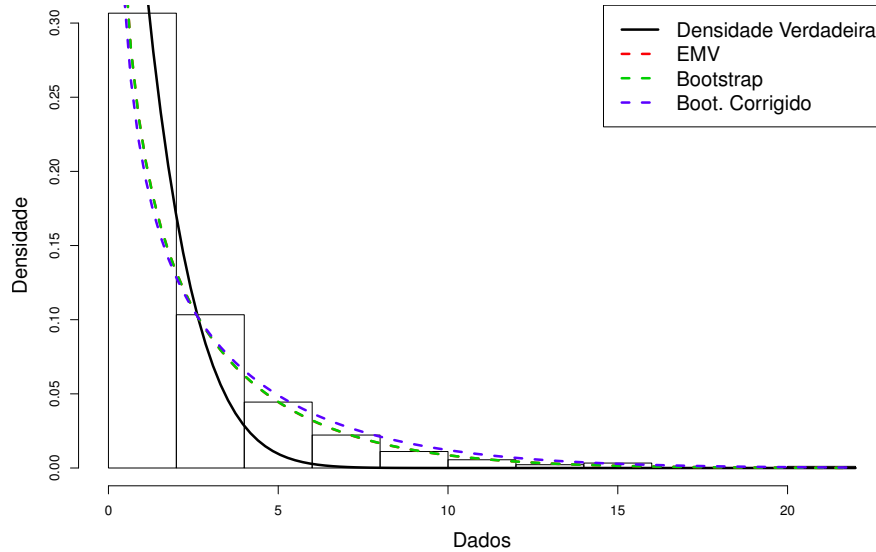


Figura 4.3: Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WWZ com $\alpha = 0,3; \beta = 0,5; \lambda = 1,2; \theta = 1,5$ e os ajustes para os dados

A Tabela 4.5 apresenta-se os valores dos parâmetros verdadeiros, as estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados e os respectivos erros-padrão entre parênteses. O teste de Wald, para os EMV, ao nível de significância de 5% para $H_0 : \alpha = 0$ contra $H_1 : \alpha \neq 0$, $H_0 : \beta = 0$ contra $H_1 : \beta \neq 0$ e $H_0 : \lambda = 0$ contra $H_1 : \lambda \neq 0$, apresenta valores da estatística do teste menores que 2, assim rejeita-se H_0 , então as estimativas de α , β e λ não são significativas. Para o parâmetro θ , obteve-se o valor de $W = 2,35$, respectivamente, logo a estimativa de máxima verossimilhança de θ é significativa ao nível de 5%. As estimativas pelo método bootstrap e bootstrap corrigido são todas significativas, ao nível de 5% pelo teste de Wald.

Tabela 4.5: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	α	β	λ	θ
Parâmetros	0,3	0,5	1,2	1,5
EMV	0,256 (0,301)	0,397 (0,225)	0,865 (0,742)	1,260 (0,537)
Bootstrap	0,251 (0,011)	0,405 (0,009)	0,880 (0,031)	1,241 (0,020)
Bootstrap Corrigido	0,316 (0,023)	0,353 (0,017)	0,622 (0,062)	1,328 (0,040)

Na Tabela 4.6 observa-se os critérios e as estatísticas dos testes de aderência com p-valores entre parênteses para o K-S das estimativas pelos métodos utilizados e para os parâmetros verdadeiros. Verifica-se que os valores dos critérios e das estatísticas para os estimadores de EMV, bootstrap e bootstrap corrigido são semelhantes. Do que foi visto, pode-se utilizar o método bootstrap no lugar do método de máxima verossimilhança quando essas estimativas não forem significativas.

Tabela 4.6: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados

	Parâmetros	EMV	Bootstrap	Bootstrap Corrigido
<i>AIC</i>	2115,175	1496,923	1496,926	1500,258
<i>AICC</i>	2115,596	1497,344	1497,347	1500,679
<i>BIC</i>	2125,596	1507,344	1507,346	1510,679
<i>HQIC</i>	2119,392	1501,141	1501,143	1504,476
<i>W*</i>	0,289	0,031	0,030	0,038
<i>A*</i>	2,030	0,185	0,185	0,222
K-S (p-valor)	0,210 ($< 10^{-16}$)	0,025 (0,949)	0,024 (0,963)	0,061 (0,069)

4.1.4 Weibull $(1 - Weibull)/Weibull$

Seja $\xi = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ os parâmetros da distribuição Weibull $(1 - Weibull)/Weibull$ (WWY). Foram simulados 450 valores da distribuição WWY com $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,5$, $\lambda = 1,2$, $\theta = 1,5$ para testar a adequação da distribuição proposta. Ajustou-se, aos dados, a densidade com os parâmetros verdadeiros, sua estimativa de máxima verossimilhança (EMV) via algoritmo de estimação BFGS para os dados, se repetiu a simulação de máxima verossimilhança 1000 vezes utilizando reamostragem bootstrap e bootstrap corrigido. O código R utilizado está no Apêndice E. Na Figura 4.4 se pode observar o histograma e os respectivos ajustes para os dados. Verifica-se que os ajustes dos EMV, bootstrap e bootstrap corrigido estão semelhantes.

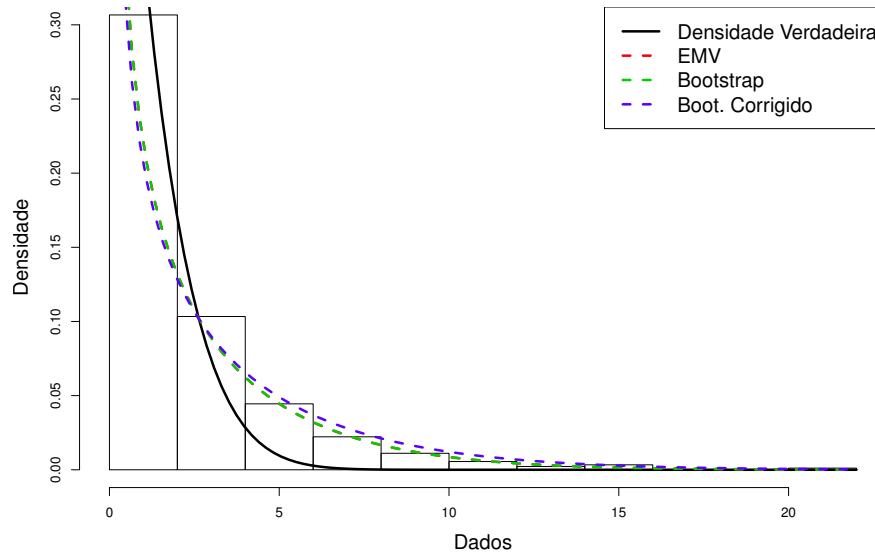


Figura 4.4: Histograma para 450 valores gerados de uma distribuição WWY com $\alpha = 0,3; \beta = 0,5; \lambda = 1,2; \theta = 1,5$ e os ajustes para os dados

A Tabela 4.7 apresenta-se os valores dos parâmetros verdadeiros, as estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados e os respectivos erros-padrão entre parênteses. O teste de Wald, para os EMV, ao nível de significância de 5% para $H_0 : \alpha = 0$ contra $H_1 : \alpha \neq 0$ e $H_0 : \lambda = 0$ contra $H_1 : \lambda \neq 0$, apresenta valores da estatística do teste menores que 2, assim rejeita-se H_0 , então as estimativas de α e λ não são significativas. Para os parâmetros β e θ , obteve-se os valores de $W = 3,46$ e $W = 4,92$, respectivamente, logo a estimativa de máxima verossimilhança de β e θ são significativas ao nível de 5%. As estimativas pelo método bootstrap e bootstrap corrigido são todas significativas, ao nível de 5% pelo teste de Wald.

Tabela 4.7: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	α	β	λ	θ
Parâmetros	0,3	0,5	1,2	1,5
EMV	1,449 (2,729)	0,322 (0,093)	3,187 (3,147)	1,805 (0,367)
Bootstrap	1,476 (0,327)	0,320 (0,018)	3,214 (0,472)	1,812 (0,017)
Bootstrap Corrigido	1,969 (0,656)	0,294 (0,038)	3,872 (0,947)	1,824 (0,035)

Na Tabela 4.8 observa-se os critérios e as estatísticas dos testes de aderência com p-valores entre parênteses para o teste K-S das estimativas pelos métodos utilizados e para os parâmetros verdadeiros. Verifica-se que os valores dos critérios para os estimadores de EMV e bootstrap são semelhantes. Os valores para o bootstrap corrigido são muito elevados. Observa-se que os valores das estatísticas são similares. Do que foi visto, pode-se utilizar o método bootstrap no lugar do método de máxima verossimilhança quando essas estimativas não forem significativas.

Tabela 4.8: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das estimativas de máxima verossimilhança, bootstrap e bootstrap corrigido para os dados simulados

	Parâmetros	EMV	Bootstrap	Bootstrap Corrigido
<i>AIC</i>	2294,886	2293,362	2293,365	2293,090
<i>AICC</i>	2295,308	2293,783	2293,786	2294,511
<i>BIC</i>	2305,307	2303,783	2303,786	2304,501
<i>HQIC</i>	2299,104	2297,580	2297,583	2298,307
<i>W*</i>	0,931	0,076	0,073	0,049
<i>A*</i>	0,224	0,612	0,591	0,419
K-S (p-valor)	0,322 ($2,2 \times 10^{-16}$)	0,515 ($2,2 \times 10^{-16}$)	0,518 ($2,2 \times 10^{-16}$)	0,578 ($2,2 \times 10^{-16}$)

4.2 Aplicação 2: Dados de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba), conjunto de dados 1

Ajustou-se o modelo $X \sim WLLX(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ para um conjunto de dados reais e comparou-se com os modelos Beta Exponencial Generalizada (BGE), Fréchet (F) e Beta Fréchet (BF). Os dados são definidos a partir de Nichols e Padgett (2006) composto por 100 observações de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba). (BARRETO-SOUZA *et al.*, 2011) ajustou esses dados a BF e (BARRETO-SOUZA *et al.*, 2010) ajustou a BGE. O código R utilizado está no Apêndice F. Os dados estão na Tabela 4.9:

Tabela 4.9: Dados definidos por Nichols e Padgett (2006) composto por 100 observações de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba)

3,7	2,74	2,73	2,5	3,6	3,11	3,27	2,87	1,47	3,11	4,42	2,41	3,19	3,22
1,69	3,28	3,09	1,87	3,15	4,9	3,75	2,43	2,95	2,97	3,39	2,96	2,53	2,67
2,93	3,22	3,39	2,81	4,2	3,33	2,55	3,31	3,31	2,85	2,56	3,56	3,15	2,35
2,55	2,59	2,38	2,81	2,77	2,17	2,83	1,92	1,41	3,68	2,97	1,36	0,98	2,76
4,91	3,68	1,84	1,59	3,19	1,57	0,81	5,56	1,73	1,59	2	1,22	1,12	1,71
2,17	1,17	5,08	2,48	1,18	3,51	2,17	1,69	1,25	4,38	1,84	0,39	3,68	2,48
0,85	1,61	2,79	4,7	2,03	1,8	1,57	1,08	2,03	1,61	2,12	1,89	2,88	2,82
2,05	3,65												

Na Tabela 4.10 estão os parâmetros estimados pelo método de bootstrap para os modelos utilizados. Verifica-se, pelo teste de Wald, ao nível de 5%, que todas as estimativas são significativas.

Tabela 4.10: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	WLLX	BGE	F	BF
α	2,758 (0,188)	2,439 (0,233)	-	-
β	1,226 (0,087)	-	-	-
λ	1,380 (0,086)	-	1,768 (0,004)	1,307 (0,423)
θ	3,172 (0,159)	-	-	-
a	-	2,344 (0,654)	-	5,978 (3,749)
b	-	2,454 (0,169)	-	0,992 (0,114)
σ	-	0,582 (0,063)	1,886 (0,007)	4,479 (1,709)

Na Figura 4.5 tem o histograma com os ajustes para os modelos WLLX, BGE, F e BF para os dados. Nota-se que o modelo WLLX se ajustou melhor aos dados utilizados.

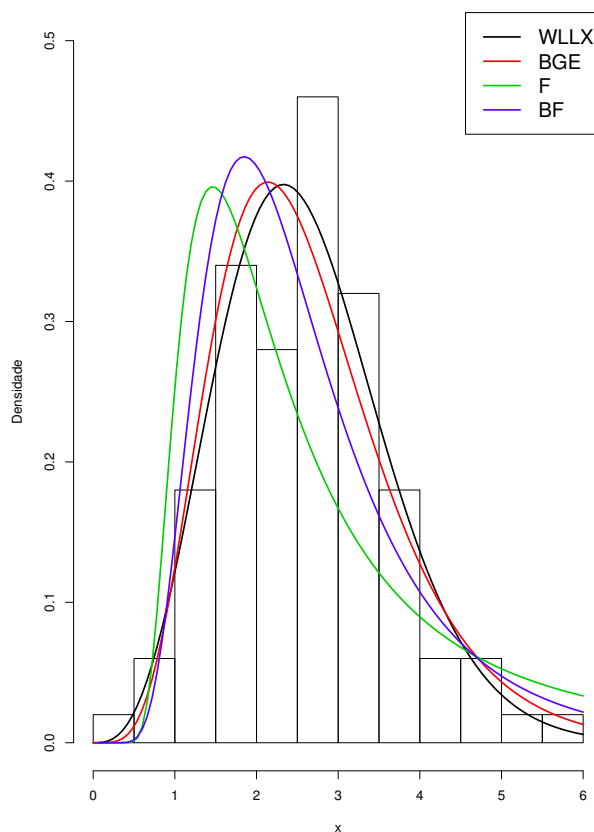


Figura 4.5: Histograma com as estimativas para os modelos WLLX, BGE, F e BF para os dados

A Tabela 4.11 apresenta os critérios e os valores das estatísticas dos testes de aderência para os modelos utilizados. Observa-se que o modelo que obteve menores valores foi o WLLX. Verifica-se que o modelo WLLX apresenta menores valores das estatísticas de Anderson-Darling, Cramér-Von Mises e Kolmogorov-Smirnov. Ao nível de 5%, nota-se, pelo p-valor, que os modelos que se ajustam aos dados utilizados são WLLX e BGE, sendo

que o WLLX se ajusta melhor pois tem um p-valor= 0,711 maior.

Tabela 4.11: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WLLX, BGE, F e BF

	WLLX	BGE	F	BF
<i>AIC</i>	291,026	295,853	350,292	314,820
<i>AICC</i>	291,716	296,253	350,492	315,220
<i>BIC</i>	299,598	304,425	354,578	323,393
<i>HQIC</i>	294,398	299,224	351,977	318,192
<i>W*</i>	0,085	0,169	0,756	0,382
<i>A*</i>	0,458	0,866	4,306	2,104
K-S (p-valor)	0,070 (0,711)	0,098 (0,291)	0,177 (0,004)	0,136 (0,049)

4.3 Aplicação 3: Dados de resistência de fibras de vidro de 1,5 cm

Ajustou-se o modelo $X \sim WWK(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ para um conjunto de dados reais e comparou-se com os ajustes dos modelos Beta Exponencial Generalizada (BGE), Fréchet (F) e Beta Fréchet (BF). Os dados obtidos a partir de (SMITH; NAYLOR, 1987) representam a resistência de fibras de vidro de 1,5 cm, medidos no National Physical Laboratory, Inglaterra. Infelizmente, as unidades de medida não são dadas no artigo. (BARRETO-SOUZA *et al.*, 2011) ajustou esses dados a BF e (BARRETO-SOUZA *et al.*, 2010) ajustou a BGE. O código R utilizado está no Apêndice G. Os dados consistem de 63 observações, na Tabela 4.12:

Tabela 4.12: Dados obtidos a partir de (SMITH; NAYLOR, 1987) representam a resistência de fibras de vidro de 1,5 cm, medidos no National Physical Laboratory, Inglaterra

0,55	0,93	1,25	1,36	1,49	1,52	1,58	1,61	1,64	1,68	1,73	1,81	2,00	0,74	1,04
1,27	1,39	1,49	1,53	1,59	1,61	1,66	1,68	1,76	1,82	2,01	0,77	1,11	1,28	1,42
1,50	1,54	1,60	1,62	1,66	1,69	1,76	1,84	2,24	0,81	1,13	1,29	1,48	1,50	1,55
1,61	1,62	1,66	1,70	1,77	1,84	0,84	1,24	1,30	1,48	1,51	1,55	1,61	1,63	1,67
1,70	1,78	1,89												

Na Tabela 4.13 estão os parâmetros estimados pelo método bootstrap para os modelos estudados. Verifica-se pelo teste de Wald, ao nível de 5%, que as estimativas dos parâmetros são significativas para todos os modelos.

Tabela 4.13: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	WWK	BGE	F	BF
α	0,723 (0,004)	4,041 (0,466)	-	-
β	4,291 (0,598)	-	-	-
λ	2,384 (0,206)	4,315 (1,271)	1,284 (0,008)	5,148 (2,995)
θ	0,741 (0,100)	-	-	-
a	-	4,232 (0,152)	-	2,116 (0,146)
b	-	1,247 (0,149)	-	2,585 (0,297)
σ	-	-	2,924 (0,068)	0,409 (0,023)

A Tabela 4.14 mostra os valores dos critérios e estatísticas de teste de aderência para os modelos utilizados. Nota-se que para todos os critérios o modelo WWK obteve os menores valores, indicando que este modelo se ajusta melhor a esse conjunto de dados. Verifica-se que o modelo WWK obteve os menores valores para as estatísticas de Anderson-Darling, Cramér-Von Mises e Kolmogorov-Smirnov. Ao nível de 5%, pelo p-valor, observa-se que apenas o modelo WWK se ajusta a esse conjunto de dados com um p-valor = 0,0501.

Tabela 4.14: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WWK, BGE, F e BF

	WWK	BGE	F	BF
<i>AIC</i>	38,237	58,279	97,715	71,131
<i>AICC</i>	38,927	58,968	98,114	71,820
<i>BIC</i>	46,809	66,851	102,201	79,703
<i>HQIC</i>	41,609	61,650	99,601	74,502
W^*	0,233	0,605	1,239	0,804
A^*	1,278	3,310	6,551	4,354
K-S (p-valor)	0,168 (0,058)	0,216 (0,005)	0,231 (0,002)	0,256 (0,0004)

Na Figura 4.6 podemos observar o histograma com as estimativas dos modelos WWK, BGE, F e BF para os dados. Verifica-se que o modelo WWK se ajustou melhor aos dados utilizados.

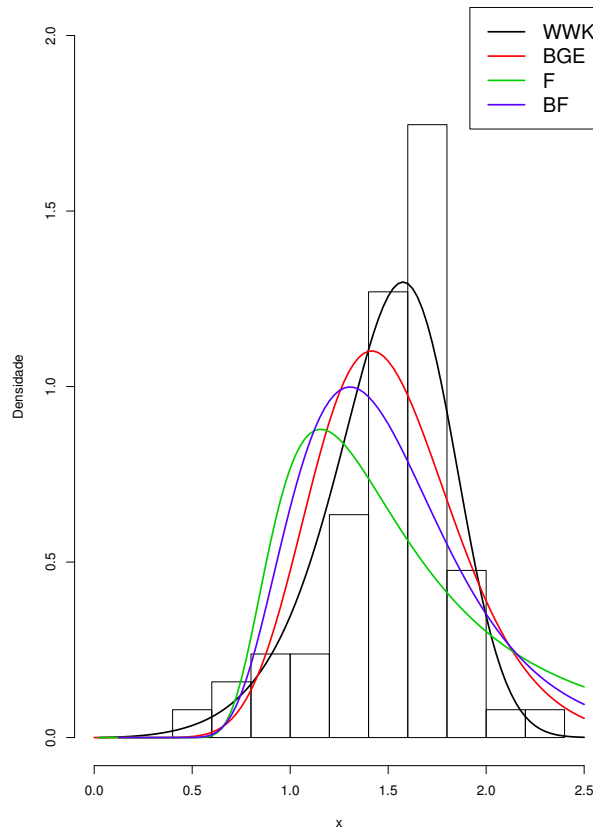


Figura 4.6: Histograma com as estimativas dos modelos WWK, BGE, F e BF para os dados

4.4 Aplicação 4: Número relatado mensalmente de varicela na Cidade de Nova York de 1931-1972

Ajustou-se o modelo $X \sim WWZ(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ para um conjunto de dados reais e comparou-se com os modelos Weibull (W) e Beta Exponencial Generalizada (BGE). Os dados são definidos a partir de Hipel e McLeod (1994) composto por 498 observações do número relatado mensalmente de varicela na Cidade de Nova York entre 1931-1972, divididos por 1000. O código R utilizado está no Apêndice H. Os dados estão na Tabela 4.15:

Tabela 4.15: Dados definidos Hipel e McLeod (1994) composto pelo número relatado mensalmente de varicela na Cidade de Nova York entre 1931-1972, divididos por 1000

0,956	0,927	1,585	1,536	1,448	1,272	0,303	0,068	0,062	0,116	0,275	0,565	0,922
0,928	0,925	1,121	1,282	1,142	0,411	0,114	0,082	0,22	0,646	1,069	1,32	1,473
2,305	2,094	1,694	1,043	0,39	0,127	0,056	0,148	0,426	0,89	1,5	1,442	1,799
1,556	1,926	1,635	0,379	0,09	0,068	0,21	0,667	0,905	1,124	1,192	1,85	1,941
1,505	1,016	0,429	0,058	0,078	0,251	0,605	0,817	0,97	0,86	0,977	1,143	0,92
0,94	0,426	0,193	0,099	0,186	0,525	1,085	1,22	1,157	1,974	2,301	2,277	1,746
0,413	0,129	0,078	0,16	0,448	0,82	1,154	1,277	1,841	1,981	1,304	1,288	0,387
0,114	0,097	0,278	0,604	0,787	1,01	0,968	1,195	1,2	1,218	1,183	0,334	0,145
0,066	0,252	0,536	0,996	1,624	1,626	1,603	1,74	1,9	1,424	0,711	0,191	0,135
0,302	0,612	1,178	1,409	1,218	1,543	1,477	0,987	0,935	0,495	0,126	0,109	0,197
0,397	0,88	1,097	1,164	1,652	1,8	1,941	1,419	0,444	0,136	0,07	0,171	0,424
0,66	1,05	1,177	1,559	1,513	1,371	1,042	0,205	0,067	0,083	0,143	0,469	0,611
0,745	1,039	1,389	1,284	1,288	0,871	0,299	0,087	0,089	0,155	0,446	0,749	1,037
1,08	1,289	1,211	1,076	1,08	0,372	0,132	0,078	0,133	0,203	0,214	0,347	0,407
0,78	1,182	1,082	0,899	0,479	0,123	0,086	0,18	0,326	0,695	1,235	1,399	1,854
2,406	2,026	1,378	0,522	0,136	0,076	0,109	0,259	0,521	0,996	1,174	1,751	1,554
1,428	1,308	0,438	0,15	0,088	0,151	0,395	0,781	1,389	2,059	3,058	2,589	1,488
1,048	0,253	0,082	0,079	0,125	0,226	0,47	0,936	1,026	1,244	0,935	1,079	0,884
0,349	0,144	0,079	0,26	0,445	0,592	1,427	1,545	1,951	2,2	1,964	1,284	0,523
0,142	0,093	0,148	0,198	0,374	0,915	0,963	1,154	1,393	1,227	1,158	0,478	0,084
0,044	0,113	0,331	1,052	1,747	1,796	2,625	2,411	1,877	1,052	0,543	0,11	0,067
0,124	0,16	0,43	0,726	1,101	1,769	1,599	1,035	0,988	0,424	0,147	0,076	0,105
0,281	0,524	1,044	1,247	2,023	1,903	1,653	1,247	0,372	0,107	0,075	0,094	0,224
0,487	0,989	1,639	1,991	1,905	1,846	1,381	0,451	0,176	0,083	0,15	0,272	0,55
0,798	0,902	1,316	1,443	1,102	0,705	0,272	0,119	0,106	0,072	0,115	0,337	0,677
0,885	1,142	1,59	1,355	1,198	0,565	0,136	0,089	0,115	0,174	0,477	0,741	1,034
1,401	1,316	1,056	0,882	0,506	0,136	0,08	0,062	0,149	0,368	0,683	0,993	1,205
1,485	1,349	1,067	0,369	0,173	0,095	0,113	0,175	0,335	0,619	0,691	1,022	0,858
0,953	0,913	0,332	0,127	0,082	0,062	0,147	0,384	0,711	0,928	1,152	1,134	1,277
0,961	0,509	0,173	0,17	0,193	0,29	0,415	0,707	0,724	1,105	1,065	0,938	0,755
0,442	0,17	0,091	0,15	0,219	0,317	0,561	0,631	0,829	0,857	0,955	0,808	0,398
0,111	0,082	0,147	0,276	0,528	0,746	0,889	1,274	1,164	1,024	0,863	0,436	0,27
0,156	0,139	0,156	0,306	0,362	0,438	0,624	0,543	0,642	0,659	0,286	0,086	0,043
0,068	0,168	0,253	0,526	0,601	0,809	0,759	0,95	1,088	0,452	0,198	0,082	0,072
0,154	0,206	0,316	0,569	0,549	0,671	0,736	0,659	0,287	0,132	0,051	0,085	0,079
0,133	0,177	0,21	0,372	0,562	0,623	0,626	0,296	0,142	0,082	0,096	0,166	0,288
0,416	0,459	0,576	1,042	0,873	0,704	0,366	0,137	0,058	0,134	0,071	0,142	0,211
0,331	0,471	0,639	0,569	0,718	0,391	0,123	0,072	0,063	0,086	0,141	0,32	0,463
0,69	0,847	1,121	1,048									

Na Tabela 4.16 estão os parâmetros estimados pelo método de bootstrap para os modelos utilizados. Verifica-se, pelo teste de Wald, ao nível de 5%, que todas as estimativas são significativas.

Tabela 4.16: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	WWZ	W	BGE
α	0,674 (0,003)	-	1,322 (0,051)
β	1,234 (0,009)	-	-
λ	1,521 (0,007)	1,286 (0,002)	-
θ	0,767 (0,006)	1,188 (0,002)	-
a	-	-	1,595 (0,065)
b	-	-	0,970 (0,033)
σ	-	-	1,023 (0,040)

Na Figura 4.7 tem o histograma com os ajustes para os modelos WWZ, W e BGE para os dados. Nota-se que o modelo WWZ se ajustou melhor aos dados utilizados.

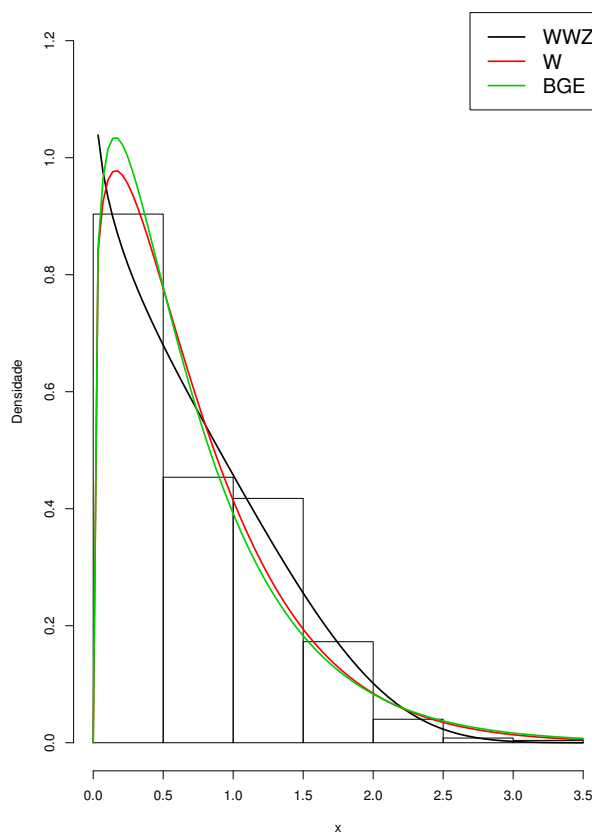


Figura 4.7: Histograma com as estimativas para os modelos WWZ, W e BGE para os dados

A Tabela 4.17 apresenta os critérios e os valores das estatísticas dos testes de aderência para os modelos utilizados. Observa-se que o modelo que obteve menores valores foi o WWZ. Verifica-se que o modelo WWZ apresenta menores valores das estatísticas de Anderson-Darling, Cramér-Von Mises e Kolmogorov-Smirnov. Ao nível de 1%, nota-se, pelo p-valor, que o modelo que se ajusta aos dados utilizados é o WWZ pois tem um

p-valor= 0,01.

Tabela 4.17: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WWZ, W e BGE

	WWZ	W	BGE
<i>AIC</i>	660,415	669,255	676,889
<i>AICC</i>	660,957	669,455	677,579
<i>BIC</i>	668,987	673,541	685,462
<i>HQIC</i>	663,786	670,941	680,261
<i>W*</i>	0,607	0,971	1,068
<i>A*</i>	4,313	6,248	6,789
K-S (p-valor)	0,078 (0,01)	0,093 (0,0004)	0,092 (0,0004)

4.5 Aplicação 5: Dados de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba), conjunto de dados 2

Ajustou-se o modelo $X \sim WWY(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ para um conjunto de dados reais e comparou-se com os modelos Weibull (W), Exponencial Exponenciada (EE) e Pareto Exponenciada (PE). Ghitany *et al.* (2013) aplicou estes dados a distribuições da classe exponenciada. Os dados são definidos a partir de Nichols e Padgett (2006) composto por 69 observações de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba). O código R utilizado está no Apêndice I. Os dados estão na Tabela 4.18:

Tabela 4.18: Dados definidos por Nichols e Padgett (2006) composto por 69 observações de quebra de fibras de carbono por stress (em Gba)

1,312	1,314	1,479	1,552	1,700	1,803	1,861	1,865	1,944	1,958	1,966	1,997	2,006
2,021	2,027	2,055	2,063	2,098	2,14	2,179	2,224	2,240	2,253	2,270	2,272	2,274
2,301	2,301	2,359	2,382	2,382	2,426	2,434	2,435	2,478	2,490	2,511	2,514	2,535
2,554	2,566	2,57	2,586	2,629	2,633	2,642	2,648	2,684	2,697	2,726	2,770	2,773
2,800	2,809	2,818	2,821	2,848	2,88	2,954	3,012	3,067	3,084	3,090	3,096	3,128
3,233	3,433	3,585	3,585									

Na Tabela 4.19 estão os parâmetros estimados pelo método bootstrap para os modelos estudados. Verifica-se pelo teste de Wald, ao nível de 5%, que as estimativas dos parâmetros são significativas para todos os modelos.

Tabela 4.19: Estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrões

	WWY	W	EE	PE
α	0,477 (0,006)	-	-	-
β	2,631 (0,304)	-	-	-
λ	2,065 (0,179)	0,303 (0,016)	1,229 (0,110)	2,593 (0,004)
θ	0,999 (0,138)	3,451 (0,492)	13,026 (5,494)	16,127 (0,035)

A Tabela 4.20 mostra os valores dos critérios e estatísticas de teste de aderência para os modelos utilizados. Nota-se que para todos os critérios o modelo WWY obteve os menores valores, indicando que este modelo se ajusta melhor a esse conjunto de dados. Verifica-se que o modelo WWY obteve os menores valores para as estatísticas de Anderson-Darling, Cramér-Von Mises. A estatística de Kolmogorov-Smirnov do modelo EE foi melhor.

Tabela 4.20: Critérios de informação e Estatísticas de teste para aderência das distribuições WWY, W, EE e PE

	WWY	W	EE	PE
<i>AIC</i>	113,30	119,60	139,52	193,65
<i>AICC</i>	113,99	139,72	119,80	193,85
<i>BIC</i>	121,87	143,80	123,89	197,94
<i>HQIC</i>	116,67	141,20	121,29	195,34
<i>W*</i>	0,016	0,037	0,079	0,121
<i>A*</i>	0,141	0,279	0,557	0,839
K-S (p-valor)	0,264 (0,0001)	0,933 ($< 10^{-16}$)	0,187 (0,008)	0,281 ($< 10^{-05}$)

Na Figura 4.8 podemos observar o histograma com as estimativas dos modelos WWY, W, EE e PE para os dados. Verifica-se que o modelo WWY se ajustou melhor aos dados utilizados.

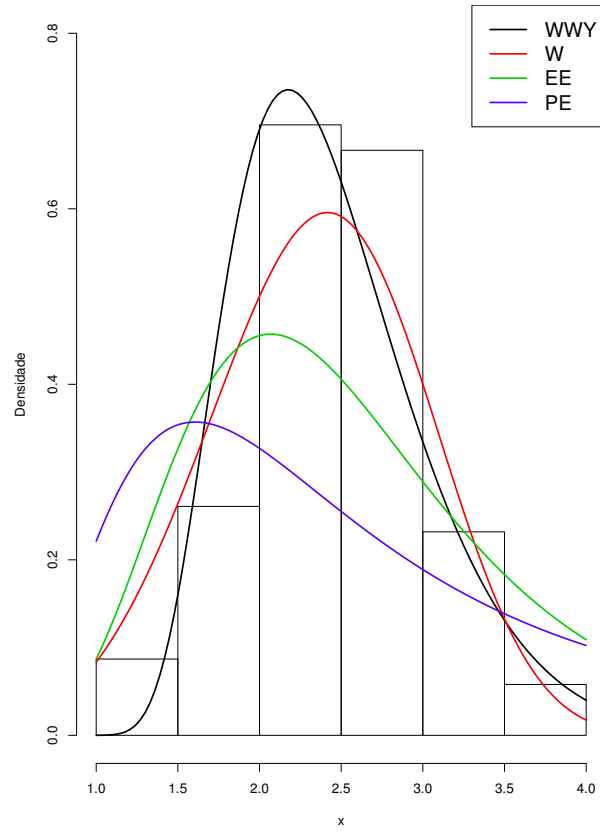


Figura 4.8: Histograma com as estimativas dos modelos WWY, W, EE e PE para os dados

Conclusões, Contribuições e Trabalhos Futuros

Este capítulo apresenta as conclusões da tese, bem como as principais contribuições. Ao final, alguns trabalhos futuros que podem dar prosseguimento a esta pesquisa de doutorado.

5.1 Conclusões

Nesta tese, foram introduzidas as classes Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$, Weibull Complementar $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$, Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$ e Weibull Complementar $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$ que são generalizações da distribuição Weibull. Também desenvolvemos as propriedades para os casos particulares, quando $\delta = 0$, Weibull $-\text{Log}(1 - G)$, Weibull $-\text{Log}(G)$, Weibull $G/(1 - G)$ e Weibull $(1 - G)/G$, respectivamente. Daí desenvolvemos as seguintes distribuições particulares: Weibull Log-Logística X (WLLX), caso particular para $\delta = 0$ da Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$; Weibull Weibull K (WWK), caso particular para $\delta = 0$ da Classe Weibull Complementar $(\delta G, \delta - \text{Log}(G))$; Weibull Weibull Z (WWZ), caso particular para $\delta = 0$ de Weibull $(\delta(1 - G), \delta + G/(1 - G))$; e Weibull Weibull Y (WWY), caso particular para $\delta = 0$ da Classe Weibull Complementar $\delta G, \delta + (1 - G)/G$, respectivamente.

Em seguida, obtivemos as expressões da função de distribuição, função densidade e função de risco para o caso geral e para as distribuições dos casos particulares para alguns valores dos parâmetros, mostrando que essas distribuições são flexíveis o bastante para

modelar dados em Análise de Sobrevivência. Obteve-se algumas das principais quantidades. Também foram desenvolvidas as propriedades das classes particulares.

Comparamos o ajuste de algumas distribuições e sub-modelos da distribuição com dados simulados e dados reais. Concluindo que as distribuições Weibull $-Log(1-Log-Logística)$ (WLLX), Weibull $-Log(Weibull)$ (WWK), Weibull $(Weibull)/(1-Weibull)$ (WWZ) e Weibull $(1-Weibull)/Weibull$ (WWY) podem ser utilizadas para ajustar dados de análise de sobrevivência.

5.2 Contribuições

A partir desta tese, apontamos algumas contribuições. A primeira contribuição, podemos apontar como a criação de quatro classes de distribuições: A Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta - Log(1-G))$, Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta - Log(G))$, Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta + G/(1-G))$ e Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1-G)/G)$.

A segunda contribuição que apontamos é o desenvolvimento das propriedades das classes particulares, quando $\delta = 0$, Weibull $-Log(1-G)$, Weibull $-Log(G)$, Weibull $(1-G)/G$ e Weibull $G/(1-G)$.

A terceira contribuição é a criação das distribuições Weibull $-Log(1-Log-Logística)$ (WLLX), Weibull $-Log(Weibull)$ (WWK), Weibull $Weibull/(1-Weibull)$ (WWZ) e Weibull $(1-Weibull)/Weibull$ (WWY). Outra contribuição é a criação de modelos mais flexíveis, ou seja, modelos que se adequam melhor aos conjuntos de dados reais.

Na sequência são apresentadas algumas alternativas de trabalhos futuros que podem ser realizados a partir desta tese.

5.3 Trabalhos Futuros

De um modo geral, os modelos propostos tiveram bons ajustes para os conjuntos de dados analisados. Entre os complementos a serem estudados posteriormente podemos citar: aplicar as distribuições propostas a outros conjuntos de dados de Análise de Sobrevivência que apresentem censura e obter medidas de resíduos do modelo de regressão.

Outro complemento pode ser encontrar outros modelos de distribuições a partir das novas classes de distribuições definidas neste trabalho para $\delta \neq 0$, podendo explicar melhor as situações ou fenômenos modelados.

Aqui usamos as distribuições Log-Logística e Weibull instanciando a distribuição G nas classes propostas. Uma direção possível é a de usar outras distribuições e assim investigar as novas distribuições generalizadas geradas. Conjecturamos que será possível modelar outros dados que não o de sobrevivência.

Referências Bibliográficas

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on, Ieee*, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.

ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, Springer, v. 71, n. 1, p. 63–79, 2013.

BARRETO-SOUZA, W.; CORDEIRO, G. M.; SIMAS, A. B. Some results for beta fréchet distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 40, n. 5, p. 798–811, 2011.

BARRETO-SOUZA, W.; SANTOS, A. H.; CORDEIRO, G. M. The beta generalized exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 80, n. 2, p. 159–172, 2010.

BENNETT, S. Log-logistic regression models for survival data. *Applied Statistics*, JSTOR, p. 165–171, 1983.

BOURGUIGNON, M.; SILVA, R. B.; CORDEIRO, G. M. The weibull-g family of probability distributions. *Journal of Data Science*, v. 12, n. 1, p. 53–68, 2014.

BOURGUIGNON, M.; SILVA, R. B.; ZEA, L. M.; CORDEIRO, G. M. The kumaraswamy pareto distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, v. 12, n. 2, p. 129–144, 2013.

BRITO, C. C. R. Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas. *Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada)*, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, p. 241f, 2014.

- BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. *Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach*. [S.l.]: Springer, 2002.
- CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. *Journal of Quality Technology*, American Society for Quality, v. 27, n. 2, p. 154–161, 1995.
- COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. Análise de sobrevivência aplicada. In: *ABE-Projeto Fisher*. [S.l.]: Edgard Blücher, 2006.
- CORDEIRO, G. M.; LEMONTE, A. J. The mcdonald inverted beta distribution. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 349, n. 3, p. 1174–1197, 2012.
- CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M.; NADARAJAH, S. The kumaraswamy weibull distribution with application to failure data. *Journal of the Franklin Institute*, v. 347, n. 8, p. 1399–1429, 2010.
- DARLING, D. A. The kolmogorov-smirnov, cramer-von mises tests. *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 823–838, 1957.
- EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. *Modelling extremal events: for insurance and finance*. Springer, 1997.
- FRÉCHET, M. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. soc. plon. math*, v. 6, p. 93–116, 1927.
- GHITANY, M.; AL-JARALLAH, R.; BALAKRISHNAN, N. On the existence and uniqueness of the mles of the parameters of a general class of exponentiated distributions. *Statistics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 3, p. 605–612, 2013.
- GUPTA, A. K.; NADARAJAH, S. *Handbook of beta distribution and its applications*. [S.l.]: CRC Press, 2004.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distributions. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, v. 4, n. 2, p. 173–188, 1999.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and weibull distributions. *Biometrical journal*, Berlin, Akademie-Verlag, 1977-, v. 43, n. 1, p. 117–130, 2001.
- HANNAN, E. J.; QUINN, B. G. The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, JSTOR, p. 190–195, 1979.

- HIPEL, K. W.; MCLEOD, A. I. *Time series modelling of water resources and environmental systems*. [S.l.]: Elsevier, 1994.
- JAMES, G.; WITTEN, D.; HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. *All of statistics: a concise course in statistical inference*. [S.l.]: [S.l.]: Springer, 2013.
- KHAN, R.; KUMAR, D. On moments of lower generalized order statistics from exponentiated pareto distribution and its characterization. *Appl. Math. Sci.(Ruse)*, v. 4, n. 55, p. 2711–2722, 2010.
- LAI, C.; XIE, M.; MURTHY, D. A modified weibull distribution. *Reliability, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 52, n. 1, p. 33–37, 2003.
- LAWLESS, J. *Statistical models and methods for lifetime data*. New York: Wiley, 1982.
- LEE, C.; FAMOYE, F.; OLUMOLADE, O. Beta-weibull distribution: some properties and applications to censored data. *Journal of modern applied statistical methods*, v. 6, n. 1, p. 17, 2007.
- LIANG, H.; ZOU, G. Improved aic selection strategy for survival analysis. *Computational statistics & data analysis*, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 2538–2548, 2008.
- LONGIN, F. M. The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of Business*, p. 383–408, 1996.
- MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. [S.l.]: São Paulo: Edusp, 2006.
- MANN, N. R.; SINGPURWALLA, N. D.; SCHAFER, R. E. *Methods for statistical analysis of reliability and life data*. Wiley, 1974.
- MCDONALD, J. B.; XU, Y. J. A generalization of the beta distribution with applications. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 66, n. 1, p. 133–152, 1995.
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 42, n. 2, p. 299–302, 1993.
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; FREIMER, M. The exponentiated weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, Taylor & Francis, v. 37, n. 4, p. 436–445, 1995.
- NADARAJAH, S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. The zografos–balakrishnan-g family of distributions: Mathematical properties and applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 44, n. 1, p. 186–215, 2015.

- NADARAJAH, S.; ELJABRI, S. The kumaraswamy gp distribution. *Journal of Data Science*, v. 11, n. 4, p. 739–766, 2013.
- NADARAJAH, S.; GUPTA, A. The beta fréchet distribution. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, v. 14, n. 1, p. 15–24, 2004.
- NICHOLS, M. D.; PADGETT, W. A bootstrap control chart for weibull percentiles. *Quality and reliability engineering international*, Wiley Online Library, v. 22, n. 2, p. 141–151, 2006.
- PASCOA, M. A.; ORTEGA, E. M.; CORDEIRO, G. M. The kumaraswamy generalized gamma distribution with application in survival analysis. *Statistical methodology*, Elsevier, v. 8, n. 5, p. 411–433, 2011.
- PHAM, H.; LAI, C.-D. On recent generalizations of the weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 56, n. 3, p. 454–458, 2007.
- PINHO, L.; CORDEIRO, G.; NOBRE, J. The gamma-exponentiated weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, v. 11, n. 4, p. 379–395, 2012.
- RAMOS, M. W. A.; CORDEIRO, G. M.; MARINHO, P. R. D.; DIAS, C. R. B.; HAMEDANI, G. G. The zografos-balakrishnan log-logistic distribution: Properties and applications. *Journal of Statistical Theory and Applications*, v. 12, n. 3, p. 225–244, 2013.
- RISTIĆ, M. M.; BALAKRISHNAN, N. The gamma-exponentiated exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 82, n. 8, p. 1191–1206, 2012.
- SANTANA, T. V. F. d.; ORTEGA, E. M.; CORDEIRO, G. M.; SILVA, G. O. The kumaraswamy-log-logistic distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, v. 11, n. 3, p. 265–291, 2012.
- SCHWARZ, G. *et al.* Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SILVA, G. O.; ORTEGA, E. M.; CORDEIRO, G. M. The beta modified weibull distribution. *Lifetime data analysis*, Springer, v. 16, n. 3, p. 409–430, 2010.
- SMITH, R. L.; NAYLOR, J. A comparison of maximum likelihood and bayesian estimators for the three-parameter weibull distribution. *Applied Statistics*, JSTOR, p. 358–369, 1987.
- STACY, E. W. A generalization of the gamma distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 1187–1192, 1962.

TAHIR, M.; ZUBAIR, M.; MANSOOR, M.; CORDEIRO, G. M.; ALIZADEH, M.; HAMEDANI, G. A new weibull-g family of distributions. *Hacet. J. Math. Stat.*(2015b). *forthcoming*, 2014.

TORABI, H.; HEDESH, N. M. The gamma-uniform distribution and its applications. *Kybernetika*, Institute of Information Theory and Automation AS CR, v. 48, n. 1, p. 16–30, 2012.

WASSERMAN, L. *All of statistics: a concise course in statistical inference*. [S.l.]: Springer, 2004.

WEIBULL, W. Wide applicability. *Journal of applied mechanics*, 1951.

ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology*, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 344–362, 2009.

APÊNDICE

Caso particular da Classe Weibull $(\delta(1 - G), \delta - \text{Log}(1 - G))$: A Classe Weibull $-\text{Log}(1 - G)$

Modelo Funcional da Classe Weibull $-\text{Log}(1 - G)$

Para $\delta = 0$, temos o caso particular, a classe Weibull-X que foi introduzida por Alzaatreh *et al.* (2013). Desenvolveremos suas propriedades. Para $x \in \mathbb{R}$ temos a seguinte função de distribuição acumulada:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{-\log[1-G(x)]} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= 1 - e^{-[\lambda \log(1-G(x))]^\theta}, \end{aligned}$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição. Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{\lambda \theta g(x)}{1 - G(x)} [-\lambda \log(1 - G(x))]^{\theta-1} e^{-[\lambda \log(1-G(x))]^\theta}$$

Expansões da Função de distribuição e densidade da Classe Weibull $-Log(1 - G)$

Podemos obter a expansão da função de distribuição da família Weibull Generalizada, da seguinte maneira.

Como

$$W(y) = e^{-\lambda^\theta (-\log(1-y))^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(y - \frac{e-1}{e} \right)^k, \quad 0 < y < 1$$

em que

$$a_k = \frac{w^{(k)} \left(\frac{e-1}{e} \right)}{k!}$$

Logo temos que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(G(x) - \frac{e-1}{e} \right)^k$$

Como,

$$\left(G(x) - \frac{e-1}{e} \right)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j G^{k-j}(x)$$

Dessa forma,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j G^{k-j}(x)$$

Sendo $G(x)$ uma função contínua, teremos $f(x) = F'(x)$, logo temos que a expansão da função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j (k-j)g(x)G^{k-j-1}(x)$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja discreta, teremos $P(X = x_l) = F(x_l) - F(x_l - 1)$. Portanto a função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x_l) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (G^{k-j}(x_l) - G^{k-j}(x_l - 1))$$

Expansões para os momentos de ordem m , momentos centrais de ordem m e coeficiente geral da Classe Weibull $-Log(1 - G)$

Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF(x)$$

Logo, teremos

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j)g(x)G^{k-j-1}(x)dx$$

Portanto,

$$\mu_m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j)\tau_{m,0,k-j-1}^G$$

em que

$$\tau_{m,\eta,r}^F = E(X^m f(X)^\eta F(X)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)^\eta F(x)^r dF(x)$$

Em particular, temos a seguinte expansão para a média para a classe Weibull $-Log(G)$, como $\mu = \mu_1$, então teremos:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j)\tau_{1,0,k-j-1}^G$$

A seguir, os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe Weibull $-Log(1 - G)$.

como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu_{m-r}$$

Como

$$\mu_{m-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G$$

Temos,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G$$

Portanto,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G$$

Em particular, temos que a expansão para a variância:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G$$

A expansão do coeficiente geral para a classe Weibull $-\text{Log}(1-G)$.

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então teremos

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G\right)^{m/2}}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ teremos que a expansão para o coeficiente de assimetria para a classe Weibull $-\text{Log}(G)$ é dado por

$$C_a = \frac{\sum_{r=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{3-r,0,k-j-1}^G}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G\right)^{3/2}}$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$, temos o coeficiente de curtose:

$$C_c = \frac{\sum_{r=0}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{4-r,0,k-j-1}^G}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G\right)^2}$$

Expansões para a função geradora de momentos da Classe Weibull $-Log(1 - G)$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a classe $-Log(1 - G)$.

Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} dF(x)$$

Temos,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} g(x) G^{k-j-1}(x) dx \end{aligned}$$

Como

$$e^{tX} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \frac{t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k-j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) t^m}{m!} \tau_{m,0,k-j-1}^G$$

Expansões para a função característica da Classe Weibull $-Log(1-G)$

Como

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(x)$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} g(x) G^{k-j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Como

$$e^{itX} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!} g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) \frac{i^m t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k-j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{a_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e}\right)^j (k-j) i^m t^m}{m!} \tau_{m,0,k-j-1}^G$$

Função log-verossimilhança da Classe Weibull $-Log(1 - G)$

A seguir, veremos as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros da família Weibull Generalizada.

A função de log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\xi) &= \sum_{i=1}^n \log(g(x_i)) - \sum_{i=1}^n (-\lambda \log(1 - G(x_i)))^\theta + \sum_{i=1}^n (\theta - 1) \log(-\lambda \log(1 - G(x_i))) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \log(1 - G(x_i)) + n \log(\theta) + n \log(\lambda)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim, temos que:

$$\frac{\delta l(\xi)}{\delta \lambda} = - \sum_{i=1}^n -\theta \log(1 - G(x_i)) (-\lambda \log(1 - G(x_i)))^{\theta-1} + \frac{(\theta - 1)n}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta l(\xi)}{\delta \theta} &= - \sum_{i=1}^n \log(-\lambda \log(1 - G(x_i))) (-\lambda \log(1 - G(x_i)))^\theta \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \log(-\lambda \log(1 - G(x_i))) + \frac{n}{\theta}
\end{aligned}$$

Entropia de Rényi da Classe Weibull $-Log(G)$

A entropia é uma medida de incerteza, no sentido quanto maior o valor da entropia menor a informação e maior a incerteza, ou seja, maior a aleatoriedade ou desordem.

A entropia de Rényi é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_R(\eta) &= \frac{1}{1-\eta} \log\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x)\right) \\ &= \frac{1}{1-\eta} \log\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda\theta g(x)}{1-G(x)} [-\lambda \log(1-G(x))]^{\theta-1} e^{-[-\lambda \log(1-G(x))]^{\theta}}\right)^{\eta} dx\right)\end{aligned}$$

Caso particular da Classe Weibull $(\theta G, \theta - \text{Log}(G))$: A Classe Weibull $-\text{Log}(G)$

Modelo Funcional da Classe Weibull $-\text{Log}(G)$

Para $\delta = 0$, temos o caso particular, que foi introduzido por Tahir *et al.* (2014). Para $x \in \mathbb{R}$, temos a seguinte função de distribuição acumulada:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\log[G(x)]}^{\infty} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= e^{-\lambda^\theta [-\log(G(x))]^\theta}, \end{aligned}$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição. Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{G(x)} [-\text{Log}(G(x))]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta [-\text{Log}(G(x))]^\theta}$$

Expansões da Função de distribuição e densidade da Classe Weibull $-Log(G)$

A seguir, veremos os cálculos do desenvolvimento da expansão da função de distribuição da classe Weibull $-Log(G)$:

Sejam

$$W(y) = e^{-\lambda^\theta [-Log(G(y))]^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y - e^{-1})^k, \quad 0 < y < 1$$

em que

$$a_k, \frac{w^{(k)}(e^{-1})}{k!}$$

Logo, temos que:

$$F_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [G(x) - e^{-1}]^k$$

em que

Como,

$$[G(x) - e^{-1}]^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j e^{-j} G^{k-j}(x)$$

Logo temos

$$F_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} G^{k-j}(x)$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja de variável aleatória contínua, teremos $f_G(x) = F'_G(x)$, portanto,

$$f_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x)$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja discreta, teremos $P(X = x_l) = F(x_l) - F(x_{l-1})$, portanto,

$$P(X = x_l) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{r}{j} a_r (-1)^j e^{-j} [G^{k-j}(x_l) - G^{k-j}(x_l - 1)]$$

Expansões para os momentos de ordem m , os momentos centrais de ordem m e coeficiente geral para a Classe Weibull $-Log(G)$

A seguir introduzimos a expressão dos momentos probabilisticamente ponderados e em seguida veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos de ordem m para a classe Weibull $-Log(G)$.

Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF(x)$$

Logo, teremos

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x) dx$$

Portanto,

$$\mu_m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{m,0,k-j-1}^G$$

em que

$$\tau_{m,\eta,r}^F = E(X^m f(X)^\eta F(X)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)^\eta F(x)^r dF(x)$$

Em particular, temos a seguinte expansão para a média para a classe Weibull $-Log(G)$, como $\mu = \mu_1$, então teremos:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{1,0,k-j-1}^G$$

A seguir, os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe Weibull $-Log(G)$.

como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu_{m-r}$$

Como

$$\mu_{m-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G$$

Temos,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G$$

Portanto,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{m}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G$$

Em particular, temos que a expansão para a variância:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G$$

A expansão do coeficiente geral para a classe Weibull $-Log(G)$.

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então teremos

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{m}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{m-r,0,k-j-1}^G}{(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G)^{m/2}}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ teremos que a expansão para o coeficiente de assi-

metria para a classe Weibull $-Log(G)$ é dado por

$$C_a = \frac{\sum_{r=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{3}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{3-r,0,k-j-1}^G}{(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G)^{3/2}}$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$, temos o coeficiente de curtose:

$$C_c = \frac{\sum_{r=0}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{4}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{4-r,0,k-j-1}^G}{(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{2}{r} \binom{k}{j} a_k (-1)^{j+r} \mu^r e^{-j} (k-j) \tau_{2-r,0,k-j-1}^G)^2}$$

Expansões para a função geradora de momentos da Classe Weibull $-Log(G)$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a classe $-Log(G)$.

Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} dF(x)$$

Temos,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} g(x) G^{k-j-1}(x) dx \end{aligned}$$

Como

$$e^{tX} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \frac{t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k-j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) t^m}{m!} \tau_{m,0,k-j-1}^G$$

Expansões para a função característica da Classe Weibull $-Log(G)$

Como

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(x)$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} g(x) G^{k-j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Como

$$e^{itX} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!} g(x) G^{k-j-1}(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k (-1)^j e^{-j} (k-j) \frac{i^m t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k-j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{a_k (-1)^j e^{-j(k-j)} i^{m+tm}}{m!} \tau_{m,0,k-j-1}^G$$

Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Weibull $-Log(G)$

A seguir, são obtidos os cálculos do desenvolvimento das derivadas da função de log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe Weibull $-Log(G)$ Generalizada.

Seja a função de verossimilhança

$$\begin{aligned} L(\lambda, \theta, \xi) &= \prod_{i=1}^n f_G(x_i; \lambda, \theta, \xi) \\ &= \theta^n \lambda^{n\theta} \prod_{i=1}^n \frac{g(x_i; \xi)}{G(x_i; \xi)} [-\log(G(x_i; \xi))]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \sum_{i=1}^n [-\log(G(x_i; \xi))]^\theta}. \end{aligned}$$

A respectiva função de log-verossimilhança é, então:

$$\begin{aligned} \ell(\lambda, \theta, \xi) &= n \log \theta + n\theta \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log g(x_i; \xi) - \sum_{i=1}^n \log G(x_i; \xi) + (\theta - 1)(-\log G(x_i; \xi)) \\ &\quad - \lambda\theta \sum_{i=1}^n \log [-\log(G(x_i; \xi))]^\theta \end{aligned}$$

Entropia de Rényi da Classe Weibull $-Log(G)$

A entropia é uma medida de incerteza, no sentido quanto maior o valor da entropia menor a informação e maior a incerteza, ou seja, maior a aleatoriedade ou desordem.

A entropia de Rényi é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R(\eta) &= \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right) \\ &= \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{G(x)} [-\log(G(x))]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta [-\log(G(x))]^\theta})^\eta dx \right) \end{aligned}$$

Caso particular da Classe Weibull $(\delta(1-G), \delta+G/(1-G))$: A Classe Weibull $G/(1-G)$

Modelo Funcional da Classe Weibull $G/(1-G)$

Para $\theta = 0$, temos o caso particular, a classe Weibull-G, proposta por Bourguignon *et al.* (2014). Para $x \in \mathbb{R}$ temos a seguinte função de distribuição acumulada:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{G(x)/(1-G(x))} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= 1 - e^{-\lambda^\theta (G(x)/(1-G(x)))^\theta}, \end{aligned}$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição. Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{(1-G(x))^2} \left[\frac{G(x)}{1-G(x)} \right]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left(\frac{G(x)}{1-G(x)} \right)^\theta}$$

Expansões da Função de distribuição e densidade da Classe Weibull $G/(1 - G)$

A seguir, veremos os cálculos do desenvolvimento da expansão da função de distribuição da classe Weibull $G/(1 - G)$:

Como

$$e^{-\lambda^\theta \left(\frac{G(x)}{1-G(x)}\right)^\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} G^{\theta j}(x) (1 - G(x))^{-\theta j}$$

Logo

$$F_G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} G^{\theta j}(x) (1 - G(x))^{-\theta j}$$

Como,

$$(1 - G(x))^{-\theta j} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} (-1)^k G^k(x)$$

Logo, temos,

$$F_G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} G^{k+\theta j}(x)$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja de variável aleatória contínua, teremos $f_G(x) = F'_G(x)$, portanto,

$$f_G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} g(x) G^{k+\theta j-1}(x)$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja discreta, teremos $P_G(X = x_l) = F_G(x_l) - F_G(x_{l-1})$, portanto,

$$P(X = x_l) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} (G^{k-\theta j}(x_l) - G^{k-\theta j}(x_{l-1}))$$

Expansões para os momentos de ordem m , os momentos centrais de ordem m e coeficiente geral para a Classe Weibull $G/(1 - G)$

A seguir introduzimos a expressão dos momentos probabilisticamente ponderados e em seguida veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos de ordem m para a classe Weibull $G/(1 - G)$.

Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF(x)$$

Logo, teremos

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx$$

Portanto,

$$\mu_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{m,0,k+\theta j-1}^G$$

em que

$$\tau_{m,\eta,r}^F = E(X^m f(X)^\eta F(X)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)^\eta F(x)^r dF(x)$$

Em particular, temos a seguinte expansão para a média para a classe Weibull $G/(1 - G)$, como $\mu = \mu_1$, então teremos:

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{1,0,k+\theta j-1}^G$$

A seguir, os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe Weibull $G/(1 - G)$.

como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu_{m-r}$$

Como

$$\mu_{m-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{m-r,0,k+\theta j-1}^G$$

Temos,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{m-r,0,k+\theta j-1}^G$$

Portanto,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{m-r,0,k+\theta j-1}^G$$

Em particular, temos que a expansão para a variância:

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{2-r,0,k+\theta j-1}^G$$

A expansão do coeficiente geral para a classe Weibull $G/(1 - G)$.

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então teremos

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{m-r,0,k+\theta j-1}^G}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \tau_{2-r,0,k+\theta j-1}^G \right)^{m/2}}$$

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ teremos que a expansão para o coeficiente de assimetria para a classe Weibull $G/(1 - G)$ é dado por

$$C_a = \frac{\sum_{r=0}^3 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k+\theta j)}{j!} \tau_{3-r,0,k+\theta j-1}^G}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k+\theta j)}{j!} \tau_{2-r,0,k+\theta j-1}^G \right)^{3/2}}$$

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$, temos o coeficiente de curtose:

$$C_c = \frac{\sum_{r=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k+\theta j)}{j!} \tau_{4-r,0,k+\theta j-1}^G}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \lambda^{\theta j} (k+\theta j)}{j!} \tau_{2-r,0,k+\theta j-1}^G \right)^2}$$

Expansões para a função geradora de momentos da Classe Weibull $G/(1-G)$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a classe $G/(1-G)$.

Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} dF(x)$$

Temos,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k+\theta j)}{j!} g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k+\theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx \end{aligned}$$

Como

$$e^{tX} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \frac{t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M_X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j) t^m}{j! m!} \tau_{m,0,k-j-1}^G$$

Expansões para a função característica da Classe Weibull $G/(1-G)$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função característica para a classe $G/(1-G)$.

Como

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(x)$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx
\end{aligned}$$

Como

$$e^{itX} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!} g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j!} \frac{i^m t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k+\theta j-1}(x) dx\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k + \theta j)}{j! m!} i^m t^m \tau_{m,0,k-j-1}^G$$

Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Weibull $G/(1 - G)$

A seguir, são obtidos os cálculos do desenvolvimento das derivadas da função de log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe Weibull $G/(1 - G)$ Generalizada.

Seja a função de verossimilhança

$$\begin{aligned}L(\lambda, \theta, \xi) &= \prod_{i=1}^n f_G(x_i; \lambda, \theta, \xi) \\ &= \theta^n \lambda^{n\theta} \prod_{i=1}^n \frac{g(x_i; \xi)}{(1 - G(x_i; \xi))^2} \left(\frac{G(x_i; \xi)}{1 - G(x_i; \xi)} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \sum_{i=1}^n \left(\frac{G(x_i; \xi)}{1 - G(x_i; \xi)} \right)^\theta}.\end{aligned}$$

A respectiva função de log-verossimilhança é, então:

$$\begin{aligned}\ell(\lambda, \theta, \xi) &= n \log \theta + n\theta \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log g(x_i; \xi) - \sum_{i=1}^n \log(1 - G(x_i; \xi))^2 \\ &\quad + (\theta - 1) \log(G(x_i; \xi)) - (\theta - 1) \log(1 - G(x_i; \xi)) - \lambda\theta \sum_{i=1}^n \left(\frac{G(x_i; \xi)}{1 - G(x_i; \xi)} \right)^\theta\end{aligned}$$

Entropia de Rényi da Classe Weibull $G/(1 - G)$

A entropia é uma medida de incerteza, no sentido quanto maior o valor da entropia menor a informação e maior a incerteza, ou seja, maior a aleatoriedade ou desordem.

A entropia de Rényi é dada por:

$$\mathcal{I}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right) \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{1-\eta} \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{(1-G(x))^2} \left[\frac{G(x)}{1-G(x)} \right]^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left(\frac{G(x)}{1-G(x)} \right)^\theta} \right)^\eta dx \right) \quad (5.3)$$

Caso particular da Classe Complementar Weibull $(\delta G, \delta + (1 - G)/G)$: Classe Weibull $(1 - G)/G$

Modelo Funcional da Classe Weibull $(1 - G)/G$

Para $\delta = 0$, temos o caso particular, a classe Weibull $(1 - G)/G$ introduzida nesta tese. Para $x \in \mathbb{R}$ temos a seguinte função de distribuição acumulada:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{1-G(x)}{G(x)}}^{\infty} \theta \lambda (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt \\ &= e^{-\lambda^\theta \left(\frac{1-G(x)}{G(x)}\right)^\theta}, \end{aligned}$$

em que $G(x)$ é a função de distribuição. Se $G(x)$ for a função de distribuição de uma variável contínua, derivando-se $F(x)$ temos a função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{G^2(x)} \left(\frac{1-G(x)}{G(x)} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left(\frac{1-G(x)}{G(x)}\right)^\theta}$$

A função de risco é dada por:

$$h(x) = \theta \lambda^\theta \frac{g(x)}{G^2(x) \left(1 - e^{-\lambda^\theta \left(\frac{1-G(x)}{G(x)}\right)^\theta}\right)} \left(\frac{1-G(x)}{G(x)} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \left(\frac{1-G(x)}{G(x)}\right)^\theta}$$

Expansões da Função de distribuição e densidade da Classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada

A seguir, são desenvolvidos os cálculos da expansão da função de distribuição e função densidade da classe Weibull $(1 - G)/G$.

Como

$$\exp\left(-\lambda^\theta \left(\frac{1 - G(x)}{G(x)}\right)^\theta\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} G^{-\theta j}(x) (1 - G(x))^{\theta j}$$

Logo

$$F_G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j}}{j!} G^{-\theta j}(x) (1 - G(x))^{\theta j}.$$

Como

$$(1 - G(x))^{\theta j} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} (-1)^k G^k(x).$$

Logo tem-se

$$F_G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} G^{k-\theta j}(x).$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja de variável aleatória contínua, teremos $f_G(x) = F'_G(x)$.

Portanto,

$$f_G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} g(x) G^{k-\theta j-1}(x).$$

Caso a distribuição $G(x)$ seja discreta, tem-se $P_G(X = x_l) = F_G(x_l) - F_G(x_l - 1)$.

Portanto,

$$P(X = x_l) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} (G^{k-\theta j}(x_l) - G^{k-\theta j}(x_{l-1})).$$

(c.q.d)

A expansão da função de distribuição e da função densidade da classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada, são dadas, respectivamente por

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j}}{j!} G^{k-\theta j}(x)$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} g(x) G^{k-\theta j-1}(x)$$

Expansões para os momentos de ordem m para a classe Weibull $(1 - G)/G$

A seguir se introduz a expansão dos momentos probabilisticamente ponderados e em seguida se desenvolve os cálculos da expansão para os momentos de ordem m para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada. Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF(x),$$

logo, se tem que

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx.$$

Portanto,

$$\mu_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \tau_{m,0,k-\theta j-1},$$

em que

$$\tau_{m,n,r} = E[X^m f(X)^n F(X)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)^n F(x)^r dF(x).$$

(c.q.d)

Em particular, tem-se a seguinte expansão para a média para a classe Weibull $(1 - G)/G$:

Como $\mu = \mu_1$, então

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \tau_{1,0,k-\theta j-1},$$

(c.q.d)

A seguir se desenvolve os cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem m para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada. Como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m dF(x),$$

tem-se que

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{m-r}.$$

Como

$$\mu_{m-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \tau_{m-r,0,k-\theta j-1},$$

tem-se

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \tau_{m,0,k-\theta j-1}.$$

Assim,

$$\mu'_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \tau_{m,0,k-\theta j-1}.$$

Em particular, tem-se que a expansão da variância para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada é dada por:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \tau_{2,0,k-\theta j-1}.$$

A seguir, são desenvolvidos os cálculos da expansão para o coeficiente geral para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada:

Como $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{E[(X-\mu)^2]^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$, então

$$c_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}.$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k-\theta j)}{j!} \tau_{m,0,k-\theta j-1}}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k-\theta j)}{j!} \tau_{2,0,k-\theta j-1} \right)^{\frac{m}{2}}}.$$

(c.q.d.)

Em particular, como $C_a = C_g(3)$ se tem que a expansão para o coeficiente de assimetria para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada é dada por:

$$C_a = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^3 \binom{3}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k-\theta j)}{j!} \tau_{3,0,k-\theta j-1}}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k-\theta j)}{j!} \tau_{2,0,k-\theta j-1} \right)^{\frac{m}{2}}}.$$

(c.q.d.)

Similarmente, como $C_c = C_g(4)$ se tem que a expansão para o coeficiente de curtose para a classe Weibull $\frac{1-G}{G}$ é

$$C_c = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^4 \binom{4}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k-\theta j)}{j!} \tau_{4,0,k-\theta j-1}}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2}{r} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k+r} \mu^r \lambda^{\theta j} (k-\theta j)}{j!} \tau_{2,0,k-\theta j-1} \right)^{\frac{m}{2}}}.$$

(c.q.d.)

Expansão para a função geradora de momentos para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada

A seguir se desenvolve os cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada. Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x),$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx.
\end{aligned}$$

Como

$$e^{tx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!},$$

logo,

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \frac{t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$M_x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j) t^m}{j! m!} \tau_{m,0,k-\theta j-1}.$$

(c.q.d)

Expansão para a função característica para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada

A seguir se desenvolve os cálculos da expansão para a função característica para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada. Como

$$\phi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x),$$

em que $\iota = \sqrt{-1}$. Tem-se que

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx.\end{aligned}$$

Como

$$e^{tx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!},$$

logo,

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j)}{j!} \frac{t^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) G^{k-\theta j-1}(x) dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\theta j}{k} \frac{(-1)^{j+k} \lambda^{\theta j} (k - \theta j) t^m}{j! m!} \tau_{m,0,k-\theta j-1}.$$

(c.q.d)

Função de log-verossimilhança e respectivas derivadas em relação aos parâmetros para a Classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada

A seguir, são obtidos os cálculos do desenvolvimento das derivadas da função de log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada.

Seja a função de verossimilhança

$$\begin{aligned}
L(\lambda, \theta, \xi) &= \prod_{i=1}^n f_G(x_i; \lambda, \theta, \xi) \\
&= \theta^n \lambda^{n\theta} \prod_{i=1}^n \frac{g(x_i; \xi)}{G^2(x_i; \xi)} \left(\frac{1 - G(x_i; \xi)}{G(x_i; \xi)} \right)^{\theta-1} e^{-\lambda^\theta \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - G(x_i; \xi)}{G(x_i; \xi)} \right)^\theta}.
\end{aligned}$$

A respectiva função de log-verossimilhança é, então:

$$\begin{aligned}
\ell(\lambda, \theta, \xi) &= n \log \theta + n\theta \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log g(x_i; \xi) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \log G(x_i; \xi) \\
&\quad + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - G(x_i; \xi)) - \lambda\theta \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{1 - G(x_i; \xi)}{G(x_i; \xi)} \right)^\theta
\end{aligned}$$

Estimativa de λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - G(x_i; \xi)}{G(x_i; \xi)} \right)^\theta}$$

Entropia de Rényi da Classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada

A entropia é uma media de incerteza, no sentido que quanto maior for o valor da entropia menor a informação e maior a incerteza, ou seja, maior a aleatoriedade ou desordem. A seguir, se desenvolve os cálculos da expansão da entropia para a classe Weibull $(1 - G)/G$ Generalizada, usando a entropia de Rényi.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_R(\eta) &= \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right) \\
&= \frac{1}{1 - \eta} \log \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \theta^\eta \lambda^{\eta\theta} \frac{g^\eta(x)}{G^{2\eta}(x)} \left(\frac{1 - G(x)}{G(x)} \right)^{(\theta-1)\eta} e^{-\eta\lambda^\theta \left(\frac{1 - G(x)}{G(x)} \right)^\theta} dF(x) \right\}.
\end{aligned}$$

Como

$$\exp \left\{ -\eta\lambda^\theta \left(\frac{1 - G(x)}{G(x)} \right)^\theta \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j} \eta^j}{j!} \left(\frac{1 - G(x)}{G(x)} \right)^{\theta j}.$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
f^\eta(x) &= \theta^\eta \lambda^{\eta\theta} \frac{g^\eta(x)}{G^{2\eta}(x)} \left(\frac{1-G(x)}{G(x)} \right)^{(\theta-1)\eta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\theta j} \eta^j}{j!} \left(\frac{1-G(x)}{G(x)} \right)^{\theta j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^\eta \lambda^{\eta\theta} (-1)^j \lambda^{\theta j} \eta^j}{j!} \frac{g^\eta(x)}{G^{2\eta}(x)} \left(\frac{1-G(x)}{G(x)} \right)^{\eta(1-\theta)+\theta j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^\eta \lambda^{\eta\theta} (-1)^j \lambda^{\theta j} \eta^j}{j!} g^\eta(x) G^{-(2\eta+\eta(1-\theta)+\theta j)}(x) (1-G(x))^{\eta(1-\theta)+\theta j}.
\end{aligned}$$

Como

$$(1-G(x))^{\eta(1-\theta)+\theta j} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\eta(1-\theta)+\theta j}{k} G^k(x),$$

logo, tem-se que

$$f^\eta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k} g^\eta(x) G^{k-(3\eta+\theta(\eta-j))}(x).$$

em que $p_{j,k} = p_{j,k}(\lambda, \theta, \eta) = \binom{\eta(1-\theta)+\theta j}{k} \frac{\theta^\eta \lambda^{\theta(\eta+j)} (-1)^{j+k} \eta^j}{j!}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_R(\eta) &= \frac{1}{1-\eta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} g^\eta(x) G^{k-(3\eta+\theta(\eta-j))}(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{1-\eta} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k} \tau_{0,\eta-1,k-3\eta-\theta\eta+\theta j} \right)
\end{aligned}$$

Código R Utilizado na Aplicação 1 com dados Simulados

Arquivo Fonte com Densidades

```
#----- Weibull Weibull Y-----#

pdf_wwy <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  be*th*lamb^th*(alpha)^(be)*((x^(be-1)*exp(-(alpha*x)^be))/(1-exp(-(alpha*x)^be))^2)
}

cdf_wwy <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  exp(-(lamb)^th*(exp((alpha*x)^be-1))^(-th))
}
```

```

sdf_wwy <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  1-exp(-(lamb)^th*(exp((alpha*x)^be-1))^(-th))
}

rdf_wwy <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
(alpha*be*th*lamb^th*(alpha*x)^(be-1)*(exp((alpha*x)^be)-1)^(-(th+1))*exp((alpha*x)
}

#----- Weibull Weibull Z-----#

pdf_wwz <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
alpha*be*th*lamb^th*(alpha*x)^(be-1)*(exp((alpha*x)^be)-1)^(th-1)
*exp((alpha*x)^be-lamb^th*(exp((alpha*x)^be)-1)^th)
}

cdf_wwz <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
1-exp(-lamb^th*(exp((alpha*x)^be)-1)^th)
}

sdf_wwz <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]

```

```

    th = par[4]
exp(-lamb^th*(exp((alpha*x)^be)-1)^th)
}

rdf_wvz <- function(par,x){
  alpha=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
alpha*be*th*lamb^th*(alpha*x)^(be-1)*(exp((alpha*x)^be)-1)^(th-1)
*exp((alpha*x)^be)
}

#----- Weibull Log-logistica x-----#

pdf_wllx <- function(par,x){
  alfa = par[1]
  be=par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
(be*th*lamb*exp(-(lamb*log(1+(x/alfa)^be))^th)*(x/alfa)^(be-1)
*(lamb*log(1+(x/alfa)^be))^(th-1)) / (alfa*(1+(x/alfa)^be))
}

cdf_wllx <- function(par,x){
  alfa = par[1]
  be=par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
1-exp(-(lamb*log(1+(x/alfa)^be))^th)
}

sdf_wllx <- function(par,x){
  alfa = par[1]
  be=par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
exp(-(lamb*log(1+(x/alfa)^be))^th)
}

```

```

rdf_wllx <- function(par,x){
  alfa = par[1]
  be=par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  (be*th*lamb*(x/alfa)^(be-1)*(lamb*log(1+(x/alfa)^be))^(th-1))/(alfa*(1+(x/alfa)^be)
}

```

#----- Weibull Weibull K-----#

```

pdf_wwk <- function(par,x){
  alfa=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  (th*be*alfa^be*lamb^th*x^(beta-1)*(-log(1-exp(-(alfa*x)^be)))^(th-1)*exp(-(alfa*x)^
}

```

```

cdf_wwk <- function(par,x){
  alfa=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  exp(-lamb^th*(-log(1-exp(-(alfa*x)^be)))^th)
}

```

```

sdf_wwk <- function(par,x){
  alfa=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  1-exp(-lamb^th*(-log(1-exp(-(alfa*x)^be)))^th)
}

```

```

rdf_wwk <- function(par,x){
  alfa=par[1]
  be = par[2]
  lamb = par[3]

```

```

    th = par[4]
    ((alfa*be*th*lamb^th*(alfa)^(be)*x^(beta-1)*(-log(1-exp(-(alfa*x)^be)))^(th-1)*exp(
}

#----- Weibull -----#
# Weibull - Probability density function.
pdf_weib <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  lamb*th*(lamb*x)^(th-1)*exp(-(lamb*x)^th)
}
# Weibull - Cumulative distribution function.
cdf_weib <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  1 - exp(-(lamb*x)^th)
}

#----- Beta Weibull -----#
# Beta Weibull - Probability density function.
pdf_bweib <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  a = par[3]
  b = par[4]
  (th*lamb^th*x^(th-1)*exp(-b*(lamb*x)^th)*(1-exp(-(lamb*x)^th)))/beta(a,b)
}
# Weibull - Cumulative distribution function.
cdf_bweib <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  th = par[2]
  a = par[3]
  b = par[4]
  x = 1 - exp(-(lamb*x)^th)
  pbeta(x,a,b)
}

#----- BGE -----#
pdf_bge <- function(par,x){

```

```

a = par[1]
b = par[2]
alpha = par[3]
lamb = par[4]
g = alpha*lamb * exp(-lamb*x)*(1-exp(-lamb*x))^(alpha-1)
G = (1 - exp(-lamb*x))^alpha
1/beta(a,b)*g*G^(a-1)*(1-G)^(b-1)
}
cdf_bge <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  alpha = par[3]
  lamb = par[4]
  G = (1 - exp(-lamb*x))^alpha
  pbeta(G,a,b)
}

#----- Fretchet -----#
# Fretchet - Probability density function.
pdf_fret <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  sig = par[2]
  lamb*sig^lamb*x^(-(lamb+1))*exp(-(sig/x)^lamb)
}
# Fretchet - Cumulative distribution function.
cdf_fret <- function(par,x){
  lamb = par[1]
  sig = par[2]
  exp(-(sig/x)^lamb)
}

#----- Beta Fretchet -----#
pdf_bfret <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  lamb = par[3]
  sig = par[4]
  g = lamb * sig^lamb * x^(-(lamb+1)) * exp(-(sig/x)^lamb)
}

```

```

    G = exp(-(sig/x)^lamb)
    1/beta(a,b)*g*G^(a-1)*(1-G)^(b-1)
}
cdf_bfret <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  lamb = par[3]
  sig = par[4]
  G = exp(-(sig/x)^lamb)
  pbeta(G,a,b)
}

```

#----- Exponencial Exponenciada -----

```

pdf_eexp <- function(par,x){
  be = par[1]
  alpha =par[2]
  alpha*be*exp(-be*x)*(1-exp(-be*x))^(alpha-1)
}

```

```

cdf_eexp <- function(par,x){
  be = par[1]
  alpha =par[2]
  (1 - exp(-be*x))^alpha
}

```

#----- Pareto Exponenciada -----

```

pdf_pexp <- function(par,x){
  be = par[1]
  alpha =par[2]
  (alpha*be*exp(-be*log(1+x))*(1-exp(-be*log(1+x)))^(alpha-1))/(1+x)
}

```

```

cdf_pexp <- function(par,x){
  be = par[1]
  alpha =par[2]
  (1 - exp(-be*log(1+x)))^alpha
}

```

Algoritmo R utilizado na Seção (4.1.1)

```
library(boot)

mle.boot = function(data, pdfm, cdfm, par, meth, R){
  bs <- function(data, indices) {
    n = length(data)-1
    fit <- goodness.fit(pdf=pdfm, cdf=cdfm,
    starts = par, data = sample(data,n,rep=F),
    method=meth, domain = c(0, Inf),mle=NULL)
    return( fit$mle)
  }
  boot(data=data, statistic=bs,
  R=R, parallel = 'multicore')
}

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/Comandos/Bootstrap')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
x=source('simulacaowllx.txt')$value
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/NovosResultados/Graficos')

u=runif(450,0,1)
alfa=0.3
beta=0.5
lambda=1.2
theta=1.5

par=c(alfa,beta,lambda,theta)

fit <- goodness.fit(pdf=pdf_wllx, cdf=cdf_wllx, starts = par, data = x,
method='B', domain=c(0,Inf),mle=NULL)

fitb = mle.boot(x, pdf_wllx, cdf_wllx,
par, 'N', 10)
p=0
```



```

for(i in 1:length(fitb$t0)) p[i]= mean(fitb$t[,i])

fitc = 2*fitb$t0 - p

lt1 = sum(log(pdf_wllx(par, x)))
lt2 = sum(log(pdf_wllx(fit$mle, x)))
lt3 = sum(log(pdf_wllx(fitb$t0, x)))
lt4 = sum(log(pdf_wllx(p, x)))

AICt1 = - 2*lt1 + 2*4
AICt2 = - 2*lt2 + 2*4
AICt3 = - 2*lt3 + 2*4
AICt4 = - 2*lt4 + 2*4

AICc1 = - 2*lt1 + 2*4*100/(100-4-1)
AICc2 = - 2*lt2 + 2*4*100/(100-4-1)
AICc3 = - 2*lt3 + 2*4*100/(100-4-1)
AICc4 = - 2*lt4 + 2*4*100/(100-4-1)

BICt1 = - 2*lt1 + 4*log(100)
BICt2 = - 2*lt2 + 4*log(100)
BICt3 = - 2*lt3 + 4*log(100)
BICt4 = - 2*lt4 + 4*log(100)

HQICt1 = - 2*lt1 + 2*4*log(log(100))
HQICt2 = - 2*lt2 + 2*4*log(log(100))
HQICt3 = - 2*lt3 + 2*4*log(log(100))
HQICt4 = - 2*lt4 + 2*4*log(log(100))

round(AICt1,3);round(AICt2,3);round(AICt3,3);round(AICt4,3)
round(AICc1,3);round(AICc2,3);round(AICc3,3);round(AICc4,3)
round(BICt1,3);round(BICt2,3);round(BICt3,3);round(BICt4,3);
round(HQICt1,3);round(HQICt2,3);round(HQICt3,3);round(HQICt4,3);

p=matrix(0,5,4)

for(i in 1:nrow(p)){
  fitb = mle.boot(x, pdf_wllx, cdf_wllx,
  par, 'B', 100)
}

```

```

    for(j in 1:ncol(p)) p[i,j]= mean(fitb$t[,j])
  }
round(apply(p, 2, var),10)
var.p = c(1.40180e-06, 5.97100e-07, 4.75980e-06, 2.40512e-05)

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')

postscript('histwllx.eps')
hist(x, freq=F, main= '',ylim=c(0,0.15),xlim=c(0,40),
xlab= 'Dados', ylab='Densidade', cex.lab = 1.5)
curve(pdf_wllx(par,x),add=T,lwd=3)
curve(pdf_wllx(fit$mle,x),add=T,col=2,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wllx(fitb$t0,x),add=T,col=3,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wllx(fitc,x),add=T,col=4,lwd=3, lty=2)
legend('topright',c('Densidade Verdadeira','EMV', 'Bootstrap',
'Boot. Corrigido'), col=1:4, lwd=3, lty = c(1,2,2,2), cex = 1.5)
dev.off()

round(par,3)

round(fit$mle,3)

round(fit$Erro,3)
round(fitb$t0,3)
round(sd(fitb$t[,1]),3);round(sd(fitb$t[,2]),3);
round(sd(fitb$t[,3]),3);round(sd(fitb$t[,4]),3)

round(fitc,3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,1])+var.p[1]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,2])+var.p[2]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,3])+var.p[3]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,4])+var.p[4]),3)

cdf= function(par,x) cdf_wllx(par, x)
data = x
#parameters = par
#parameters = fit$mle
#parameters = fitb$t0
parameters = fitc

```

```

data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}

A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(W_star,4)
round(A_star,4)
KS

```

Algoritmo Utilizado na Seção 4.1.2

```

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/Comandos/Bootstrap')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
x=source('simulacaowwk.txt')$value
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/NovosResultados/Graficos')

u=runif(450,0,1)
alfa=0.6
beta=0.8
lambda=1.5
theta=1

```

```

par=c(alfa,beta,lambda,theta)

fit <- goodness.fit(pdf=pdf_wwk, cdf=cdf_wwk, starts = par, data = x,
method='B', domain=c(0,Inf),mle=NULL)

fitb = mle.boot(x, pdf_wwk, cdf_wwk,
par, 'N', 10)

p=0

for(i in 1:length(fitb$t0)) p[i]= mean(fitb$t[,i])

fitc = 2*fitb$t0 - p

lt1 = sum(log(pdf_wwk(par, x)))
lt2 = sum(log(pdf_wwk(fit$mle, x)))
lt3 = sum(log(pdf_wwk(fitb$t0, x)))
lt4 = sum(log(pdf_wwk(p, x)))

AICt1 = - 2*lt1 + 2*4
AICt2 = - 2*lt2 + 2*4
AICt3 = - 2*lt3 + 2*4
AICt4 = - 2*lt4 + 2*4

AICc1 = - 2*lt1 + 2*4*100/(100-4-1)
AICc2 = - 2*lt2 + 2*4*100/(100-4-1)
AICc3 = - 2*lt3 + 2*4*100/(100-4-1)
AICc4 = - 2*lt4 + 2*4*100/(100-4-1)

BICt1 = - 2*lt1 + 4*log(100)
BICt2 = - 2*lt2 + 4*log(100)
BICt3 = - 2*lt3 + 4*log(100)
BICt4 = - 2*lt4 + 4*log(100)

HQICt1 = - 2*lt1 + 2*4*log(log(100))
HQICt2 = - 2*lt2 + 2*4*log(log(100))
HQICt3 = - 2*lt3 + 2*4*log(log(100))
HQICt4 = - 2*lt4 + 2*4*log(log(100))

```

```

round(AICt1,3);round(AICt2,3);round(AICt3,3);round(AICt4,3);
round(AICc1,3);round(AICc2,3);round(AICc3,3);round(AICc4,3);
round(BICt1,3);round(BICt2,3);round(BICt3,3);round(BICt4,3);
round(HQICt1,3);round(HQICt2,3);round(HQICt3,3);round(HQICt4,3);
p=matrix(0,5,4)

for(i in 1:nrow(p)){
  fitb = mle.boot(x, pdf_wwk, cdf_wwk,
  par, 'B', 100)
  for(j in 1:ncol(p)) p[i,j]= mean(fitb$t[,j])
}
round(apply(p, 2, var),10)
var.p = c(0.8397334559, 0.0000017542, 3.5685219808, 0.0000107793)

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')
postscript('histwwk.eps')
hist(x, freq=F, main= '',ylim=c(0,0.4),
xlab= 'Dados', ylab='Densidade', cex.lab = 1.5)
curve(pdf_wwk(par,x),add=T,lwd=3)
curve(pdf_wwk(fit$mle,x),add=T,col=2,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wwk(fitb$t0,x),add=T,col=3,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wwk(fitc,x),add=T,col=4,lwd=3, lty=2)
legend('topright',c('Densidade Verdadeira','EMV', 'Bootstrap',
'Boot. Corrigido'), col=1:4, lwd=3, lty = c(1,2,2,2), cex = 1.5)
dev.off()

round(par,3)

round(fit$mle,3)
round(fit$Erro,3)

round(fitb$t0,3)
round(sd(fitb$t[,1]),3);round(sd(fitb$t[,2]),3);
round(sd(fitb$t[,3]),3);round(sd(fitb$t[,4]),3)

round(fitc,3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,1])+var.p[1]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,2])+var.p[2]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,3])+var.p[3]),3)

```

```

round(sqrt(4*var(fitb$t[,4])+var.p[4]),3)

cdf= function(par,x) cdf_wwk(par, x)
data = x

#parameters = par
#parameters = fit$mle
#parameters = fitb$t0
parameters = fitc
data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(W_star,4)
round(A_star,4)
KS

```

Algoritmo Utilizado na Seção 4.1.3

```

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/Comandos/Bootstrap')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
x=source('simulacaowwz.txt')$value
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/NovosResultados/Graficos')

```

```

u=runif(450,0,1)
alfa=0.3
beta=0.5
lambda=1.2
theta=1.5

par=c(alfa,beta,lambda,theta)

fit <- goodness.fit(pdf=pdf_wwz, cdf=cdf_wwz, starts = par, data = x,
method='B', domain=c(0,Inf),mle=NULL)

fitb = mle.boot(x, pdf_wwz, cdf_wwz,
par, 'N', 10)

p=0

for(i in 1:length(fitb$t0)) p[i]= mean(fitb$t[,i])

fitc = 2*fitb$t0 - p

lt1 = sum(log(pdf_wwz(par, x)))
lt2 = sum(log(pdf_wwz(fit$mle, x)))
lt3 = sum(log(pdf_wwz(fitb$t0, x)))
lt4 = sum(log(pdf_wwz(p, x)))

AICt1 = - 2*lt1 + 2*4
AICt2 = - 2*lt2 + 2*4
AICt3 = - 2*lt3 + 2*4
AICt4 = - 2*lt4 + 2*4

AICCt1 = - 2*lt1 + 2*4*100/(100-4-1)
AICCt2 = - 2*lt2 + 2*4*100/(100-4-1)
AICCt3 = - 2*lt3 + 2*4*100/(100-4-1)
AICCt4 = - 2*lt4 + 2*4*100/(100-4-1)

BICt1 = - 2*lt1 + 4*log(100)
BICt2 = - 2*lt2 + 4*log(100)
BICt3 = - 2*lt3 + 4*log(100)

```

```

BICt4 = - 2*lt4 + 4*log(100)

HQICt1 = - 2*lt1 + 2*4*log(log(100))
HQICt2 = - 2*lt2 + 2*4*log(log(100))
HQICt3 = - 2*lt3 + 2*4*log(log(100))
HQICt4 = - 2*lt4 + 2*4*log(log(100))

round(AICt1,3);round(AICt2,3);round(AICt3,3);round(AICt4,3)
round(AICc1,3);round(AICc2,3);round(AICc3,3);round(AICc4,3)
round(BICt1,3);round(BICt2,3);round(BICt3,3);round(BICt4,3);
round(HQICt1,3);round(HQICt2,3);round(HQICt3,3);round(HQICt4,3);

p=matrix(0,5,4)

for(i in 1:nrow(p)){
  fitb = mle.boot(x, pdf_wwz, cdf_wwz,
  par, 'B', 100)
  for(j in 1:ncol(p)) p[i,j]= mean(fitb$t[,j])
}
round(apply(p, 2, var),10)
var.p = c(1.74290e-06, 1.82230e-06, 1.58491e-05, 9.51600e-06)

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')

postscript('histwwz.eps')
hist(x, freq=F, main= '',ylim=c(0,0.3),
xlab= 'Dados', ylab='Densidade', cex.lab = 1.5)
curve(pdf_wwz(par,x),add=T,lwd=3)
curve(pdf_wwz(fit$mle,x),add=T,col=2,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wwz(fitb$t0,x),add=T,col=3,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wwz(fitc,x),add=T,col=4,lwd=3, lty=2)
legend('topright',c('Densidade Verdadeira','EMV', 'Bootstrap',
'Boot. Corrigido'), col=1:4, lwd=3, lty = c(1,2,2,2), cex = 1.5)
dev.off()

round(par,3)

round(fit$mle,3)
round(fit$Erro,3)

```



```

round(fitb$t0,3)
round(sd(fitb$t[,1]),3);round(sd(fitb$t[,2]),3);
round(sd(fitb$t[,3]),3);round(sd(fitb$t[,4]),3)

round(fitc,3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,1])+var.p[1]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,2])+var.p[2]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,3])+var.p[3]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,4])+var.p[4]),3)

cdf= function(par,x) cdf_wwz(par, x)
data = x
parameters = par
#parameters = fit$mle
#parameters = fitb$t0
#parameters = fitc
data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
for(i in 1:n) if(v[i]>0.9999999999) v[i]=0.9999999999
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(W_star,4)
round(A_star,4)
KS

```

Algoritmo Utilizado na Seção 4.1.4

```
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/Comandos/Bootstrap')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
x=source('simulacaowwy.txt')$value
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/Tese/TeseNova/NovosResultados/Graficos')

u=runif(450,0,1)
alfa=0.3
beta=0.5
lambda=1.2
theta=1.5

par=c(alfa,beta,lambda,theta)
fit <- goodness.fit(pdf=pdf_wwy, cdf=cdf_wwy, starts = par, data = x,
method='B', domain=c(0,Inf),mle=NULL)

fitb = mle.boot(x, pdf_wwy, cdf_wwy,
par, 'N', 10)

p=0

for(i in 1:length(fitb$t0)) p[i]= mean(fitb$t[,i])

fitc = 2*fitb$t0 - p

lt1 = sum(log(pdf_wwy(par, x)))
lt2 = sum(log(pdf_wwy(fit$mle, x)))
lt3 = sum(log(pdf_wwy(fitb$t0, x)))
lt4 = sum(log(pdf_wwy(p, x)))

AICt1 = - 2*lt1 + 2*4
AICt2 = - 2*lt2 + 2*4
AICt3 = - 2*lt3 + 2*4
AICt4 = - 2*lt4 + 2*4
```

```

AICct1 = - 2*lt1 + 2*4*100/(100-4-1)
AICct2 = - 2*lt2 + 2*4*100/(100-4-1)
AICct3 = - 2*lt3 + 2*4*100/(100-4-1)
AICct4 = - 2*lt4 + 2*4*100/(100-4-1)

BICt1 = - 2*lt1 + 4*log(100)
BICt2 = - 2*lt2 + 4*log(100)
BICt3 = - 2*lt3 + 4*log(100)
BICt4 = - 2*lt4 + 4*log(100)

HQICt1 = - 2*lt1 + 2*4*log(log(100))
HQICt2 = - 2*lt2 + 2*4*log(log(100))
HQICt3 = - 2*lt3 + 2*4*log(log(100))
HQICt4 = - 2*lt4 + 2*4*log(log(100))

round(AICt1,3);round(AICt2,3);round(AICt3,3);round(AICt4,3)
round(AICct1,3);round(AICct2,3);round(AICct3,3);round(AICct4,3)
round(BICt1,3);round(BICt2,3);round(BICt3,3);round(BICt4,3);
round(HQICt1,3);round(HQICt2,3);round(HQICt3,3);round(HQICt4,3);

p=matrix(0,5,4)

for(i in 1:nrow(p)){
  fitb = mle.boot(x, pdf_wwy, cdf_wwy,
  par, 'B', 100)
  for(j in 1:ncol(p)) p[i,j]= mean(fitb$t[,j])
}
round(apply(p, 2, var),10)
var.p = c(0.0036019503, 0.0000067422, 0.0051043359, 0.0000025213)

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')

postscript('histwwy.eps')
hist(x, freq=F, main= '',ylim=c(0,0.3),xlim=c(0,30),
xlab= 'Dados', ylab='Densidade', cex.lab = 1.5)
curve(pdf_wwy(par,x),add=T,lwd=3)
curve(pdf_wwy(fit$mle,x),add=T,col=2,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wwy(fitb$t0,x),add=T,col=3,lwd=3, lty=2)
curve(pdf_wwy(fitc,x),add=T,col=4,lwd=3, lty=2)

```

```

legend('topright',c('Densidade Verdadeira','EMV', 'Bootstrap',
'Boot. Corrigido'), col=1:4, lwd=3, lty = c(1,2,2,2), cex = 1.5)
dev.off()

```

```

round(par,3)

```

```

round(fit$mle,3)
round(fit$Erro,3)

```

```

round(fitb$t0,3)
round(sd(fitb$t[,1]),3);round(sd(fitb$t[,2]),3);
round(sd(fitb$t[,3]),3);round(sd(fitb$t[,4]),3)

```

```

round(fitc,3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,1])+var.p[1]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,2])+var.p[2]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,3])+var.p[3]),3)
round(sqrt(4*var(fitb$t[,4])+var.p[4]),3)

```

```

cdf= function(par,x) cdf_wwy(par, x)
data = x
#parameters = par
#parameters = fit$mle
#parameters = fitb$t0
parameters = fitc
data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)

```

```
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(W_star,4)
round(A_star,4)
KS
```

Código R Utilizado na Aplicação 2

Algoritmo Utilizado na Seção 4.2

```
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
data = x = source('CarbonFibre1.txt')$value

par = c(1,1,1,1)
fitwllx = mle.boot(x, pdf_wllx, cdf_wllx, par, 'C', 100)
llwllx = sum(log(pdf_wllx(fitwllx$t0, x)))

par = c(1,1,1,1)
fitbge = mle.boot(x, pdf_bge, cdf_bge,
par, 'C', 100)
llbge = sum(log(pdf_bge(fitbge$t0, x)))

par = c(1,1)
fitfret = mle.boot(x, pdf_fret, cdf_fret, par, 'C', 100)
llfret = sum(log(pdf_fret(fitfret$t0, x)))

par = c(1,1,1,1)
```

```

fitbfret = mle.boot(x, pdf_bfret, cdf_bfret,par, 'C', 100)
llbfret = sum(log(pdf_bfret(fitbfret$t0, x)))

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')

postscript('aplicacaoCarbonFibre2WLLX.eps',horizontal=FALSE)
hist(x,freq=F,main='', ylab = 'Densidade',ylim=c(0,0.5))
curve(pdf_wllx(fitwllx$t0, x), add=T, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_bge(fitbge$t0, x),add=T,col=2, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_fret(fitfret$t0, x),add=T,col=3, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_bfret(fitbfret$t0, x),add=T,col=4, lty=1, lwd = 2)
legend('topright',c('WLLX', 'BGE', 'F', 'BF'),
col=c(1,2,3,4),lty=1,lwd=2, cex=1.5)
dev.off()

AICwllx = - 2*llwllx + 2*4
AICbge = - 2*llbge + 2*4
AICfret = - 2*llfret + 2*2
AICbfret = - 2*llbfret + 2*4

AICcwllx = - 2*llwllx + 2*4*63/(63-4-1)
AICcbge = - 2*llbge + 2*4*63/(63-2-1)
AICcfret = - 2*llfret + 2*2*63/(63-2-1)
AICcbfret = - 2*llbfret + 2*4*63/(63-2-1)

BICwllx = - 2*llwllx + 4*log(63)
BICbge = - 2*llbge + 4*log(63)
BICfret = - 2*llfret + 2*log(63)
BICbfret = - 2*llbfret + 4*log(63)

HQICwllx = - 2*llwllx + 2*4*log(log(63))
HQICbge = - 2*llbge + 2*4*log(log(63))
HQICfret = - 2*llfret + 2*2*log(log(63))
HQICbfret = - 2*llbfret + 2*4*log(log(63))

c(AICwllx,AICbge,AICfret,AICbfret)
c(AICcwllx,AICcbge,AICcfret,AICcbfret)
c(BICwllx, BICbge,BICfret,BICbfret)
c(HQICwllx,HQICbge,HQICfret,HQICbfret)

```

```

round(fitwllx$t0,4);round(fitbge$t0,4);round(fitfret$t0,4);round(fitbfret$t0,4)
round(apply(fitwllx$t,2,sd),4)
round(apply(fitbge$t,2,sd),4)
round(apply(fitfret$t,2,sd),4)
round(apply(fitbfret$t,2,sd),4)

parameters = fitwllx$t0
cdf= function(par,x) cdf_wllx(par, x)

parameters = fitbge$t0
cdf= function(par,x) cdf_bge(par, x)

parameters = fitfret$t0
cdf= function(par,x) cdf_fret(par, x)

parameters = fitbfret$t0
cdf= function(par,x) cdf_bfret(par, x)

data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(A_star,4)
round(W_star,4)

```


KS

Código R Utilizado na Aplicação 3

Algoritmo Utilizado na Seção 4.3

```
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
data = x = source('GlassFibres.txt')$value

par = c(1,1,1,1)
fitwwk = mle.boot(x, pdf_wwk, cdf_wwk,
par, 'C', 100)
llwwk = sum(log(pdf_wwk(fitwwk$t0, x)))

par = c(1,1,1,1)
fitbge = mle.boot(x, pdf_bge, cdf_bge,
par, 'C', 100)
llbge = sum(log(pdf_bge(fitbge$t0, x)))

par = c(1,1)
fitfret = mle.boot(x, pdf_fret, cdf_fret,par, 'C', 100)
llfret = sum(log(pdf_fret(fitfret$t0, x)))
```

```

par = c(1,1,1,1)
fitbfret = mle.boot(x, pdf_bfret, cdf_bfret,par, 'C', 100)
llbfret = sum(log(pdf_bfret(fitbfret$t0, x)))

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')

postscript('aplicacaoGlassFibresWWK.eps',horizontal=FALSE)
hist(x,freq=F,main='', ylab = 'Densidade',ylim=c(0,2),xlim=c(0,2.5))
curve(pdf_wwk(fitwwk$t0, x), add=T, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_bge(fitbge$t0, x),add=T,col=2, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_fret(fitfret$t0, x),add=T,col=3, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_bfret(fitbfret$t0, x),add=T,col=4, lty=1, lwd = 2)
legend('topright',c('WWK', 'BGE', 'F', 'BF'),
col=c(1,2,3,4),lty=1,lwd=2, cex=1.5)
dev.off()

AICwwk = - 2*llwwk + 2*4
AICbge = - 2*llbge + 2*4
AICfret = - 2*llfret + 2*2
AICbfret = - 2*llbfret + 2*4

AICCwwk = - 2*llwwk + 2*4*63/(63-4-1)
AICCbge = - 2*llbge + 2*4*63/(63-4-1)
AICCFret = - 2*llfret + 2*2*63/(63-2-1)
AICCBfret = - 2*llbfret + 2*4*63/(63-4-1)

BICwwk = - 2*llwwk + 4*log(63)
BICbge = - 2*llbge + 4*log(63)
BICfret = - 2*llfret + 2*log(63)
BICbfret = - 2*llbfret + 4*log(63)

HQICwwk = - 2*llwwk + 2*4*log(log(63))
HQICbge = - 2*llbge + 2*4*log(log(63))
HQICfret = - 2*llfret + 2*2*log(log(63))
HQICbfret = - 2*llbfret + 2*4*log(log(63))

c(AICwwk, AICbge,AICfret,AICbfret)
c(AICCwwk,AICCbge,AICCFret,AICCBfret)
c(BICwwk, BICbge,BICfret,BICbfret)

```

```

c(HQICwwk,HQICbge,HQICfret,HQICbfret)

round(fitww$t0,4);round(fitbge$t0,4);round(fitfret$t0,4);round(fitbfret$t0,4)
round(apply(fitww$t,2,sd),4)
round(apply(fitbge$t,2,sd),4)
round(apply(fitfret$t,2,sd),4)
round(apply(fitbfret$t,2,sd),4)

parameters = fitww$t0
cdf= function(par,x) cdf_wwk(par, x)

parameters = fitbge$t0
cdf= function(par,x) cdf_bge(par, x)

parameters = fitfret$t0
cdf= function(par,x) cdf_fret(par, x)

parameters = fitbfret$t0
cdf= function(par,x) cdf_bfret(par, x)

data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(A_star,4)

```

```
round(W_star,4)
```

```
KS
```

Código R Utilizado na Aplicação 4

Algoritmo Utilizado na Seção 4.4

```
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
data = x = source('ChickenPox.txt')$value

par = c(.5,.5,.5,.5)
fitwwz = mle.boot(x, pdf_wwz, cdf_wwz,
par, 'C', 100)
llwwz = sum(log(pdf_wwz(fitwwz$t0, x)))

par = c(1,1)
fitweib = mle.boot(x, pdf_weib, cdf_weib,par, 'C', 100)
llweib = sum(log(pdf_weib(fitweib$t0, x)))

par = c(1,1,1,1)
fitbge = mle.boot(x, pdf_bge, cdf_bge,
par, 'C', 100)
llbge = sum(log(pdf_bge(fitbge$t0, x)))
```

```

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')

postscript('aplicacaoWWZ.eps',horizontal=FALSE)
hist(x,freq=F,main='', ylab = 'Densidade',ylim=c(0,1.2))
curve(pdf_wwz(fitwwz$t0, x), add=T, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_weib(fitweib$t0, x),add=T, col=2, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_bge(fitbge$t0, x),add=T,col=3, lty=1, lwd = 2)
legend('topright',c('WWZ', 'W', 'BGE'),
col=c(1,2,3),lty=1,lwd=2, cex=1.5)
dev.off()

AICwwz = - 2*llwwz + 2*4
AICweib = - 2*llweib + 2*2
AICbge = - 2*llbge + 2*4

AICCwwz = - 2*llwwz + 2*4*63/(63-3-1)
AICCweib = - 2*llweib + 2*2*63/(63-2-1)
AICCbge = - 2*llbge + 2*4*63/(63-4-1)

BICwwz = - 2*llwwz + 4*log(63)
BICweib = - 2*llweib + 2*log(63)
BICbge = - 2*llbge + 4*log(63)

HQICwwz = - 2*llwwz + 2*4*log(log(63))
HQICweib = - 2*llweib + 2*2*log(log(63))
HQICbge = - 2*llbge + 2*4*log(log(63))

c(AICwwz, AICweib, AICbge)
c(AICCwwz, AICCweib,AICCbge)
c(BICwwz, BICweib,BICbge)
c(HQICwwz, HQICweib,HQICbge)

round(fitwwz$t0,4);round(fitweib$t0,4);round(fitbge$t0,4)
round(apply(fitwwz$t,2,sd),4)
round(apply(fitweib$t,2,sd),4)
round(apply(fitbge$t,2,sd),4)

parameters = fitwwz$t0
cdf= function(par,x) cdf_wwz(par, x)

```

```

parameters = fitweib$t0
cdf= function(par,x) cdf_weib(par, x)

parameters = fitbge$t0
cdf= function(par,x) cdf_bge(par, x)

data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(A_star,4)
round(W_star,4)
KS

```


Código R Utilizado na Aplicação 5

Algoritmo Utilizado na Seção 4.5

```
setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais')
library(AdequacyModel)
source('pdfs.txt')
source('bootstrapping.txt')
data = x = source('CarbonFibre2.txt')$value

par = c(1,1,1,1)
fitwwy = mle.boot(x, pdf_wwy, cdf_wwy,
par, 'B', 100)
llwwy = sum(log(pdf_wwy(fitwwy$t0, x)))

par = c(1,1)
fiteexp = mle.boot(x, pdf_eexp, cdf_eexp,par, 'B', 100)
lleexp = sum(log(pdf_eexp(fiteexp$t0, x)))

par = c(1,1)
fitweib = mle.boot(x, pdf_weib, cdf_weib,par, 'B', 100)
llweib = sum(log(pdf_weib(fitweib$t0, x)))

par = c(1,1)
```

```

fitpexp = mle.boot(x, pdf_pexp, cdf_pexp,par, 'B', 100)
llpexp = sum(log(pdf_pexp(fitpexp$t0, x)))

setwd('C:/Users/Patricia/Dropbox/Patricia/TeseFinal/ResultadosFinais/graficos')

postscript('aplicacaoCarbonFibre2WWY.eps',horizontal=FALSE)
hist(x,freq=F,main='', ylab = 'Densidade',ylim=c(0,0.8))
curve(pdf_wwy(fitwwy$t0, x), add=T, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_weib(fitweib$t0, x),add=T,col=2, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_eexp(fiteexp$t0, x),add=T,col=3, lty=1, lwd = 2)
curve(pdf_pexp(fitpexp$t0, x),add=T,col=4, lty=1, lwd = 2)
legend('topright',c('WWY', 'W', 'EE', 'PE'),
col=c(1,2,3,4),lty=1,lwd=2, cex=1.5)
dev.off()

AICwwy = - 2*llwwy + 2*4
AICeexp = - 2*lleexp + 2*2
AICweib = - 2*llweib + 2*2
AICpexp = - 2*llpexp + 2*2

AICCwwy = - 2*llwwy + 2*4*63/(63-4-1)
AICCeexp = - 2*lleexp + 2*2*63/(63-2-1)
AICCweib = - 2*llweib + 2*2*63/(63-2-1)
AICCpexp = - 2*llpexp + 2*2*63/(63-2-1)

BICwwy = - 2*llwwy + 4*log(63)
BICeexp = - 2*lleexp + 2*log(63)
BICweib = - 2*llweib + 2*log(63)
BICpexp = - 2*llpexp + 2*log(63)

HQICwwy = - 2*llwwy + 2*4*log(log(63))
HQICeexp = - 2*lleexp + 2*2*log(log(63))
HQICweib = - 2*llweib + 2*2*log(log(63))
HQICpexp = - 2*llpexp + 2*2*log(log(63))

c(AICwwy, AICeexp,AICweib,AICpexp)
c(AICCwwy,AICCeexp,AICCweib,AICCpexp)
c(BICwwy, BICeexp,BICweib,BICpexp)
c(HQICwwy,HQICeexp,HQICweib,HQICpexp)

```

```

round(fitwvy$t0,4);round(fitweib$t0,4);round(fiteexp$t0,4);round(fitpexp$t0,4)
round(apply(fitwvy$t,2,sd),4)
round(apply(fitweib$t,2,sd),4)
round(apply(fiteexp$t,2,sd),4)
round(apply(fitpexp$t,2,sd),4)

parameters = fitwvy$t0
cdf= function(par,x) cdf_wvy(par, x)
parameters = fitweib$t0
cdf= function(par,x) cdf_weib(par, x)
parameters = fiteexp$t0
cdf= function(par,x) cdf_eexp(par, x)
parameters = fitpexp$t0
cdf= function(par,x) cdf_rexp(par, x)

data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)
p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
round(A_star,4)
round(W_star,4)
KS

```