

Marcela Portela Santos de Figueiredo

**COMPOSIÇÃO GENERALIZADA GERADORA DE MODELOS DE
CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO APLICADOS ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS**

Recife

30 de novembro de 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PPG EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

**COMPOSIÇÃO GENERALIZADA GERADORA DE MODELOS DE
CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO APLICADOS ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS**

Tese julgada aprovada para obtenção do título de Doutora em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada em 30/11/2023 pela comissão examinadora

Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Rocha Moreira
Coorientadores: Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito e Prof. Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva.

Recife

30 de novembro de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F475c

Figueiredo, Marcela Portela Santos de
COMPOSIÇÃO GENERALIZADA GERADORA DE MODELOS DE CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO
APLICADOS ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS / Marcela Portela Santos de Figueiredo. - 2023.
131 f. : il.

Orientador: Guilherme Rocha Moreira.
Coorientador: Cicero Carlos Ramos de Brito.
Inclui referências e apêndice(s).

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Recife, 2024.

1. Modelos não-lineares. 2. Crescimento animal. 3. Técnica de produção de gás in vitro. 4. Composição de modelos.
5. Pontos influentes. I. Moreira, Guilherme Rocha, orient. II. Brito, Cicero Carlos Ramos de, coorient. III. Título

CDD 519.5

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO PRÓ-REITORIA DE
PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**COMPOSIÇÃO GENERALIZADA GERADORA DE MODELOS DE
CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO APLICADOS ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS**

Marcela Portela Santos de Figueiredo

Tese julgada aprovada para obtenção do título de
Doutora em Biometria e Estatística Aplicada,
defendida e aprovada em 30/11/2023 pela comissão
examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Guilherme Rocha Moreira

Banca examinadora:

Prof. Dr. João de Andrade Dutra Filho UFPE

Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito IFPE

Prof. Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva UFRPE-DEINFO

Prof. Dr. Josimar Mendes de Vasconcelos UFRPE-DEINFO

Agradecimentos

Agradeço à Deus e à igreja que ora por mim, minha mãe Suely, meu pai Rodolfo, meu marido André, minha filha Helena, minha avó Ridete, meus falecidos avô Pinto e avô Paulo, e a todos os familiares que contribuíram para a minha formação profissional e pessoal. Agradeço também ao meu orientador prof. Dr. Guilherme Rocha Moreira, aos meus co-orientadores Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito e prof. Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva por acreditarem em meu potencial e me ajudarem a desenvolver este trabalho. Agradeço também ao programa de Pós-graduação em Biometria e Estatística Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco que me acolheu nos meus estudos de doutorado. Agradeço também ao professor Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira, que me recebeu no programa de pós-graduação, sem ele não estaria aqui. Também agradeço ao professor Dr. Wilson Rosa de Oliveira Jr. pela sua amizade e contribuição na minha formação acadêmica. Agradeço também aos meus colegas de doutorado Keroline, Eduardo, Laura, Denise e Joelma pelas ótimas lembranças de passar por este curso de pós-graduação com vocês. Agradeço a todos os professores que contribuíram com minha formação por toda minha vida, desde minha infância. Agradeço também aos meus colegas de trabalho, e à direção da escola em que ensino pelo apoio e confiança. Agradeço à Capes pelo curto período de financiamento. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Quanto melhor é adquirir a sabedoria do que o ouro! E quanto mais excelente, adquirir a prudência do que a prata!”(Provérbios 16:16)

Resumo

Os objetivos deste trabalho foram: Generalizar o método de Santos et al (2019), acrescentando a operação de composição de funções ao método e criar novos modelos aplicados a dados das ciências agrárias. O primeiro capítulo trata-se de uma revisão de literatura relacionada aos modelos de crescimento aplicados ao crescimento animal e à cinética de gases produzidos pela técnica *in vitro*. No segundo capítulo foi desenvolvida a generalização do método de Santos et al. (2019), acrescentando a operação de composição de funções. Apresentou-se um novo model unicompartmental, criado pela composição do modelo Brody com o de von Bertalanffy, que foi aplicado a dados de crescimento animal de frangos machos da raça Atenas-Canadá. A estimação dos parâmetros foi feita pelo método dos mínimos quadrados do software R®, por meio da função *nls* que utiliza o algoritmo de Levenberg-Marquardt. O modelo proposto foi comparado aos modelos: Logístico, Brody, Von Bertalanffy, Gompertz, Richards, através dos critérios de qualidade de ajuste Coeficiente de Determinação Ajustado R_{aj}^2 , Quadrado Médio do Resíduo (QMR), Critério de Informação de Akaike (AIC) e Desvio Médio Absoluto (DMA), Critério de Informação Baysiano (BIC), Penalizando adaptativamente a Verossimilhança (PAV) e Capacidade preditiva do modelo (p) para definir o melhor modelo. O modelo proposto foi o mais adequado para ajustar os dados dos galos da raça Atenas-Canadá. Logo, este trabalho contribuiu, acrescentando a operação de composição. Além disso, o modelo gerado por este método é eficaz para ajustar dados de frangos da raça Atenas-Canadá. No terceiro capítulo da tese foram deduzidos e calculados os tempos para alcançar os pontos influentes do modelo Logístico modificado (Shofiel, Pitt e Pell, 1994) e aplicados à produção de gás de 7 dietas experimentais. Esses tempos foram calculados para cada compartimento do modelo logístico bicompartimental que foi utilizado para modelar o fenômeno. Os tempos dos pontos influentes se mostraram importantes para interpretar biologicamente o fenômeno estudado. As dietas: semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa, semi-simplificada com base em feno de alfafa e simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa apresentaram bons resultados e são alternativas à dieta de referência para alimentar coelhos da raça Nova Zelândia.

Palavras-chave: Modelos não-lineares; crescimento animal; técnica de produção de gás *in vitro*; composição de modelos; pontos influentes.

Abstract

The objectives of this work were: To generalize the method of Santos et al (2019), adding the operation of function composition to the method and to create new models applied to agricultural science data. The first chapter is a literature review related to growth models applied to animal growth and the kinetics of gases produced by the *in vitro* technique. In the second chapter, the generalization of the method by Santos et al. (2019), adding the function composition operation. A new unicompartamental model was presented, created by the composition of the Brody model with that of Von Bertalanffy, which was applied to animal growth data of male chickens of the Antenas-Canada breed. The parameters were estimated using the least squares method of the R® software, using the *nls* function that uses the Levenberg-Marquardt algorithm. The proposed model was compared to the models: Logistic, Brody, von Bertalanffy, Gompertz, Richards, through the criteria of goodness of fit Adjusted Coefficient of Determination R_{aj}^2 , Mean Square of the Residue (MSR), Information Criterion of Akaike (AIC) and Mean Absolute Deviation (MAD), Bayesian Information Criterion (BIC), Adaptively Penalizing Likelihood (PAL) and Model Predictive Ability (ρ) to define the best model. The proposed model was the most adequate to fit the data of Athens Canadian Random Bred cockerels . Therefore, this work contributed, adding the composition operation. Furthermore, the model generated by this method is effective to fit data from Athens-Canada chickens. In the third chapter of the thesis, the times to reach the • Influential points of the modified Logistic model (Shofiel, Pitt, and Pell, 1994) were deduced and calculated and applied to the gas production of 7 experimental diets. These times were calculated for each compartment of the two-compartmental logistic model that was used to model the phenomenon. The times of the influential points proved to be important for biologically interpreting the studied phenomenon. The diets: semi-simplified based on a mixture of cassava leaf flour and alfalfa hay, semi-simplified based on alfalfa hay, and simplified based on a mixture of cassava leaf flour and alfalfa hay showed good results and are alternatives to the reference diet for feeding New Zealand rabbits.

Keywords: Non-linear models; Animal growth; *In vitro* gas production technique; Model composition ; Influential points.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Curvas de crescimento de frangos da raça Atenas-Canadá ao longo do tempo do experimento, baseadas nos dados observados	45
Figura 2: Produção de gás para as dietas T1 a T7.	60
Figura 3: T1-CNF: Primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 4a); T1-CF: Segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 4b); T1: Modelo LB completo (Figura 4c)	62
Figura 4: Primeira derivada (d1) da dieta T1. T1-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 5a); T1-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF(Figura 5b); T1: d1 do modelo LB completo (Figura 5c).....	63
Figura 5: Segunda derivada (d2) da dieta T1. T1-CNF: d2 do primeiro compartimento do modelo LB que modela os CNF (Figura 5a); T1-CF: d2 do segundo compartimento do modelo LB que se ajusta aos CF (Figura 5b);. T1: d2 do modelo LB total, que modela os dois compartimentos ao mesmo tempo (os dois tipos de carboidratos) (Figura 5c).....	65
Figura 6:Terceira derivada (d3) da dieta T1. T1-CNF: d3 do primeiro compartimentodo LB, referente à CNF (Figura 6a); T1-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 6b); T1 : d3 do modelo LB (Figura 6c)	66
Figura 7: Quarta derivada (d4) da dieta T1. T1-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 7a); T1-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 7b); T1 : d4 do modelo LB (Figura 7c)	67
Figura 8:T1-CNF: Cálculo do PDA dos CNF e dos CF. Primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 8a); T1-CF: Segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 8b); T1: Modelo LB completo (Figura 8c).....	68
Figura 9: Comparação da Primeira Derivada (d1) de todas as dietas, T1-T7. No gráfico dos CNF foi utilizada a média móvel com janela de 6 h.	72
Figura 10:Primeira derivada (d1) da dieta T2. T2-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d1 do modelo LB completo.	101
Figura 11:Primeira derivada (d1) da dieta T3. T3-CNF: D1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d1 do modelo LB completo.	102
Figura 12:Primeira derivada (d1) da dieta T4. T4-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d1 do modelo LB completo.	103
Figura 13:Primeira derivada (d1) da dieta T5. T5-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d1 do modelo LB completo.	104
Figura 14:Primeira derivada (d1) da dieta T6. T6-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d1 do modelo LB completo.	105
Figura 15: Primeira derivada (d1) da dieta T7. T7-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d1 do modelo LB completo.	106
Figura 16:Segunda derivada (d2) da dieta T2. T2-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d2 do modelo LB completo.	107
Figura 17:Segunda derivada (d2) da dieta T3. T3-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d2 do modelo LB completo.	108

Figura 18:Segunda derivada (d2) da dieta T4. T4-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d2 do modelo LB completo.	109
Figura 19:Segunda derivada (d2) da dieta T5. T5-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d2 do modelo LB completo.	110
Figura 20:Segunda derivada (d2) da dieta T6. T6-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d2 do modelo LB completo.	111
Figura 21:Segunda derivada (d2) da dieta T7. T7-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d2 do modelo LB completo.	112
Figura 22:Terceira derivada (d3) da dieta T2. T2-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d3 do modelo LB completo.	113
Figura 23:Terceira derivada (d3) da dieta T3. T3-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d3 do modelo LB completo.	114
Figura 24:Terceira derivada (d3) da dieta T4. T4-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d3 do modelo LB completo.	115
Figura 25:Terceira derivada (d3) da dieta T5. T5-CNF: D3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d3 do modelo LB completo.	116
Figura 26:Terceira derivada (d3) da dieta T6. T6-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d3 do modelo LB completo.	117
Figura 27:Terceira derivada (d3) da dieta T7. T7-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d3 do modelo LB completo.	118
Figura 28: Quarta derivada (d4) da dieta T2. T2-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d4 do modelo LB completo.	119
Figura 29:Quarta derivada (d4) da dieta T3. T3-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d4 do modelo LB completo.	120
Figura 30:Quarta derivada (d4) da dieta T4. T4-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d4 do modelo LB completo.	121
Figura 31:Quarta derivada (d4) da dieta T5. T5-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d4 do modelo LB completo.	122
Figura 32:Quarta derivada (d4) da dieta T6. T6-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d4 do modelo LB completo.	123
Figura 33:Quarta derivada (d4) da dieta T7. T7-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d4 do modelo LB completo.	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Modelos obtidos a partir da equação (1)	20
Tabela 2 - Primeiros Modelos Bifásicos.....	27
Tabela 3: Média do peso (g) de frangos machos da raça Antenas-Canadá através do experimento.*	36
Tabela 4:Principais modelos unicompartmentais descritos na literatura.	40
Tabela 5:Avaliadores de qualidade de ajuste.	41
Tabela 6:Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson, Breusch-Pagan e seus respectivos p-valores aplicados aos resíduos dos modelos: Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy, Brody, Richards e o modelo Proposto ajustados aos dados de frangos da raça Atenas-Canadá.....	43
Tabela 7:Parâmetros estimados e medidas de ajuste dos modelos utilizados para estimar o peso de frangos em gramas (g).	44
Tabela 8:Composição percentual das dietas experimentais oferecidas aos coelhos doadores de inóculo cecal.	52
Tabela 9:Dados observados da Produção de Gás referentes às dietas T1 a T7	54
Tabela 10:Valor dos parâmetros para o modelo LB estimados a partir dos dados das dietas T1 a T7 e critérios de qualidade de ajuste de cada modelo.....	58
Tabela 11: Cálculo teórico do tempo para se atingir os pontos críticos para as 7 dietas , T1-T7, t em h e Y em mL	69
Tabela 12: Tempo para alcançar os pontos críticos observados para as 7 dietas, T1-T7	69
Tabela 13: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Inflexão (t_{PI}) real e teórico.....	70
Tabela 14: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Aceleração Máxima (t_{PAM}) real e teórico	73
Tabela 15: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Desaceleração Máxima t_{PDM} real e teórico	74
Tabela 16: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Desaceleração Assintótica t_{PDA} real e teórico	75

SUMÁRIO

Introdução Geral	14
Justificativa.....	17
Objetivo Geral	17
Objetivos Específicos	18
Estrutura do Trabalho	18
Capítulo 1: Referencial Teórico	19
1.1 Modelos de Crescimento Animal	19
1.1.1 Modelo Pütter-Bertalanffy.....	19
1.1.2 Modelo de Orçamento de Energia	21
1.1.3 Modelo de crescimento ontogenético (OGM)	22
1.3.4 Modelo de crescimento estocástico Ontogenético (SOGM)	23
1.3.5 Modelo de Cao et al. (2019)	24
1.3.5 Modelo de crescimento iterativo (IGM)	24
1.3.6 Modelo Dos Santos et al. (2018)	25
1.2 Modelos de Cinética Ruminal	25
1.2.1 Modelo de Ørskov e Mcdonald	25
1.2.2 Modelo de France	26
1.2.3 Logístico Bifásico, Gompertz Bifásico e Exponencial Bifásico	26
1.2.4 Modelo de Michaelis-Menten.....	27
1.2.5 Modelo Exponencial Logístico.....	27
1.2.6 Modelo Salmerón (2021).....	28
1.2.7 Modelo Bertalanffy-Gompertz Bicompartimental	29
1.2.8 Modelo Mitschlich duplo e Modelo Mitschlich -linear	30
1.2.9 Modelo von Bertalanffy Bifásico e Logístico-Gompertz Bicompartimental	30
1.3 Avaliadores da qualidade de ajuste	31
1.3.1 Coeficiente de Determinação R^2	31
1.3.1.1 Coeficiente de Determinação Ajustado $R_{aj.}^2$	32
1.3.2 Quadrado médio do resíduo (QMR).....	32
1.3.3 Critério de informação de Akaike (AIC).....	33
1.3.3.1 Critério de informação de Akaike Corrigido (AIC_C).....	33
1.3.6 Critério de informação Baysiano (BIC).....	34
1.3.7 Penalizando adaptativamente a Verossimilhança (PAV) (Stoica and Babu, 2013; Corrales et al. 2015).....	34

Capítulo 2: Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de composições de modelos existentes aplicado à ciência animal- Estudo do caso do frango Atenas-Canadá.....	35
RESUMO.....	35
1.INTRODUÇÃO.....	35
2. MATERIAL E MÉTODOS.....	36
2.1 Dados Utilizados.....	36
2.2 Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento a partir de composição generalizada de modelos existentes.....	37
A função dada por.....	40
2.3 Modelo Proposto aplicado ao problema de Crescimento Animal.....	40
2.4 Avaliadores.....	41
2.5 Análise de Resíduo dos Modelos.....	42
2.6 Validação Cruzada.....	42
3. RESULTADOS.....	42
4. DISCUSSÃO.....	46
5. CONCLUSÃO.....	47
Capítulo 3: Uso dos tempos dos pontos influentes aplicados à análise de produção de gás de dietas simplificadas para coelhos pela técnica in vitro.....	49
RESUMO.....	49
1.INTRODUÇÃO.....	49
2.MÉTODOS.....	51
2.1 Preparo das dietas.....	51
2.2 Experimento de produção de gases in vitro.....	53
2.2 Modelo da cinética de produção de gás.....	55
3.RESULTADOS.....	58
3.1 Ajuste do modelo LB para as 7 dietas.....	58
3.1 Cálculo dos pontos críticos para a dieta T1.....	60
5.CONCLUSÃO.....	83
Capítulo 4: Considerações Finais.....	85
RERERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	86
APÊNDICE A : Gráficos das derivadas d1, d2, d3 e d4 da produção de gás das dietas T2 a T7. Modelo LB.....	101
APÊNDICE B: Dedução algébrica dos pontos críticos.....	125
1.Dedução do t_{PI}	125
2. Dedução do Y_{PI}	127
3. Dedução do t_{PAM} e do t_{PDM}	127
4. Cálculo do t_{PDA}	129

5. Dedução do Y_{PDA}	130
-------------------------------	-----

Introdução Geral

Modelos são aproximações da realidade para podermos compreender os fenômenos de forma simplificada (Montgomery e Runger, 2007). Segundo Stachowiak (1972) os modelos não mapeiam todos os atributos do objeto de estudo que eles representam, mas somente aqueles que são relevantes para quem modela, ou seja, os modelos possuem uma característica de redução.

De acordo com Apostel (1991), uma das funções principais dos modelos é a explanatória e redutora de complexidade, ou seja, permite que fenômenos complexos possam ser visualizados e compreendidos, o que de outra forma não seria possível devido à magnitude do problema. Segundo Santana et al. (2016), novos estudos sobre curvas de crescimento são necessários, existindo a possibilidade desses novos modelos gerarem resultados significativos e com estimativas precisas.

O estudo de modelos de crescimento aplicados aos animais tem fundamental importância na produção agropecuária (FREITAS, 2005). Eles permitem analisar a evolução do peso em função da idade do animal, assim como é possível comparar as taxas de crescimento de diferentes indivíduos em estados fisiológicos equivalentes (THOLON e QUEIROZ, 2009).

O frango é o tipo de carne mais consumido no Brasil e a segunda no mundo, devido à sua qualidade nutricional, opções variadas de preparo, não possuir restrições religiosas e pelo seu baixo preço no mercado, abarcando desta forma maior público consumidor que as outras carnes (Paulino et al., 2019). Dentre os estudos sobre crescimento de frangos pode-se destacar o estudo de Mata-Estrada et al. (2020) que compararam os modelos de crescimento Gompertz, Logístico, Richards e von Bertalanffy e determinaram o melhor modelo de acordo com os

critérios de ajuste R^2 , AIC e BIC. O estudo teve como conclusão ser o modelo de von Bertalanffy que melhor se ajustou aos dados de frangos da raça Crioula.

Já Sanusi e Oseni (2019) utilizaram os modelos: Gompertz, Logístico, Bertalanffy e Richards para se ajustar a dados de frangos do ecotipo Fulani da Nigéria, onde o modelo Gompertz e o Bertalanffy foram os modelos com melhor desempenho, determinados por meio dos critérios: R^2 , R^2_{aj} , Erro quadrático médio, desvio padrão residual, BIC e AIC. Mustafa, Razuki e Anbari (2022) avaliaram os modelos Gompertz, Logístico e Bertalanffy para descrever os dados da raça de frangos indígena Iraquiano. Por meio dos critérios: R^2 , AIC, BIC, Erro quadrático médio determinaram que o modelo Gompertz obteve o melhor desempenho.

Em relação à produção de gás *in vitro*, os modelos são ferramentas quantitativas importantes para estimação do valor nutricional dos alimentos empregados na alimentação de ruminantes (RODRIGUES et al., 2021). Poucos artigos foram realizados sobre a produção de gases *in vitro* de coelhos, dentre os quais destacou-se alguns estudos que analisaram diferentes cultivares.

Kara (2016) estudou fontes de nutrientes e fibras comuns e não comuns tais como: polpa de beterraba, farelo de trigo, farinha de luzerna, tomate bagaço, farelo de milho, farelo de arroz, farelo de lentilha e casca de romã. Hernandez et al (2017) avaliaram a produção de gás *in vitro*, produzidos pela fermentação cecal de coelhos em crescimento. Foram estudadas 7 silagens que são tradicionalmente utilizadas por pequenos produtores de coelhos: feijão (*Phaseolus vulgaris*), fava (*Vicia faba*), ervilhaca (*Vicia sativa*), azevém (*Lolium perenne*), cevada (*Hordeum vulgare*), cevada com ervilhaca e da cevada com fava.

Já Bovera et al (2007) estudaram a cinética de produção de gás de doze volumosos compreendendo 11 feno: azevém, *Lolium italicum*; alfafa, *Medicago sativa*; sulla, *Hedysarum coronarium*; aveia, *Avena sativa*; ervilhaca, *Vicia sativa*; sulla-aveia; ervilhaca;

sulla-aveia; trevo, *Trifolium alexandrina*; azevém-trevo; sulla-ervilhaca-aveia e por fim a palha de trigo.

Ferreira et al (2019) analisaram a produção de gás decorrente das dietas baseadas em feno de alfafa, milho, farelo de trigo, farelo de soja, milho triturado com palha e sabugo (CMSC), casca de soja, polpa cítrica, cana-de-açúcar, bagaço, casca de café, torta de macaúba (*Acrocomia aculeata*; MSCM), feno de desmanthus (*Desmanthus virgatus*), feno de falciforme (*Senna obtusifolia*), feno de nim (*Azadirachta indica*), feno de maçã (*Calotropis procera*), feno de groselha de Barbados (*Pereskia aculeata*) e feno de moringa (*Moringa oleífera*) a partir de amostras de fluido cecal de coelhos Nova Zelândia brancos.

Dentre os modelos utilizados na literatura sobre o tema, destacaram-se: Kara (2016) que utilizou o modelo de Ørskov and McDonald (1979) para analisar a cinética de produção de gases produzidos pela técnica de produção de gás *in vitro* a partir do inoculo de fezes de coelhos Nova Zelândia brancos e machos. Hernandez et al. (2017) utilizaram o modelo de Krishnamoorthy (1991) para ajustar os dados de gases de dietas de coelhos da raça Nova Zelândia.

Já Bovera et al (2007) utilizou o modelo de Groot et al (1996) para ajustar os dados de dietas de coelhos da raça Hyla. Ferreira et al (2019) utilizou o modelo de Gompertz, outro modelo unicompartimental. Neste trabalho utilizou-se o modelo logístico bicompartimental, bastante utilizado para analisar a produção de gases de ruminantes (Zornitta et al., 2021), porém pouco utilizado para a produção de gases em coelhos.

No que se refere aos pontos influentes Michan, Carvalho e Pinho (2011), Michan e Pinho (2014) e Teixeira et al. (2021) determinaram equações para o Ponto de Inflexão (PI), Ponto de Aceleração Máxima (PAM), Ponto de desaceleração Máximo (PDM) e Ponto de Desaceleração Assintótico (PDA) para o modelo logístico, porém com parametrização diferente do presente trabalho (capítulo 3), e aplicaram ao crescimento animal.

Estes pontos foram recentemente estudados em curvas de crescimento vegetais que fornecem informações complementares sobre o desenvolvimento da variável em investigação (Bem et al., 2020; Carini et al., 2020; Diel et al., 2020; Sari et al., 2018; Xin-Yu et al., 2014).

No entanto, os cálculos de todos esses estudos citados anteriormente não levaram em consideração a latência no modelo logístico e nem possui a latência nas equações resultantes do PI, PAM, PDM e PDA.

Através dos estudos destacados, podemos observar a diversidade de modelos aplicados ao crescimento de frangos, assim como na produção de gases *in vitro* para avaliação de dietas animais. A questão de pesquisa a ser analisada é se é possível criar novos modelos que se ajustem melhor aos dados de crescimento animal de frangos, assim como calcular os pontos influentes de modelos não lineares, em particular ao modelo logístico e aplicá-los ao contexto de avaliação de dietas para animais utilizando a latência nesses cálculos.

Justificativa

Sabe-se que existem diversos modelos que descrevem o crescimento animal e a produção de gases *in vitro*, dentre os quais destacam-se alguns modelos bastante recorrentes na área de ciências agrárias. A questão de pesquisa a ser analisada é se existe novas maneiras de se criar modelos de crescimento e que esses modelos sejam mais atrativos para serem utilizados pelos pesquisadores por serem melhor ajustados aos dados e por sua boa interpretação biológica. Além disso, este estudo busca auxiliar no entendimento da utilização dos pontos influentes na avaliação de dietas baseada na interpretação desses pontos calculados a partir de dados gerados pela produção de gases *in vitro*.

Objetivo Geral

Apresentar um método gerador de modelos não lineares, propor e ajustar modelos, comparar estatisticamente com os modelos já utilizados na literatura e identificar o melhor modelo entre os empregados. Assim como calcular pontos influentes de modelos não lineares.

Objetivos Específicos

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

- Propor um método gerador de modelos;
- Criar um novo modelo que seja superior aos principais modelos já existentes na literatura;
- Calcular os pontos influentes de um modelo;
- Aplicar os novos conhecimentos aos dados de crescimento animal e de produção de gases *in vitro*.

Estrutura do Trabalho

Sendo assim, este trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo discorreremos sobre o Referencial Teórico referente aos modelos de crescimento aplicados ao crescimento animal e de produção de gás e *in vitro*, assim como os avaliadores de qualidade de ajuste.

No segundo capítulo, generalizaremos o trabalho de Santos et al. (2019) adicionando a operação de composição de funções e criar um novo modelo de crescimento a partir desse método e aplicá-lo a dados de frangos.

No capítulo 3 serão calculados pontos influentes do modelo de produção de gases *in vitro* logístico modificado reparametrizado que serão aplicados aos compartimentos do modelo logístico bicompartimental e será aplicado aos dados de coelhos.

No capítulo 4, apresentaremos as considerações finais e discutiremos possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 1: Referencial Teórico

O estudo de modelos de crescimento remontam ao século XXIX com o modelo Logístico de crescimento populacional (Verhulst, 1847) e o modelo de natalidade e mortalidade humana de Gompertz (1825). Os modelos de crescimento podem ser aplicados a diversas áreas, vamos restringir a pesquisa ao crescimento animal e à cinética de degradação ruminal. Os próximos tópicos abrangerão os principais modelos de crescimento animal e de produção de gases in vitro descritos na literatura mundial.

1.1 Modelos de Crescimento Animal

1.1.1 Modelo Pütter-Bertalanffy

Pütter (1920) considerou o crescimento animal como o resultado da diferença entre o anabolismo e catabolismo de matéria do corpo, que pode ser expresso pela expressão:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^m - \beta W^n \quad (1)$$

Denominada equação Pütter-Bertalanffy (OHNISHI, YAMAKAWA, AKAMINE, 2014), onde α e β são constantes de anabolismo e catabolismo.

Von Bertalanffy (1957) considerou $n=1$, como primeira aproximação, ou seja, que a taxa de catabolismo é diretamente proporcional ao peso. Sua solução para a equação diferencial foi:

$$W = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} - \left[\frac{\alpha}{\beta} - W_0^{(1-m)} \right] e^{-(1-m)\beta t} \right\}^{\frac{1}{1-m}} \quad (2)$$

Já em relação ao anabolismo von Bertalanffy (1957), classificou os animais em 3 categorias metabólicas. Na primeira, utilizou a regra da superfície, isto é, a taxa de metabolismo de um animal pode ser expressa como função de seu peso elevado a 2/3. Logo, a expressão fica descrita como:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3} - \beta W. \quad (3)$$

O segundo tipo metabólico o $m=1$ e a equação diferencial fica:

$$\frac{dW}{dt} = (\alpha - \beta)W. \quad (4)$$

O terceiro tipo, o m tem um valor intermediário, entre 2/3 e 1.

Os modelos de Gompertz, Richards, Brody, Logístico são submodelos obtidos da equação (1). A Tabela 1, descreve os modelos e a condição para obtê-los.

Tabela 1 - Modelos obtidos a partir da equação (1)

Modelo	Equação	Condição
Richards (RICHARDS, 1959)	$W(t) = \alpha[1 - \beta e^{-\gamma t}]^m$	m variável
Logístico (NELDER, 1961)	$W(t) = \alpha/[1 - \beta e^{-\gamma t}]$	$m = 2$
Brody (BRODY, 1945)	$W(t) = \alpha[1 - \beta e^{-\gamma t}]$	$m = 0$
Gompertz (LAIRD, 1965)	$W(t) = \alpha e^{-\beta e^{-\gamma t}}$	$m \rightarrow 1$
von Bertalanffy (BERTALANFFY, 1957)	$W(t) = \alpha[1 - \beta e^{-\gamma t}]^3$	$m = \frac{2}{3}$

Vale salientar que o modelo logístico descreve o crescimento simétrico, enquanto que o modelo Gompertz e ontogénico (subsecção 1.1.3) retratam o crescimento assimétrico com ponto de inflexão fixo. O modelo de Richards (1959), o ponto de inflexão é flexível e pode ser utilizado para descrever diferentes níveis de assimetria no crescimento (CAO et al., 2019).

Ohnishi, Yamakawa e Akamine (2014) propuseram uma forma padronizada para a equação de Pütter-Bertalanffy, que pode ser considerada como uma extensão da função padronizada de Richards proposta por Akamine (2009), ver página 13 de Ohnishi, Yamakawa e Akamine (2014), e subsequentemente a resolveu. A equação simplificada ($W/W_\infty \rightarrow y$), onde W_∞ é a massa assintótica, obteve a forma:

$$\frac{dy}{dt} = \beta y^{1-\alpha r} (1 - y^r). \quad (5)$$

Tjørve e Tjørve (2010) demonstraram que somente duas formas de parametrização (ou re-parametrização) do modelo de Richards podem substituir ou unificar outras formas de modelos: exponencial negativo, modelo logístico, modelo de Von Bertalanffy e modelo Gompertz.

1.1.2 Modelo de Orçamento de Energia

Koojima (1986, 2010) desenvolveu o modelo de orçamento de energia que utiliza a assimilação e manutenção em vez do anabolismo e catabolismo do modelo de Pütter-Bertalanffy para o crescimento animal. Além disso, criou a Teoria do orçamento dinâmico de energia, que leva em conta a dependência da comida, condições do corpo, desenvolvimento, reprodução, crescimento embrionário, além da conservação da massa e energia. Ela utiliza uma variável de estado chamada Reserva de nutrientes (E) e modela a sua dinâmica de acumulação e mobilização em relação a sua estrutura. A teoria também utiliza os conceitos de

densidade nutritiva, massa de reserva e a massa de estrutura (KEARNEY, 2021). A equação que descreve a teoria é:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{f\{\dot{p}_{AM}\}}{[E] + [E_G]} V^{\frac{2}{3}} - \frac{[p_M]}{[E] + [E_G]} V, \quad (6)$$

em que $f\{\dot{p}_{AM}\}$ é a taxa máxima potencial de assimilação por área de superfície da estrutura; $[E_G]$ é o custo energético de fazer uma unidade de volume de estrutura (energia da biomassa do tecido que a contém mais energia necessária para construir o tecido); $[p_M]$ é o custo energético para manter uma unidade de estrutura por tempo; $[E] = \frac{E}{V}$ é a densidade de reserva (quantidade de reserva por volume de estrutura). A reserva de nutrientes (E) são polímeros guardados (carboidratos, lipídios), que podem ser acessados no nível subcelular. Seu modelo é dado por:

$$W(t) = \alpha - (\alpha - \alpha_0)e^{-\gamma t}, \quad (7)$$

em que α_0 é o tamanho ao nascer, α é o tamanho assintótico, $\gamma = \frac{[p_M]}{3([E]+[E_G])}$

é a taxa de crescimento.

1.1.3 Modelo de crescimento ontogenético (OGM)

Já West et al. (2001) desenvolveu o modelo de crescimento ontogenético (OGM), um modelo baseado em princípios para a alocação da energia metabólica entre a manutenção do tecido e a produção de nova biomassa. Ele utiliza o anabolismo e manutenção em vez do anabolismo e catabolismo do modelo de Pütter-Bertalanffy (KEARNEY, 2021). Segundo West et al. (2001) a equação pode ser descrita como:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{3/4} - \beta W. \quad (8)$$

Onde: $\alpha = B_0 m_c / E_c$ e $\beta = B_c / E_c$, B_c é a taxa metabólica de uma única célula, m_c a massa de uma célula, E_c é a energia metabólica requerida para criar uma célula, B_0 é constante para uma dada taxonomia.

Ricklefs (2003) criticou o modelo ontogenético por ser apenas um submodelo da forma generalizada de Pütter (1920), assim como outras equações já descritas na literatura, tais como a logística e Von Bertalanffy, porém West et al. (2004) descreve que derivaram a equação por princípios de massa e balanço energético de manter e construir células em organismos. Hou et al. (2008) assumiu $b=3/4$ estendeu o modelo OGM para animais endodérmicos, enquanto que Zou et al. (2011) estendeu o OGM para explicar os efeitos da temperatura no crescimento e desenvolvimento ontogenético de animais ectodérmicos. Já Moses et al. (2008) fez modificações e correções no modelo ontogenético para avaliar variações empíricas de biomassa e metabolismo em vertebrados e em espécies de peso adulto variável.

1.3.4 Modelo de crescimento estocástico Ontogenético (SOGM)

West e West (2012) generalizou o OGM para um sistema fechado para satisfazer a primeira e segunda leis da termodinâmica e criou o modelo de crescimento estocástico ontogenético (SOGM), esta é a primeira derivação da relação alométrica metabólica interespecies a partir de um modelo dinâmico e a distribuição assintótica de estado estacionário da massa total do corpo que se ajusta a lei de potência inversa. A equação diferencial do OGM pode ser expressa como:

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = \alpha M_{ij}^b - \beta M_{ij}, \quad (9)$$

em que: $\beta = B_m/E_m$ e $\alpha = a/E_m$ são a taxa de criação de uma unidade de biomassa. M_{ij} é taxa de energia metabólica gerada no tempo t . Uma variável dummy é substituída na equação (9): $Z = M_{ij}$, com taxa estocástica metabólica:

$$dZ = (\alpha Z^b - \beta_0 Z)dt + Z\varepsilon(t)dt. \quad (10)$$

As flutuações são produzidas pela taxa de criação de uma unidade de biomassa $\varepsilon(t)$ que assume-se ser um processo de Winner centrado no zero.

1.3.5 Modelo de Cao et al. (2019)

Um novo modelo de crescimento sigmoidal (NSG) foi apresentado quando a taxa de crescimento é assimétrica. O NSG tem um melhor desempenho quando a taxa de crescimento fica próxima de zero próximo ao fim do crescimento. Sua equação é dada por:

$$W(t) = \alpha - \frac{ab(n-t)^{1+\frac{1}{b}}\{t(t-m)+b\{[t(2n+3t)-m(n+4t)]+b^2[-3m(n+t)+2(n^2+nt+t^2)]\}\}}{(1+b)(1+2b)(1+3b)}. \quad (11)$$

Onde: a, b, m, n e α são parâmetros do modelo. Quando $t \leq m, t = m; t \geq n, t = n$.

Como esse modelo possui muitos parâmetros, obter os valores iniciais para a parametrização utilizando os métodos de otimização local, tais como o método de Gauss-Newton ou Levenberg-Marquardt, podem ser difíceis, logo os autores propõem utilizar o algoritmo de evolução diferencial (DE) em conjunto com o método de Nelder-Mead para resolver esse problema (CAO et al., 2019).

1.3.5 Modelo de crescimento iterativo (IGM)

Shu et al. (2021) desenvolveu o modelo de crescimento iterativo (IGM), onde o OGM é um subcaso do IGM quando $b=3/4$, e estudou os casos em que b é diferente de $3/4$. O modelo IGM e sua extensão se mostrou válida para dados utilizados por Hou et al (2008) e Zou et al. (2011). O modelo é descrito da seguinte forma:

$$f(m) = \frac{Tm_r}{g_r} (M^{1-b}m^b - m). \quad (12)$$

Onde T representa o tempo de cada iteração/ciclo, $f(m)/T$ representa a taxa de iteração, $f(m)$ é a massa total do tecido criado nesse período, $\frac{f(m)}{T} \rightarrow dm/dt$, quando T é infinitamente pequeno (SHU et al., 2021) .

1.3.6 Modelo Dos Santos et al. (2018)

Dos Santos et al. (2018) generalizou a equação de Pütter-Bertalanffy de forma a obter todos os modelos gerados por equação diferencial descritos na literatura (ver Equação 2 em Santos et al. 2018) e propôs um novo modelo que tem por equação:

$$W(t) = \alpha \left(1 + \beta e^{\gamma e^{kt}} \right), \quad (13)$$

em que: W é o peso, t o tempo, α é o peso assintótico, quando t tende a infinito; k é a taxa específica de maturação, ou seja, é a taxa na qual o animal se aproxima do tamanho da idade adulta; β e γ são parâmetros de forma, sem significado biológico.

1.2 Modelos de Cinética Ruminal

Tilley e Terry (1963) criaram o método de produção de gás in vitro. Eles iniciaram seus estudos baseados na simulação dos processos de digestão ruminal, e analisaram a degradabilidade e a cinética de fermentação ruminal por esse método.

1.2.1 Modelo de Ørskov e McDonald

O modelo de Ørskov e McDonald (1979) é o mais utilizado para descrever a cinética de degradação ruminal (SALMERÓN, 2021). Sua equação é descrita como:

$$y = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \quad (14)$$

em que: α é a produção de gás da fração solúvel, β é a produção de gás produzido pela fração insolúvel, γ é a taxa de produção constante para a fração insolúvel (Ørskov e Mcdonald, 1979).

1.2.2 Modelo de France

Segundo Salmerón (2021) o modelo de France et al. (1993) generaliza o modelo de Ørskov e Mcdonald (1979) e é dado por:

$$y = \alpha \left\{ 1 - e^{[-\beta(t-T) - \gamma(\sqrt{t} - \sqrt{T})]} \right\}, \quad (15)$$

em que: T é o lag de tempo antes da fermentação começar e $\mu = \beta + \frac{\gamma}{2\sqrt{t}}$, $t \geq L$ é a taxa de degradação do substrato (FRANCE et al., 1993).

1.2.3 Logístico Bifásico, Gompertz Bifásico e Exponencial Bifásico

Já Schofield, Pitt e Pell (1994) proporam um modelo com dois compartimentos formado cada um pelo modelo logístico modificado, formando o modelo Logístico Bicompartimental, e outro modelo bicompartimental formado cada um pelo Gompertz modificado, o modelo chamado Gompertz Bicompartimental, aplicados a cinética de degradação de fibras da produção de gases in vitro. Eles priorizaram esses modelos em vez do modelo Exponencial Bicompartimental, pois este não é capaz de reproduzir as variações na inclinação encontradas em substratos mistos. Alguns autores chamam o compartimento como sinônimo de fase, e os modelos bicompartimentais de modelos bifásicos (GROOT et al., 1996; WANG, TANG, TAN, 2011; DOS SANTOS et al., 2019). Segue na Tabela 2 os modelos descritos nessa seção.

Tabela 2 - Primeiros Modelos Bifásicos

Modelo	Equação
Logístico Bifásico	$W(t) = \alpha_1 \{1 + e^{[2-4\gamma_1(t-T)]}\}^{-1} + \alpha_2 \{1 + e^{[2-4\gamma_2(t-T)]}\}^{-1}$
Gompertz Bifásico	$W(t) = \alpha_1 e^{\{-e^{[1-\gamma_1(t-T)]}\}} + \alpha_2 e^{\{-e^{[1-\gamma_2(t-T)]}\}}$
Exponencial Bifásico	$W(t) = \{\alpha_1(1 - e^{-\gamma_1 t}) + T\} + \{\alpha_2(1 - e^{-\gamma_2 t}) + T\}$

Fonte: Adaptado de (SANTOS et al. 2019).

1.2.4 Modelo de Michaelis-Menten

O modelo de Michaelis-Menten (GROOT et al., 1996) unifásico, bifásico e multifásico é descrito como :

$$W = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_i}{\left(1 + \frac{\beta_i^{\gamma_i}}{t^{\gamma_i}}\right)} \right] \quad (16)$$

em que: W é a quantidade de gás produzido, α_i representa a produção assintótica de gás, β_i é o tempo após a incubação em que metade da quantidade assintótica de gás foi formada, e γ_i é o parâmetro que determina a forma da curva de fase (RODRIGUES et al., 2002). O valor de i indica a número de fases ($i = 1, n$), ou seja, quantos compartimentos tem o modelo.

1.2.5 Modelo Exponencial Logístico

O modelo Exponencial-Logístico foi desenvolvido por Wang, Tang e Tan (2011). O modelo sem lag T , é expresso como:

$$\begin{cases} V = V_F \left(\frac{1+d}{1+e^{(b-\gamma t)}} - d \right) \\ b = \ln \left(\frac{1-V_0/V_F}{V_0/V_F+d} \right) \\ \gamma = \frac{c(d+1)}{V_F} \end{cases}$$

em que, γ é a taxa da produção de gás; d é um parâmetro de forma ($1 < d < 1$ indica forma sigmóide da curva, enquanto que $d > 1$ indica uma forma não sigmóide). O modelo com latência (lag T) pode ser escrito como:

$$V = \frac{V_F(1 - e^{-\gamma(t-T)})}{1 + e^{\left(\ln\left(\frac{1}{d}\right) - \gamma(t-T)\right)}} \quad (17)$$

Wang, Tang e Tan (2011) comparam seu modelo difásico (dois compartimentos) com o modelo Exponencial Logístico com latência e sem latência, com o Michaelis-Menten difásico, o Exponencial difásico com latência, o Gompertz difásico, e o Logístico difásico. Segundo Wang, Tang e Tan o modelo unicompartmental pode ser estendido para uma análise difásica se o substrato potencialmente degradável é composto por dois componentes, sendo uma fração de degradação rápida e uma fração de degradação lenta (Schofield et al., 1994; Groot et al., 1996).

1.2.6 Modelo Salmerón (2021)

Já Salmerón (2021) propôs um modelo de regressão beta não linear, utilizando a perspectiva Baysiana aplicado à dados de cinética ruminal e generalizou os modelos de Ørskov e McDonald (1979), o modelo de Michaelis Mentel (GROOT et al.,1996) e o modelo de France et al.(1993). A distribuição Beta $\beta(p, q)$ tem função de densidade descrita como:

$$f(y | p, q) = \frac{\Gamma(p + q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1}(1 - y)^{q-1}, \quad y \in (0,1), p, q > 0.$$

O modelo proposto por Salmerón possui a forma:

$$y_i | p_i, q_i \sim \beta(p_i, q_i) \quad (18)$$

$$p_i = \mu_i \tau$$

$$q_i = \tau - p_i$$

$$\mu_i = a + b(1 - e^{-ct_i})$$

$i = 1, \dots, n$, onde $a \in (0,1)$, $b \in (0,1)$, $a + b \in (0,1)$, $\tau > 0$ e $c > 0$, τ é um parâmetro de precisão. A média e a variância de y_i são respectivamente:

$$\frac{p_i}{p_i + q_i} = \frac{\mu_i \tau}{\mu_i \tau + \tau - \mu_i \tau} = \mu_i. \quad (19)$$

$$\frac{p_i q_i}{(p_i + q_i)^2 (p_i + q_i + 1)} = \frac{\mu_i (1 - \mu_i)}{1 + \tau}. \quad (20)$$

1.2.7 Modelo Bertalanffy-Gompertz Bicompartimental

Dos Santos et al (2019) criou um novo método de criação de modelos de crescimento e aplicou a dados de cinética ruminal, e a partir dele propôs o modelo Bertalanffy-Gompertz bicompartimental

$$W(t) = \alpha_1 (1 - \beta_1 e^{\gamma_1 t})^3 + \alpha_2 e^{-\beta_2 e^{-\gamma_2 t}} \quad (21)$$

em que α_1 é o volume de gás produzido pela fração rápida de digestão de carboidratos não fibrosos; α_2 é o volume de gás produzido pela fração lenta de digestão de carboidratos

fibrosos; γ_1 é a taxa de degradação da fração rápida de digestão; γ_2 é a taxa de degradação da fração lenta de digestão; β_1 e β_2 são parâmetros de forma, sem interpretação biológica. Dos Santos et al. (2019) compararam o modelo Bertalanffy-Gompertz bicompartimental aos modelos Exponencial-Logístico, Michaelis-Menten bifásico, Gompertz bifásico, Exponencial bifásico, e Logístico bifásico.

1.2.8 Modelo Mitschelich duplo e Modelo Mitschelich -linear

Powell et al. (2020) criou os modelos Mitschelich duplo (MD) :

$$W(t) = \alpha_1(1 - e^{-\gamma_1(t-T_1)}) + \alpha_2(1 - e^{-\gamma_2(t-T_2)}); t \geq T_1, t \geq T_2 \quad (21)$$

também o modelo Mitschelich – linear (ML) descrito como:

$$W(t) = \alpha(1 - e^{-\gamma(t-T_1)}) + \beta(t - T_2); t \geq T_1, t \geq T_2 \quad (22)$$

em que β é a inclinação da tendência linear subjacente. Esses modelos foram derivados do modelo de Mitschelich aplicado a gases Powell et al (2020) dado por

$$W(t) = \alpha(1 - e^{-\gamma(t-T)}), t \geq T. \quad (23)$$

Powell et al (2020) criou o MD pela soma de dois Mitschelichs e o modelo ML pela soma de um Mitschelich com o modelo linear. Apesar de utilizar o método de Dos Santos et al (2019), eles não os citaram.

1.2.9 Modelo von Bertalanffy Bifásico e Logístico-Gompertz Bicompartimental

Dos Santos et al. (2021) criou a partir do método de Dos Santos et al. (2019), o modelo von Bertalanffy bifásico :

$$W(t) = \alpha_1(1 - \beta_1 e^{\gamma_1 t})^3 + \alpha_2(1 - \beta_2 e^{\gamma_2 t})^3 \quad (24)$$

e o modelo Logístico-Gompertz bicompartimental :

$$W(t) = \alpha_1 \{1 + \beta_1 e^{[2-4\gamma_1(t-T)]}\}^{-1} + \alpha_2 e^{\{-e^{[1-\gamma_2(t-T)]}\}} + \varepsilon, \quad (25)$$

em que $W(t)$ é o volume acumulado no tempo t , α_1 é o volume de gás produzido pela fração rápida de digestão de carboidratos não fibrosos; α_2 é o volume de gás produzido pela fração lenta de digestão de carboidratos fibrosos; γ_1 é a taxa de degradação da fração rápida de digestão; γ_2 é a taxa de degradação da fração lenta de digestão; β_1 e β_2 são parâmetros de forma, sem interpretação biológica, ε é o erro aleatório.

1.3 Avaliadores da qualidade de ajuste

Os avaliadores da qualidade de ajuste são utilizados para selecionar o melhor modelo que se ajuste aos dados analisados por modelos de regressão.

1.3.1 Coeficiente de Determinação R^2

Este critério é utilizado com frequência para avaliar a adequação de um modelo. É referido como a quantidade de variabilidade nos dados explicada ou considerada pelo modelo (MONTGOMERY e RUNGER, 2007). Este critério pode variar entre zero e um, sendo que quanto mais próximo do valor unitário, significa que o modelo melhor se ajustou aos dados. No entanto, o R^2 é um indicativo fraco, não garantindo de forma absoluta que o modelo está bem ajustado. (MONTGOMERY e RUNGER, 2007).

O coeficiente de Determinação é descrito pela seguinte equação:

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{res}}{SS_T} \quad (26)$$

em que $SQ_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ e $SS_T = \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2 / n$.

O valor de R^2 sempre aumenta quando se acrescenta parâmetros no modelo, o que pode dificultar o julgamento do modelo no acréscimo de um parâmetro, portanto, deve-se utilizar o coeficiente de determinação ajustado (MONTGOMERY E RUNGER, 2007).

Ainda existe a possibilidade do cálculo do R^2 através da logverossimilhança. Ele é chamado também de pseudo- R^2 . Proposto originalmente por McFadden (1974), pode ser descrito como:

$$R^2 = 1 - \frac{\log(L)}{\log(L_0)} \quad (27)$$

em que L é a logverossimilhança do modelo com todos os preditores e L_0 a logverossimilhança do modelo somente com o intercepto (MENARD, 2000).

1.3.1.1 Coeficiente de Determinação Ajustado R_{aj}^2 .

O R_{aj}^2 é utilizado preferencialmente que o R^2 (coeficiente de determinação), pois aquele penaliza o modelo com variáveis desnecessárias (Downing e Clark, 2006, Montgomery e Runger, 2007).

$$R_{aj}^2 = R^2 - (p - 1/n - p)(1 - R^2) \quad (28)$$

em que: R^2 é o coeficiente de determinação, n é o número de observações, p o número de parâmetros.

1.3.2 Quadrado médio do resíduo (QMR)

O QMR é um critério bastante utilizado para avaliar o ajuste de curvas não lineares (PUIATI et al., 2013). Pode-se destacar Oliveira et al (2021) que verificou qual modelo não linear era superior para ajustar os dados de crescimento em caprinos da raça Alpina, assim como Janampa-Sarmiento et al. (2020) que utilizaram esse mesmo critério para avaliar o ajuste de dados ganho em comprimento de truta-arco-íris a modelos não lineares, entre outros trabalhos existentes na literatura. O Cálculo do QMR é dado por:

$$QMR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - p, \quad (29)$$

em que n é o número de observações, p o número de parâmetros, y_i é a observação, \hat{y}_i é a estimativa do valor de y_i .

1.3.3 Critério de informação de Akaike (AIC)

O critério de informação de Akaike é um estimador da expectativa da informação de Kullback-Leibler (HURVICH, TSAI, 1991). Sua expressão segue abaixo:

$$AIC = n + n \cdot \log(2\pi) + n \cdot \log(SQ_{res}/n) + 2(p + 1), \quad (30)$$

onde: n é o número de observações, p o número de parâmetros, SQ_{res} é a soma de quadrados dos resíduos definida por $SQ_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$, (AKAIKE, 1974). Segundo Sousa et al (2010) o AIC e o BIC impõem penalidades de acordo com o número de parâmetros do modelo a ser estimado. Porém quando a amostra é pequena existe uma probabilidade grande de que o AIC selecione o modelo com a maior quantidade de parâmetros, para tanto, se utiliza o Critério de informação de Akaike Corrigido (AIC_c), descrito na próxima seção.

1.3.3.1 Critério de informação de Akaike Corrigido (AIC_c)

O AIC_c é utilizado para pequenas amostras (HURVICH, TSAI, 1991). A sua equação pode ser descrita da seguinte maneira:

$$AIC_c = \left(n \cdot \log(SQ_{res}/n) \right) + (2p \times (p + 1)) / (n - p - 1). \quad (31)$$

Onde: n é o número de observações, p o número de parâmetros, SQ_{res} é a soma de quadrados dos resíduos definida por $SQ_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$.

1.3.5 Desvio médio absoluto (DMA)

O DMA é estatística proposta por SARMENTO et al. (2006), e é bastante utilizada atualmente para avaliar o ajuste de curvas de modelos não-lineares. Sua fórmula é dada por:

$$DMA = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| / n, \quad (32)$$

em que: n é o número de observações, y_i é a observação, \hat{y}_i é o valor estimado de y_i . Sendo que quanto menor o DMA, melhor o ajuste (SARMENTO et al. 2006).

1.3.6 Critério de informação Baysiano (BIC)

O BIC foi introduzido por Schwarz (1978) e se destaca para selecionar o modelo correto. O BIC é coerente com o princípio de que o modelo escolhido deve ser tão simples quanto possível se existir mais de um modelo que seja verdadeiro ou que elucida os dados igualmente bem (CHAKRABARTI E GHOSH, 2011). O BIC é dado por:

$$\text{BIC} = n + n \log(2\pi) + n \log\left(\frac{\text{SQ}_{\text{res}}}{n}\right) + (\log n)(p + 1). \quad (33)$$

Onde: n é o número de observações, p o número de parâmetros, SQ_{res} é a soma de quadrados dos resíduos definida por $\text{SQ}_{\text{res}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ (SCHWARZ, 1978).

1.3.7 Penalizando adaptativamente a Verossimilhança (PAV) (Stoica and Babu, 2013; Corrales et al. 2015)

Criado originalmente por Stoica e Babu (2013), baseado na penalização adaptativa da probabilidade, é calculado como:

$$\text{PAV} = -2 \log(L_m) + m \cdot \log(\tilde{m}) \cdot \left(\frac{\log(r_m+1)}{\log(\rho_m+1)}\right) \quad (34)$$

$$\rho_m = 2 \cdot \log(L_{\tilde{m}}) - 2 \cdot \log(L_{m-1})$$

$$r_m = 2 \cdot \log(L_{m-1}) - 2 \cdot \log(L_1)$$

Em que: L é a verossimilhança do modelo, \tilde{m} é o número maior de parâmetros do conjunto de modelos considerados, m é o número de parâmetros do modelo, r_m são as razões de verossimilhança entre o modelo M_{m-1} e o modelo reduzido M_1 , ρ_m são as razões de verossimilhança generalizadas entre o modelo M_{m-1} e o modelo completo $M_{\tilde{m}}$ (Corrales et al. 2015).

Capítulo 2: Método gerador de modelos de crescimento e decréscimento obtidos a partir de composições de modelos existentes aplicado à ciência animal- Estudo do caso do frango Atenas-Canadá

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo propor um novo método gerador de modelos de crescimento e decréscimento. Para tanto foi acrescentada a operação de composição ao método proposto por Santos et al. (2019). A partir desse novo método foi criado o modelo Proposto pela composição do Von Bertalanffy com o Brody. O modelo Proposto foi comparado a outros modelos unicompartmentais já descritos na literatura. Os modelos avaliados foram: Logístico, Brody, Von Bertalanffy, Gompertz, Richards e Proposto. Utilizou-se os seguintes avaliadores: Coeficiente de Determinação Ajustado R_{aj}^2 , Quadrado Médio do Resíduo (QMR), Critério de Informação de Akaike (AIC) e Desvio Médio Absoluto (DMA), Critério de Informação Bayesiano (BIC), Penalizando adaptativamente a Verossimilhança (PAV) e Capacidade preditiva do modelo (ρ) para definir o melhor modelo. O modelo proposto foi o mais adequado para ajustar os dados dos machos Atenas-Canadá. Logo, este trabalho contribuiu, acrescentando a operação de composição. Além disso, o modelo gerado por este método é eficaz para ajustar dados de frangos da raça Atenas-Canadá.

Palavras-chave: Frangos da raça Atenas-Canadá, Composição de modelos não lineares, Modelos de Crescimento.

1.INTRODUÇÃO

Os modelos de crescimento e decréscimento são bastante úteis na agricultura e na ciência animal. Eles podem ser utilizados para modelar: produção acumulada de gases produzidos pela degradação ruminal de vários tipos de silagem (LEITE, 2017; SANTOS et al., 2020; SANTOS et al., 2019), crescimento de animais tais como peixes, moluscos e crustáceos (HERNANDEZ-LLAMAS, 2004), crescimento de ovelhas e cabras (SANTOS et al., 2018), crescimento de porcos (CERON et al, 2020), rãs (FREITAS, 2005), bovinos (SILVA et al., 2011), galinhas (MATA-ESTRADA et al., 2020), de coelhos (OBIOMA et al., 2020; TELEKEN, GALVÃO e ROBAZZA, 2017), entre outras aplicações.

Entre os modelos unicompartmentais tradicionalmente utilizados na área de ciências agrárias pode-se destacar: modelos Logístico (VERHULST, 1838), Gompertz (1825), Brody

(BRODY, 1945), Von Bertallafy (1957) e o modelo Richards (1957). Recentemente, estudos de modelagem matemática vêm propondo novos modelos para melhor descrever os dados de crescimento e decrescimento (SANTOS et al 2018, SANTOS et al., 2020; SANTOS et al., 2019, Wang, Tang e Tan , 2011). De acordo com Santana et al. (2016), novos estudos sobre curvas de crescimento animal são necessários, existindo a possibilidade desses modelos propostos gerarem resultados significativos e com estimativas precisas.

Santos et al. (2019) definiu o método gerador de modelos por meio da combinação de modelos pré-existentes na literatura. A fórmula geral do seu método gerador é dado pela equação (1) (vide p. 3). Para tanto, pode-se utilizar a soma dos modelos, a multiplicação dos modelos, entre outras operações.

Assim, o objetivo deste trabalho foi propor um novo método de geração de modelos por composição de modelos já existentes de crescimento e decrescimento. Este método se trata de uma generalização do método proposto por Santos et al. (2019), por acrescentar a operação de composição de funções.

2. MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Dados Utilizados

Os dados utilizados retratam o crescimento médio acumulado de pesos de galos da raça Antenas-Canadá, originalmente apresentados no estudo de Aggrey (2002). As medidas dos pesos foram efetuadas até completarem a idade de 170 dias (25ª semana). A Tabela 3 descreve as observações obtidas no experimento de Aggrey (2002).

Tabela 3: Média do peso (g) de frangos machos da raça Antenas-Canadá através do experimento.*

Idade (dias)	Média do peso (g)
0	37,00
3	41,74
6	59,19
9	79,94
12	102,96

15	132,13
18	170,18
21	206,56
24	250,71
27	285,27
30	324,92
33	372,83
36	417,41
39	469,13
42	519,72
45	577,27
48	633,59
51	667,18
54	717,17
57	786,35
71	1.069,28
85	1.326,49
99	1.589,71
113	1.859,26
127	2.015,44
141	2.142,31
155	2.220,54
170	2.262,63

*Tabela adaptada de (AGGREY, 2002).

2.2 Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento a partir de composição generalizada de modelos existentes

Esta Secção apresenta os métodos geradores de modelos de crescimento e decrescimento a partir de modelos pré-existentes utilizando a operação de composição de funções. Estes

métodos são generalizações dos métodos propostos por Santos et al. (2019) por acrescentar a operação de combinação de funções.

Definição: Sejam, pois, $W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)$ modelos já existentes na literatura ou não e considere $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que

$$W(t_1, \dots, t_k) = f(W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)) \quad (35)$$

é uma composição generalizada de tais modelos via tal função. A depender de tal função, podemos obter vários métodos construtores de modelos, como os listados a seguir:

- i) *Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via soma ponderadas de potência de composições de modelos ou combinações lineares de potência de composições de modelos existentes*

Sejam $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ e $W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)$ modelos existentes na literatura ou não. Considere $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot (f_j(x_j))^{\beta_j}$, $x_1 = W_1(t_1, \dots, t_k), \dots$, $x_n = W_n(t_1, \dots, t_k)$, logo temos que:

$$W(t_1, \dots, t_k) = f(W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f_j^{\beta_j}(W_j(t_1, \dots, t_k)).$$

Portanto, para tal função f , o método construtor é dado por:

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f_j^{\beta_j}(W_j(t_1, \dots, t_k)). \quad (36)$$

- ii) *Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via produto de potências de composições de modelos existentes*

Neste caso tome-se a função

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha \cdot \prod_{j=1}^n (f_j(x_j))^{\beta_j},$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \alpha \cdot \prod_{j=1}^n f_j^{\beta_j}(W_j(t_1, \dots, t_k)). \quad (37)$$

- iii) *Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via soma de produtos de composições de modelos existentes*

Neste outro caso basta tomar a função

$$f(x_1, \dots, x_{m \cdot n}) = \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j \prod_{i=1}^m f_{j_i}^{\beta_{j_i}}(x_{j_i}) \right),$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j \prod_{i=1}^m f_{j_i}^{\beta_{j_i}}(W_{j_i}(t_1, \dots, t_k)) \right). \quad (38)$$

iv) *Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via produto de somas de composições de modelos existentes*

Neste item, devemos considerar a função

$$f(x_1, \dots, x_{m \cdot n}) = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{j_i} \cdot f_{j_i}^{\beta_{j_i}}(x_{j_i}) \right)^{\lambda_j},$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{j_i} \cdot f_{j_i}^{\beta_{j_i}}(W_{j_i}(t_1, \dots, t_k)) \right)^{\lambda_j}. \quad (39)$$

v) *Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via soma de potências somado ao produto de potências de composições de modelos existentes*

Neste outro caso basta tomar a função

$$f(x_1, \dots, x_{m+n}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f_j^{\beta_j}(x_j) + \alpha_{n+1} \prod_{i=m+1}^{m+n} f_i^{\beta_i}(x_i),$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f_j^{\beta_j}(W_j(t_1, \dots, t_k)) + \alpha_{n+1} \prod_{i=m+1}^{m+n} f_i^{\beta_i}(W_i(t_1, \dots, t_k)). \quad (40)$$

vi) *Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via soma de potências de somas de composições de modelos existentes*

A função dada por

$$f(x_1, \dots, x_{m \cdot n}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m b_i \cdot f_{j_i}^{\beta_{j_i}}(x_{j_i}) \right)^{\lambda_j},$$

deve ser considerada para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m b_i \cdot f_{j_i}^{\beta_{j_i}}(W_{j_i}(t_1, \dots, t_k)) \right)^{\lambda_j}. \quad (41)$$

- vii) *Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via composição de composições de modelos existentes*

A função dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1 \circ \dots \circ f_n)(x_1, \dots, x_n),$$

deve ser considerada para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = (f_1 \circ \dots \circ f_n)(W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)). \quad (42)$$

2.3 Modelo Proposto aplicado ao problema de Crescimento Animal

Se tomarmos o método vii), equação (42) e fizermos $n = 2$ e $W_1 = A_1(1 - B_1e^{-C_1t})$, o modelo Brody (BRODY, 1945) e $W_2 = A_2(1 - B_2e^{-C_2t})^3$, o modelo de Von Bertalanffy (BERTALANFFY, 1957), temos:

$$W(t) = (W_1 \circ W_2)(t) = A_1 \left(1 - B_1 e^{-C_1 A_2 (1 - B_2 e^{-C_2 t})^3} \right).$$

Se fizermos $A_1 = A$, $B_1 = 1$, $C_1 A_2 = D$, $B_2 = B$ e $C_2 = C$, temos o modelo proposto:

$$W(t) = A \left(1 - e^{-D(1 - B e^{-Ct})^3} \right) + \varepsilon. \quad (43)$$

Em que A representa o peso assintótico do animal (g) e C a taxa de crescimento (g/dia). B e D não possuem interpretação biológica. O ε é o erro aleatório associado a cada observação e segue uma distribuição normal, com média zero e variância constante. Comparou-se o modelo unicompartmental proposto equação (43) aos modelos descritos na Tabela 4.

Tabela 4: Principais modelos unicompartmentais descritos na literatura.

Modelo Unicompartmental	Expressão Matemática
Logistic (NELDER, 1961)	$W(t) = \frac{A}{1 + B e^{-Ct}} + \varepsilon$
Gompertz (LAIRD, 1965)	$W(t) = A e^{-B e^{-Ct}} + \varepsilon$
von Bertalanffy (BERTALANFFY, 1957)	$W(t) = A(1 - B e^{-Ct})^3 + \varepsilon$
Brody (BRODY, 1945)	$W(t) = A(1 - B e^{-Ct}) + \varepsilon$
Brody 2P *	$W(t) = A(1 + e^{-Ct}) + \varepsilon$

Richards (RICHARDS, 1959)

$$W(t) = A(1 - Be^{-ct})^D + \varepsilon$$

* O modelo reduzido (M1) para calcular o PAL.

Nestes modelos $W(t)$ é a média do peso dos frangos expresso em g, A é o peso assintótico em g, enquanto que C é a taxa de crescimento do frango (g/dia). O B não tem interpretação biológica, m é o parâmetro que dá forma à curva e t representa o tempo, expresso em dias (dia). O é o erro aleatório associado a cada observação e segue uma distribuição normal, com média zero e variância constante. O modelo proposto, gerado a partir do novo método, foi aplicado aos dados de crescimento do frango Atenas-Canadá. Em seguida, foram realizadas avaliações para demonstrar a eficácia do modelo.

2.4 Avaliadores

Os avaliadores da qualidade de ajuste utilizados foram: Coeficiente de Determinação Ajustado R_{aj}^2 , Quadrado médio do resíduo (QMR), Critério de informação de Akaike (AIC) e Desvio médio absoluto (DMA), Critério de Informação Baysiano (BIC), Penalizando adaptativamente a Verossimilhança (PAL), que estão definidos na Tabela 5.

Tabela 5: Avaliadores de qualidade de ajuste.

Expressões
$R_{aj}^2 = R^2 - \left(\frac{p-1}{n-p}\right) \cdot (1 - R^2)$
$DMA = \sum_{i=1}^n \frac{ y_i - \hat{y}_i }{n}$
$AIC = -2 \log(L) + 2(p + 1)$
$BIC = -2 \log(L) + (p + 1) \log(n).$
$QMR = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}$
$PAV = -2 \log(L_n) + n \cdot \log(\tilde{n}) \cdot \left(\frac{\log(r_n + 1)}{\log(\rho_n + 1)}\right)$
$\rho_n = 2 \cdot \log(L_{\tilde{n}}) - 2 \cdot \log(L_{n-1})$
$r_n = 2 \cdot \log(L_{n-1}) - 2 \cdot \log(L_1)$

Em que: R^2 é o coeficiente de determinação, n é o número de observações, p o número de parâmetros, y_i é o peso observado, \hat{y}_i é o peso estimado, L é a verossimilhança do modelo, \tilde{m} é o maior número de parâmetros do modelo do conjunto a ser considerado, m é o número de parâmetros no modelo, r_m são razões de verossimilhança generalizadas entre o modelo M_{m-1} e o modelo reduzido M_1 , ρ_m são razões de verossimilhança generalizadas entre o modelo M_{m-1} e o modelo completo $M_{\tilde{m}}$ (Corrales et al. 2015).

2.5 Análise de Resíduo dos Modelos

Analisou-se os pressupostos de normalidade, independência e heterodasticidade dos resíduos. Para tanto, foram utilizados respectivamente os teste estatísticos Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e por fim o Breusch-Pagan. A estimação dos parâmetros dos modelos foi implementada através da função `nlsLm`, uma versão modificada da função `Nonlinear Least Square (nls)` que utiliza o algoritmo de Levenberg-Marquardt, do pacote `Minpack` do software livre R, versão 1.2-2 (R Development Core Team, 2021).

2.6 Validação Cruzada

Do conjunto de dados, 25% dos registros foram mascarados aleatoriamente (conjunto de validação) e 75% dos registros foram usados para ajustar os modelos (conjunto de treinamento). Na validação cruzada, então os valores do conjunto de validação são previstos com os modelos e comparados com os pesos observados. A correlação entre os pesos previstos e observados é uma medida da qualidade do método de estimação (Biscarini et al., 2010). Para testar a capacidade preditiva dos modelos por meio da estimativa de correlações (ρ), foram calculadas as correlações de Pearson entre os pesos observados e os preditos pelos modelos da Tabela 2 e o modelo proposto no conjunto de validação.

3. RESULTADOS

Todos os modelos apresentaram normalidade dos resíduos ($*p > 0.05$), exceto o modelo Brody ($p = 0.0237$) pelo teste de Shapiro-wilk (Tabela 6). O resíduo do modelo Logístico, por exemplo, resultou em um p-valor de 0.1249. O Gompertz teve 0.6761 como resultado. O modelo proposto apresentou o teste de Shapiro-Wilk tendo como resultado 0.5151.

Todos os modelos demonstraram a independência dos resíduos rejeitada ($*p < 0.05$). Por exemplo, o modelo Logístico apresentou p-valor ($p = 0.0000$).

Em relação ao teste de Durbin-Watson, somente o modelo Logístico apresentou homogeneidade da variância ($*p > 0.05$), com p-valor de 0.5402.

Tabela 6: Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson, Breusch-Pagan e seus respectivos p-valores aplicados aos resíduos dos modelos: Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy, Brody, Richards e o modelo Proposto ajustados aos dados de frangos da raça Atenas-Canadá.

Modelos	Shapiro- Wilk	p-valor	Durbin- Watson	p-valor	Breusch- Pagan	p-valor
Logístico	0.9421	0.1249	0.2267	0.0000	0.3752	0.5402
Gompertz	0.9735	0.6761	0.7818	0.0000	12.255	0.0005
Bertalanffy	0.9452	0.1498	0.5790	0.0000	19.578	0.0000
Brody	0.9133	0.0237	0.3196	0.0000	7.1077	0.0077
Richards	0.9769	0.7714	0.7849	0.0000	13.810	0.0002
Proposto	0.9675	0.5151	0.9424	0.0005	7.6383	0.0057

Os parâmetros dos modelos estudados neste trabalho encontram-se na Tabela 7. Pode-se observar que o peso assintótico dos frangos da raça Atenas-Canadá representado por \hat{A} no modelo Logístico teve como estimativa 2280 g. O modelo Gompertz apresentou peso de 2540 g, e o modelo Bertalanffy estimou em 2787 g. Já o modelo Brody apresenta como peso assintótico 11650 g. Richards exibiu \hat{A} igual a 2549 g, e o modelo Proposto apresentou o peso assintótico \hat{A} de 2405 g. As estimativas dos modelos Gompertz, Bertalanffy, Richards e Proposto são próximas, enquanto que o modelo Logístico obteve estimativa inferior a esses modelos. Já o modelo Brody superestima o peso assintótico.

Ainda observa-se na Tabela 7 que a estimativa da taxa de crescimento dos frangos da raça Atenas-Canadá representada por \hat{C} , obteve no modelo Logístico o maior valor entre os modelos selecionados (0,040 g/dia). Já os modelos Gompertz e Richards apresentam a segunda maior taxa de crescimento ($0,022 \frac{\text{g}}{\text{dia}}$). A estimativa da taxa de crescimento do

modelo Bertalanffy encontrada foi de $\left(0,020 \frac{\text{g}}{\text{dia}}\right)$. O modelo Brody e o Proposto apresentaram as menores taxas de crescimento \hat{C} (0,001 g/dia) e (0.004 g/dia) respectivamente.

Também pode ser visto na Tabela 7 que os modelos Proposto, Gompertz e Richards obtiveram melhor resultado para R_{aj}^2 , do que os modelos Logístico, von Bertalanffy e Brody. Entretanto, R_{aj}^2 não é suficiente para selecionar o melhor modelo, pois não avalia sua coerência biológica (Mello et al., 2008; Santos et al., 2020).

Existe uma unanimidade quando observados os resultados dos avaliadores (tabela 7), todos os avaliadores indicaram que o modelo Proposto é o melhor modelo em relação à qualidade de ajuste. Já o modelo Gompertz aparece em segundo lugar, perdendo em todos os avaliadores para o modelo Proposto e no PAV para o modelo Proposto e para o modelo Bertalanffy. Em terceiro lugar aparece o modelo Richards, perdendo para o modelo Proposto e Gompertz em todos os criterios, no avaliador PAV ele perde também para o modelo Bertalanffy. Os modelos Logístico, Brody and Bertalanffy estão nas últimas posições. Portanto, pode-se inferir, segundo os avaliadores, que há indícios de que o modelo proposto é o melhor modelo para ajustar os dados dos frangos Atenas-Canadá.

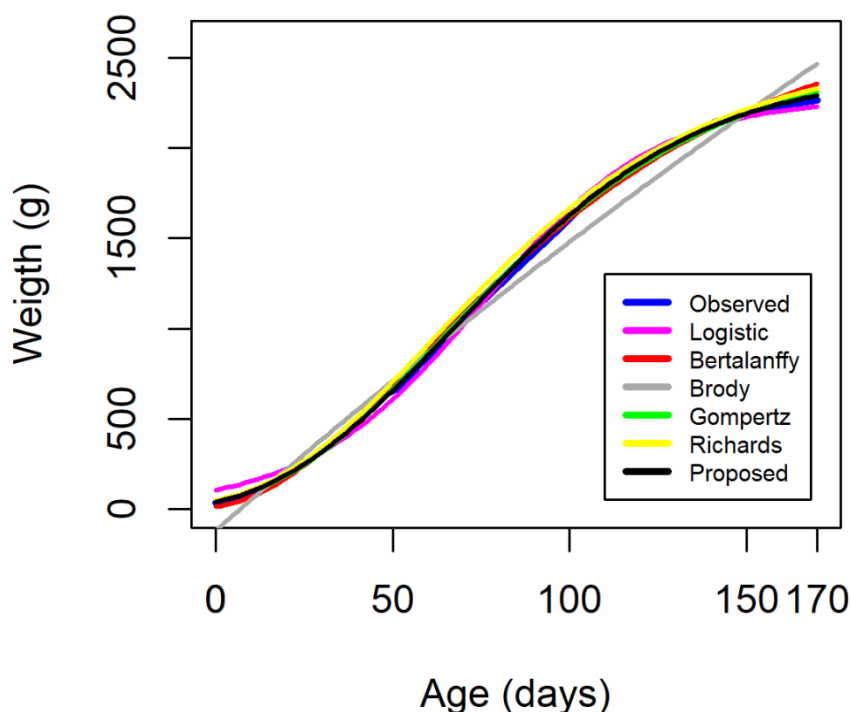
Tabela 7: Parâmetros estimados e medidas de ajuste dos modelos utilizados para estimar o peso de frangos em gramas (g).

Modelos	Parâmetros					Avaliadores					
	\hat{A}	\hat{C}	\hat{B}	\hat{D}	R_{aj}^2	DMA	AIC	QMR	BIC	PAV	ρ
Logístico	2280	0.040	20.33	-	99.66	37.23	298.66	2113.9 6	303.99	290.66	0.99396
Gompertz	2540	0.022	4.04	-	99.93	16.34	254.13	430.83	259.46	251.25	0.99962
Bertalanffy	2787	0.016	0.83	-	99.84	22.60	277.70	999.76	283.03	239.07	0.99964
Brody	11650	0.001	1.01	-	98.65	71.36	336.97	8301.9 1	342.29	335.32	0.98285
Richards	2549	0.022	0.07	54.50	99.93	16.17	256.62	456.78	263.28	253.05	0.92438
Proposto	2405	0.004	0.91	24.61	99.96	12.70	241.17	263.07	247.83	238.58	0.99968

Uma vez estabelecido o melhor modelo, todos os modelos podem ser vistos na Figura 1. Estas curvas representam os pesos médios estimados de galos de raça Atenas-Canadá nos

primeiros 170 dias (25 semanas) de vida, estimados por todos os modelos. Pode-se notar ao observar o gráfico, que quase todos os modelos apresentam ajuste satisfatório, na fase inicial, exponencial e início da fase assintótica, pois o modelo de Brody subestima a fase inicial e exponencial, e superestima a fase assintótica. O modelo Logístico superestima a fase inicial. O modelo Proposto (linha preta) apresenta boa qualidade de ajuste em todas as fases da curva.

Figura 1: Curvas de crescimento de frangos da raça Atenas-Canadá ao longo do tempo do experimento, baseadas nos dados observados (representados pela linha azul) e ajustadas por Gompertz (linha verde), Bertalanffy (linha vermelha), Logístico (linha rosa), Brody (linha cinza), Richards (linha amarela) e modelo Proposto (linha preta).



Também pode ser visto na Tabela 7 que os modelos Proposto, Gompertz e Richards obtiveram melhor resultado para R_{aj}^2 , do que os modelos Logístico, von Bertalanffy e Brody. Entretanto, R_{aj}^2 não é suficiente para selecionar o melhor modelo, pois não avalia sua coerência biológica (Mello et al., 2008; Santos et al., 2020).

4. DISCUSSÃO

O valor do peso assintótico A encontrado neste estudo ($\hat{A}= 2405$ g) pelo modelo proposto é similar às estimativas encontradas por Aggrey. (2002) que trabalhou com os mesmos dados usando os modelos Gompertz ($\hat{A} = 2483,8$ g), Richards ($\hat{A} = 2505,8$ g) e Logístico ($\hat{A} = 2192,7$ g). Brunner et al. (2019) encontrou valor superior para o peso assintótico de seu modelo ($\hat{A}=2670$ g) para dados de galinhas da raça Athens-Canadian. Já Kühleitner et al. (2019), que também utilizou os dados de Aggrey (2002), encontrou o peso assintótico próximo ao presente estudo ($\hat{A}=2319,7$ g), a partir de seu modelo ótimo. Ainda os mesmos autores, assumindo distribuição log-normal obteve outro modelo que por sua vez computou um peso assintótico \hat{A} superior (2671,1g), próximo ao encontrado por Brunner et al. (2019). Selvaggi et al. (2015) analisou dados de Italian Chicken Breed, e encontrou valores superiores para o peso assintótico \hat{A} (5870,0g) apontado pelo modelo Gompertz, assim como no modelo Richards ($\hat{A}=5700,3$ g), mas deve ser considerado que se tratam de raças diferentes. Mendes (2009) encontrou valores superiores aos presente estudo do peso assintótico ($A= 3889,4$) para Ross 308 Broiler Chickens. Topal e Bolukbasi (2008) apresentou o peso assintótico ($A=2844,15$ g) no modelo Logístico para galinhas macho da raça Ross PM3, peso aproximado ao encontrado pelo presente estudo.

As estimativas para taxa de maturidade \hat{C} encontradas por Aggrey (2002) foram próximas ao encontrado neste trabalho com estimativas de (0,024 g/dia) para os modelos Richards, e (0,04 g/dia) e para o modelo Logístico. Segundo Aggrey (2002) Gompertz e Richards obtiveram valores de \hat{C} similares entre si, assim como neste trabalho. Selvaggi et al. (2015) encontrou uma taxa superior de (0,1352 g/dia) para as Italian Chicken Breed no modelo Gompertz e (0,1484 g/dia) no modelo Richards. Topal e Bolukbasi (2008) também encontraram valores superiores para a taxa \hat{C} nos modelos Logístico (0,781 g/dia), Gompertz (0,268 g/dia) e Bertalanffy (0,091 g/dia). Já o modelo Weibull apresenta taxa inferior (0,006 g/dia) em relação às taxas apresentadas no presente estudo, com exceção do modelo Brody e Proposto.

Teleken et al. (2017) comparou os ajustes dos modelos Brody, Logístico, Richards, Gompertz e Von Bertalanffy nos dados de Aggrey (2002), por meio dos critérios: coeficiente de determinação, a raiz quadrática média, AIC corrigido e BIC e concluiu que os modelos Richards e Logístico possuem os melhores ajustes aos dados de galinhas da raça Athens-

Canadian. Os autores comentaram que os resíduos dos modelos Logístico e Brody são maiores em relação ao modelo Gompertz e não são normalmente distribuídos por análise gráfica. No presente estudo confirma-se pelo teste de Shapiro-wilk que o modelo Brody não apresenta distribuição normal, no entanto o modelo Logístico possui distribuição normal, em oposição ao que disseram Teleken et al. (2017). Teleken et al. (2017) também apontam que o modelo Gompertz é apropriado para ajustar os modelos de dados das galinhas macho da raça em questão, assim como Aggrey (2002). Em relação aos critérios de ajuste utilizados no presente estudo (ver Tabela 7), o modelo Gompertz aparece em segundo lugar em praticamente todos os criterios, perdendo apenas para o modelo Proposto e no criterio PAV para o modelo Proposto e Bertalanffy.

Segundo Selvaggi et al. (2015) as funções de Gompertz e Richards explicaram o crescimento de frango machos da Raça Italiana de forma confiável, assim como no presente estudo realizado com frangos machos da raça Atenas-Canadá. Já o modelo Logístico está entre os piores ajustes, achado também encontrado por Topal e Bolukbasi (2008) em machos da raça Ross PM3. Segundo Aggrey (2002), não existe diferença na qualidade de ajuste entre os modelos Richards e Gompertz o que pode ser explicado pelos valores próximos encontrados dos avaliadores de ajuste entre esses dois modelos, evidenciados no presente trabalho.

Apesar do modelo Proposto apresentar quatro parâmetros, apresentou melhores AIC, BIC, que são critérios que penalizam a adição de parâmetros (Akaike, 1970; Schwartz, 1978; Schoups, 2008). O modelo Proposto apresenta boa interpretação biológica dos parâmetros. O método de criação de modelos utilizando a composição de modelos existentes é uma forma fácil e rápida de se obter novos modelos, dessa forma é capaz de proporcionar diversas opções testáveis de modelos inéditos de crescimento. Outra forma de se obter modelos de crescimento pode ser por resolução de equações diferenciais (Santos, 2018), o que demanda um maior conhecimento matemático, e muitas vezes não existem soluções matemáticas analíticas.

5. CONCLUSÃO

Foi possível criar um novo modelo a partir do método gerador de modelos usando a operação de composição do modelos. Assim, este trabalho contribuiu com o método de Santos et al. (2019), acrescentando esta operação matemática, obtendo um novo método que

generaliza o proposto por Santos et al. (2019). Considerando a interpretação biológica dos parâmetros estimados, e a qualidade das medidas de ajuste, pode-se concluir que o modelo proposto (que foi criado a partir da composição dos modelos Brody e Bertalanffy), é indicado para analisar os dados de frangos da raça Atenas-Canadá de acordo com a metodologia e condições em que o presente estudo foi desenvolvido.

Capítulo 3: Uso dos tempos dos pontos influentes aplicados à análise de produção de gás de dietas simplificadas para coelhos pela técnica in vitro

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo avaliar 7 dietas para coelhos utilizando os tempos para atingir os pontos influentes: Ponto de Inflexão (PI), ponto de Aceleração Máxima (PAM), Ponto de Desaceleração Máxima (PDM), Ponto de Desaceleração Assintótica (PDA), que foram deduzidos a partir da equação do modelo logístico modificado reparametrizado. Esses tempos foram calculados para cada compartimento do modelo logístico bicompartimental que foi utilizado para modelar o fenômeno. Os tempos dos pontos de estabilização se mostraram importantes para interpretar biologicamente o fenômeno estudado. As dietas: semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa, semi-simplificada com base em feno de alfafa e simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa apresentaram bons resultados e são alternativas à dieta de referência para alimentar coelhos da raça Nova Zelândia.

Palavras-chave: Modelo logístico bicompartimental, Coelhos Nova Zelândia, Ponto de aceleração máxima, Ponto de desaceleração máxima, Ponto de desaceleração assintótica.

1.INTRODUÇÃO

A produção de gás in vitro (Theodorou et al., 1994) é um método importante para se estudar as características fermentativas da alimentação de animais, particularmente de ruminantes (Acosta-Lozano et al., 2023) e também de animais monogástricos, tal como o coelho (Ferreira et al., 2019). Maurício et al. (1999) propôs uma metodologia semi-automática para produção de gases in vitro que tem se mostrado uma excelente ferramenta para avaliação da produção de gases (Suassuna et al., 2023). O volume de gases produzidos durante a

fermentação de substratos através da técnica *in vitro* semi-automática de produção de gases possibilita avaliar a cinética de fermentação das dietas utilizadas na nutrição de animais (Ferreira et al, 2017). No ceco dos coelhos existem comunidades microbianas abundantes e diversificadas (Cotozzolo et al., 2021), por isso, representa o principal lugar para atividades de fermentação. Esta comunidade microbiana desempenha um papel na digestão dos alimentos por fermentação e reciclagem de proteína microbiana através da cecotrofia (Hernandez et al, 2017). Esse método de análise da produção do gás necessita de um substrato (dieta), um meio anaeróbico e uma amostra representativa da população de microorganismos presente no ceco do coelho (inóculo) para ser utilizado (Bovera et al, 2008). A produção de gás pode ser medida para estimar a taxa de degradação dos alimentos ingeridos pelos animais, ela provê informações sobre as características cinéticas e de fermentação das dietas e rações animais (Hernandez, 2017). A produção de gás *in vitro* é uma avaliação mais rápida, econômica e menos trabalhosa, e mantém altos valores de correlação com parâmetros *in vivo*, inclusive com dados de coelhos (Ferreira et al, 2019).

O modelo logístico bicompartimental (Schofield, Pitt e Pell, 1994) passou a ser amplamente utilizado para ajustar a produção de gás *in vitro* de alimentos e dietas de ruminantes (Zornitta et al., 2021). Poucos estudos são encontrados utilizando o modelo logístico bicompartimental para modelar a cinética de produção de gases produzidos a partir de dietas de coelhos.

Este estudo tem como objetivo analisar 7 dietas experimentais a partir seus parâmetros cinéticos de produção de gás. Para tanto será utilizado o modelo logístico bicompartimental e a partir do qual deduzidos teoricamente os tempos para atingir os pontos críticos: ponto de inflexão, ponto de aceleração máxima, ponto de desaceleração máxima e o ponto de desaceleração assintótica de cada compartimento do modelo logístico bicompartimental. Tais

tempos serão em seguida comparados com a medida experimental. Pretende-se inferir quais as melhores dietas a partir desse método.

2.MÉTODOS

Neste presente trabalho utilizou-se dietas baseadas em ingredientes que são ricos em fibra e são facilmente encontrados na região Nordeste do Brasil.

2.1 Preparo das dietas

Os ingredientes avaliados foram o feno de alfafa (*Medicago sativa*), feno do terço superior da rama de mandioca (*Manihot sculenta*, Crantz), variedade GRAVETINHO, colhida aos 12 meses de idade e a farinha das folhas de mandioca (FFM), variedade JACARÉ, colhida aos quatro meses de idade, que se refere à primeira fração do processamento da rama da mandioca. A dieta basal foi elaborada para atender condições recomendadas por De Blas e Mateos (1998): Energia digestível 2500 kcal/kg, Proteína Bruta 14,50-16,20%, Proteína digestível 10,2 a 11,3%, Cálcio 0,6%, Proteína total 0,4%, lisina 0,75%, metionina + cistina 0,54%, treonina 0,64%, triptofano 0,15%, arginina 0,81% e Fibra em detergente ácido 16,0 a 18,5%. Em relação à proteína, se priorizou o equilíbrio na forma de Proteína digestível (MACHADO, 2010).

Durante a formulação, todas as dietas tiveram os níveis de lisina, metionina+cistina, treonina, triptofano e arginina balanceados na forma de aminoácidos totais. O óleo foi acrescentado para aumentar a densidade energética da ração, além de proporcionar melhora na digestibilidade dos demais nutrientes, melação em pó e bentonita para melhora da qualidade do pélete. Foi adicionado às dietas semi-simplificadas, pelo menos 5% de uma fonte de amido e quantidades de uma fonte protéica de reconhecida qualidade nutricional, para melhora de todo o processo digestivo (MACHADO, 2010).

1.1 Descrição das Dietas Experimentais

Calcário	0,544	-	-	0,187	-	0,091	-
DL-metionina	0,011	-	-	-	-	-	-
Lisina-HCl	-	0,276	0,133	-	-	-	-

¹MDPS: Milho desintegrado com palha e sabugo; ²Vaccinar- composição do premix vitamínico/ mineral por Kg do produto: Vit. A, 2000000 UI; Vit. D3, 20000UI; Vit. E, 4000mg; Vit. K3, 722mg; Vit. B1, 400mg; Vit. B2, 1000mg; Vit. B6, 600mg; Vit. B12, 2000mcg; Niacina, 6000mg; Ácido fólico, 100mg; Ácido pantotênico, 3000mg; Biotina, 21mg; Colina, 100000mg; Selênio, 19mg; Iodo, 140mg; Cobalto, 200mg; Ferro, 20000mg; Cobre, 4000mg; Manganês, 4000mg, Zinco, 14000mg, Avilamicina 1000mg.

2.2 Experimento de produção de gases *in vitro*

Os dados de produção de gases foram obtidos pela técnica de digestibilidade *in vitro* com produção de gases de acordo com o método de Theodorou et al (1994) modificada por Maurício et al (1999). O material cecal foi retirado de coelhos da raça Nova Zelândia branca, de ambos os sexos, abatidos com 75 dias de idade, às 8h. Cada grupo de três coelhos, que recebiam uma determinada dieta experimental, forneceu material para uma repetição de todas as dietas. Foi considerado como tratamento cada uma das sete dietas experimentais, com sete repetições, num total de 49 unidades. Foram utilizados três frascos por repetição para medição da produção de gases, cada um constituindo de uma réplica, sendo ao todo 147 frascos. Em cada bandeja foram mantidos três frascos em branco, contendo somente o meio de cultura experimental e o líquido cecal, ou seja, foram utilizados 147 frascos e três frascos em branco, para cada repetição.

Foi adicionado aos frascos de fermentação de 160 mL, um grama de amostra anteriormente injetados com CO₂. Foi utilizado como meio de cultura a solução de Theodorou et al. (1994), que possui como composição: solução macromineral (9.5 g/L Na₂HPO₄.12H₂O, 6.2 g/L KH₂PO₄ e 0.6 g/L MgSO₄.7H₂O), solução micromineral (132

g/L $\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, 100 g/L $\text{MnCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, 10 g/L $\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ e 80g/L $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), solução tampão (4 g/L de NH_4CO_3 e 35 g/L de NaHCO_3), indicador (0,01 g/L de Rezasurin) e agente redutor (625 mg de HCl Cysteíne, 95 mL de água destilada, 4 mL de NaOH 1M e 625 mg de $\text{Na}_2\text{S} \cdot 9\text{H}_2\text{O}$).

As soluções foram misturadas na seguinte ordem e proporção: 500 mL de água destilada, 200 mL de solução tampão, 200 mL de solução macromineral, 0,1 mL de solução micromineral e 1 mL de solução indicadora. O material cecal foi diluído na proporção 1:1 com a solução de Theodorou et al. (1994), anteriormente preparada, e mantida em banho Maria a 39°C. Em seguida, 10 mL desse inóculo foi adicionado aos frascos através de seringa graduada, que já continham 90 mL do meio de cultura. Neste mesmo instante, foi injetado aos frascos o CO_2 , garantindo a anaerobiose do meio. Posteriormente, os frascos foram agitados manualmente e colocados em estufa a 39°C. O transdutor de pressão utilizado foi do tipo T443A, Bailey & Mackey, Inglaterra, conectado em sua extremidade a uma agulha (0,6 mm). As leituras de pressão foram realizadas no período de 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 21 e 24 h após o início da incubação. Ao final do experimento, os frascos foram colocados a 4°C para interrupção do processo fermentativo. Mais informações, consultar Capítulo 6 de Machado (2010). A Tabela 9 descreve os dados coletados a partir da técnica de produção de gás in vitro.

Tabela 9: Dados observados da Produção de Gás referentes às dietas T1 a T7

Tempo(h)	Produção de Gás referentes às dietas T1 a T7 (mL)						
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
2	7,96	9,06	5,79	8,93	8,22	10,52	6,63
4	23,44	23,09	15,25	23,57	20,69	25,82	17,89
6	41,02	40,06	27,86	40,32	34,32	42,50	32,32
8	59,52	54,27	40,24	53,90	47,81	56,69	46,21

10	77,03	66,72	50,77	67,42	59,14	67,99	58,02
12	92,26	76,90	61,09	77,70	70,82	79,08	68,19
15	107,74	87,72	72,41	89,28	83,45	90,70	79,63
18	120,53	97,28	82,03	98,85	93,91	100,63	88,67
21	129,13	103,43	88,91	105,49	102,07	107,29	95,42
24	136,55	108,78	94,95	111,06	109,01	113,01	101,18

* Aproximação de 2 casas decimais

2.2 Modelo da cinética de produção de gás

Neste trabalho foi utilizado o modelo Logístico Bicompartimental para a analisar a cinética de produção de gás das amostras:

$$Y(t) = Y_{CNF}(t) + Y_{CF}(t) = \frac{A_{CNF}}{1+e^{2-4K_{CNF}(t-L)}} + \frac{A_{CF}}{1+e^{2-4K_{CF}(t-L)}} + \varepsilon . \quad (44)$$

Onde: $Y_{CNF}(t)$ é o primeiro compartimento referente à produção de gás pelos carboidratos não fibrosos (CNF); $Y_{CF}(t)$ é o segundo compartimento que corresponde à produção de gás em mL pelos carboidratos fibrosos (CF). A_{CNF} é a produção de gás total dos CNF (mL). A_{CF} é a produção de gás total dos CF. L é a latência (mL). K_{CNF} é a taxa de produção do gás produzida pelos CNF (mL/h). K_{CF} é a taxa de produção de gás produzida pelos CF (mL/h). ε é o erro aleatório que segue uma distribuição normal padrão. t é o tempo em horas (h). Este modelo é uma reparametrização do modelo logístico bicompartimental proposto por Shofield (1994), que já foi utilizada anteriormente por outros autores (Santos et al., 2019, Ferro et al, 2020).

2.3 Pontos críticos de funções de crescimento

Neste trabalho foram deduzidos os tempos para atingir os pontos de estabilização para o modelo logístico modificado reparametrizado $\frac{A}{1+e^{2-4K(t-L)}}$, que foram aplicados aos compartimentos do modelo logístico bicompartimental: $Y_{CNF} =$

$$\frac{A_{\text{CNF}}}{1+e^{2-4K_{\text{CNF}}(t-L)}} \text{ (Compartimento dos CNF)} \quad e \quad Y_{\text{CF}} =$$

$$\frac{A_{\text{CF}}}{1+e^{2-4K_{\text{CF}}(t-L)}} \text{ (Compartimento dos CF)}. \text{ Vamos supor que o processo de produ\c{c}\~{a}o de g\~{a}s}$$

dos CNF e CF sejam independentes para simplificar a descri\c{c}\~{a}o do fen\~{o}meno. O fen\~{o}meno ser\~{a} modelado por 2 componentes, que somadas formam a produ\c{c}\~{a}o de g\~{a}s total, o fen\~{o}meno global a ser analisado. Assim, para descrever o fen\~{o}meno da produ\c{c}\~{a}o de gases dos CNF analisaremos individualmente a produ\c{c}\~{a}o de gases dos CNF, logo faremos a produ\c{c}\~{a}o de gases dos CF tender a zero e calcular os pontos cr\~{i}ticos do compartimento dos CNF. Da mesma maneira faremos para os CF. Logo, o t_{PI} , t_{PAM} , t_{PDM} , e o t_{PDM} dos CNF ser\~{a}o obtidos a partir da equa\c{c}\~{a}o do modelo log\~{i}stico unicompartmental, assim como os dos CF. A seguir s\~{a}o apresentados os tempos de alcance para os pontos de inflex\~{a}o, acelera\c{c}\~{a}o m\~{a}xima, desacelera\c{c}\~{a}o m\~{a}xima, desacelera\c{c}\~{a}o assint\~{o}tica. A dedu\c{c}\~{a}o das express\~{o}es (45)-(48) encontram-se no Ap\~{e}ndice B.

2.3.1 Ponto de Inflex\~{a}o (PI)

\xc3\x89 o ponto que anula a derivada de segunda ordem (fun\c{c}\~{a}o acelera\c{c}\~{a}o). Pode ser entendido tamb\~{e}m como o ponto de m\~{a}ximo da velocidade de produ\c{c}\~{a}o do g\~{a}s (derivada de primeira ordem). Ele \xc3\x89 um ponto de transi\c{c}\~{a}o na produ\c{c}\~{a}o de g\~{a}s, que passa de uma fase de crescimento na produ\c{c}\~{a}o de g\~{a}s (taxas crescentes), para uma fase de velocidade de produ\c{c}\~{a}o de g\~{a}s decrescente (taxas decrescentes). Para o modelo log\~{i}stico, pode-se calcular o tempo para se chegar ao PI da seguinte maneira para cada compartimento:

$$t_{\text{PI}} = \frac{1}{2\hat{K}} + \hat{L}, \quad (45)$$

em que \hat{L} \xc3\x89 a lat\~{e}ncia e \hat{K} \xc3\x89 o valor estimado da taxa de produ\c{c}\~{a}o de g\~{a}s. Assim como calcular a ordenada do PI :

$$Y_{PI} = \frac{\hat{A}}{2}. \quad (46)$$

2.3.2 Ponto de Aceleração Máxima (PAM)

O ponto que anula a derivada de terceira ordem, é aquele que maximiza a função aceleração. Pode-se calcular o tempo para chegar à aceleração máxima, da seguinte maneira para o modelo logístico:

$$t_{PAM} = -\frac{\log(2 + \sqrt{3}) - 2}{4\hat{K}} + \hat{L}. \quad (47)$$

2.3.2 Ponto de Desaceleração Máxima (PDM)

Outro ponto que anula a derivada de terceira ordem, além de ser ponto de mínimo da função aceleração. O tempo para alcançar tal ponto é dado por:

$$t_{PDM} = -\frac{\log(2 - \sqrt{3}) - 2}{4\hat{K}} + \hat{L}. \quad (48)$$

2.3.3 Ponto de Desaceleração Assintótica (PDA)

Ponto que anula a deriva de quarta ordem. É o último ponto de inflexão da função de aceleração. O tempo para alcançá-lo é dado por:

$$t_{PDA} = \frac{2 - \log(5 - 2\sqrt{6})}{4\hat{K}} + \hat{L}. \quad (49)$$

2.4 Desvio

O desvio do valor calculado teoricamente e o valor observado experimentalmente, em relação aos pontos críticos da produção de gás, serão calculados através da Equação abaixo:

$$Desvio_{\%} = \left| \frac{Z_{Teórico} - Z_{Obs}}{Z_{Teórico}} \right| \times 100. \quad (50)$$

Onde $Z_{Teórico}$ é o valor da variável calculada teoricamente e Z_{Obs} é o valor da variável observada experimentalmente.

3.RESULTADOS

3.1 Ajuste do modelo LB para as 7 dietas

A Tabela 10 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo LB aplicado às dietas T1 a T7. O \hat{K}_{CF} apresenta-se maior nas dietas T3 e T6, o que sugere que a produção de gás dos CF é mais rápida nessas duas dietas que nas outras estudadas. Já o volume total de gás produzido a partir da digestão dos CNF é superior na dieta T1 (98.71 mL), seguida por T5 (87.18 mL) e T6 (83.64 mL). Em relação aos CF, a dieta T1 também apresentou melhores resultados (43.08 mL), seguida por T2 (35.95 mL), T4 (34.05mL) e T6 (33.15 mL). A dieta T3 obteve a menor produção de gás de CF, apenas 24.37 mL.

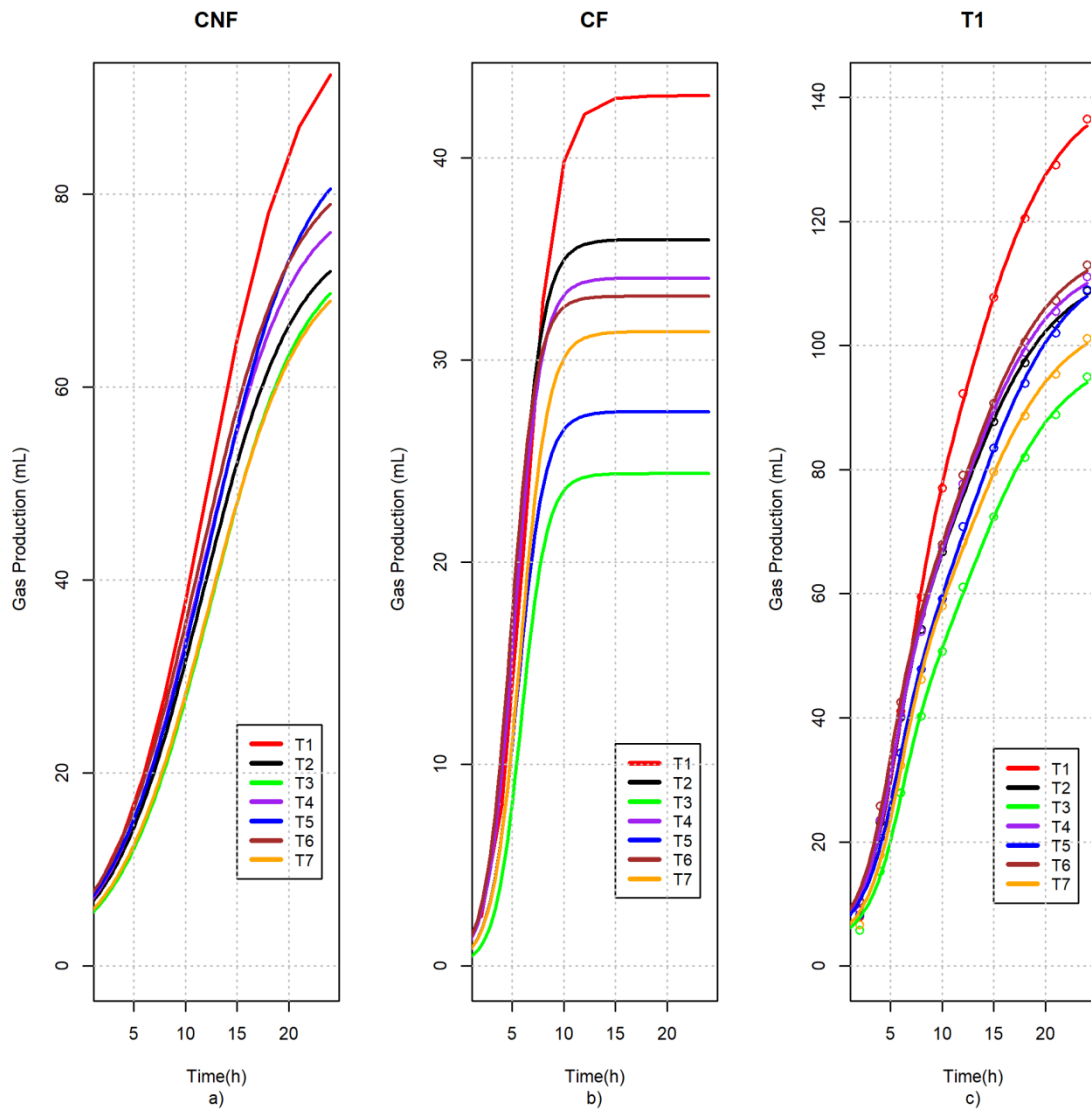
Tabela 10: Estimativa dos parâmetros para o modelo LB a partir das dietas T1 a T7 e critérios de qualidade de ajuste

	\hat{A}_{CNF}	\hat{A}_{CF}	\hat{K}_{CNF}	\hat{K}_{CF}	\hat{L}	R^2	AIC	BIC	MAD	RMS
Y_{T1}	98,71	43,08	0,06	0,17	3,22	99,87%	49,43	51,25	1,27	4,95
Y_{T2}	76,48	35,95	0,06	0,19	2,61	99,91%	39,78	41,60	0,82	1,88
Y_{T3}	74,96	24,37	0,06	0,20	3,41	99,90%	39,07	40,89	0,80	1,75
Y_{T4}	80,44	34,05	0,06	0,19	2,61	99,88%	43,60	45,41	1,01	2,76
Y_{T5}	87,18	27,44	0,05	0,19	2,91	99,89%	42,65	44,47	0,95	2,51

Y_{T6}	83,64	33,15	0,06	0,20	2,40	99,92%	39,31	41,12	0,81	1,80
Y_{T7}	73,97	31,39	0,06	0,19	3,14	99,90%	39,94	41,76	0,83	1,91

A partir da Figura 2 observa-se que a dieta de referência T1 obteve a maior produção de gás tanto de CF quanto de CNF. Já a dieta T3, na Figura 2, obteve o pior desempenho entre as dietas estudadas da produção de gás de CF (gráfico central, linha verde), o que influenciou no resultado final a produção de gás (produção de CF somada com a de CNF), obtendo o pior resultado entre todas as dietas, resultado que fica evidenciado no gráfico da Figura 2c, do modelo LB completo, linha verde.

Figura 2: Produção de gás para as dietas T1 a T7. As bolas representam os dados observados para cada dieta. As linhas retratam o modelo LB ajustado aos dados de cada dieta. Primeiro compartimento do modelo LB referente aos CNF (Figura 2a). Segundo compartimento do modelo LB referente aos CF (Figura 2b). Modelo LB completo (Figura 2c)



3.1 Cálculo dos pontos críticos para a dieta T1

A seguir, a partir das expressões 45 e 46, temos que o t_{PI} (tempo de alcance do PI) e o Y_{PI} (ordenada do ponto de inflexão) do primeiro compartimento correspondente à produção de gases a partir dos CNF:

$$t_{PI} = \frac{1}{2\hat{K}} + \hat{L} = \frac{1}{2 \times K_{CNF}} + L = \frac{1}{2 \times 0,06} + 3,22 \cong 11,55 \text{ h, e}$$

$$Y_{PI} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{98,71}{2} \cong 49,36 \text{ mL.}$$

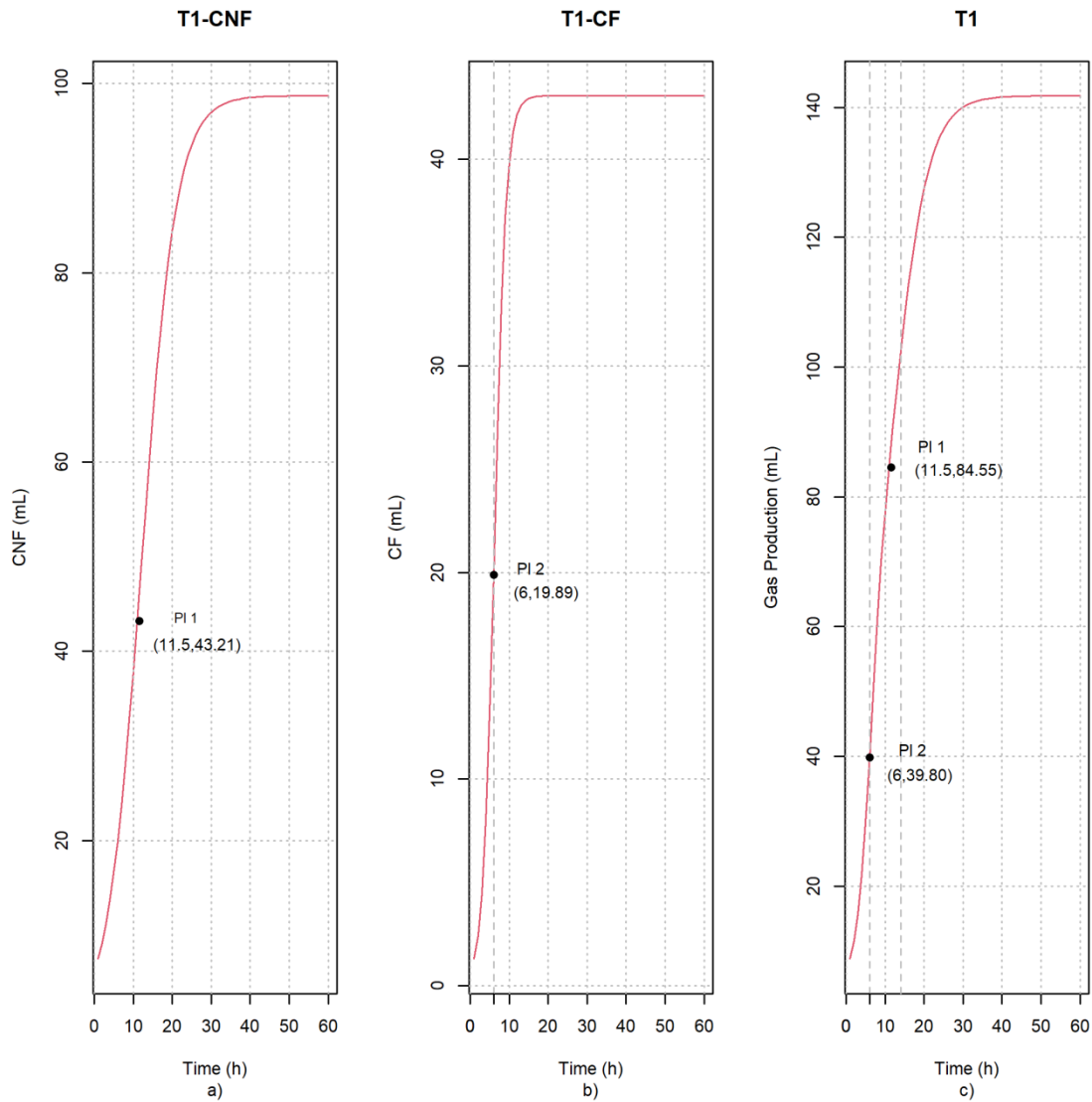
Já para o segundo compartimento, que corresponde à produção de gás dos CF:

$$t_{PI} = \frac{1}{2\hat{K}} + \hat{L} = \frac{1}{2 \times K_{CF}} + L = \frac{1}{2 \times 0,17} + 3,22 \cong 6,16 \text{ h, e}$$

$$Y_{PI} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{43,08}{2} \cong 21,54 \text{ mL.}$$

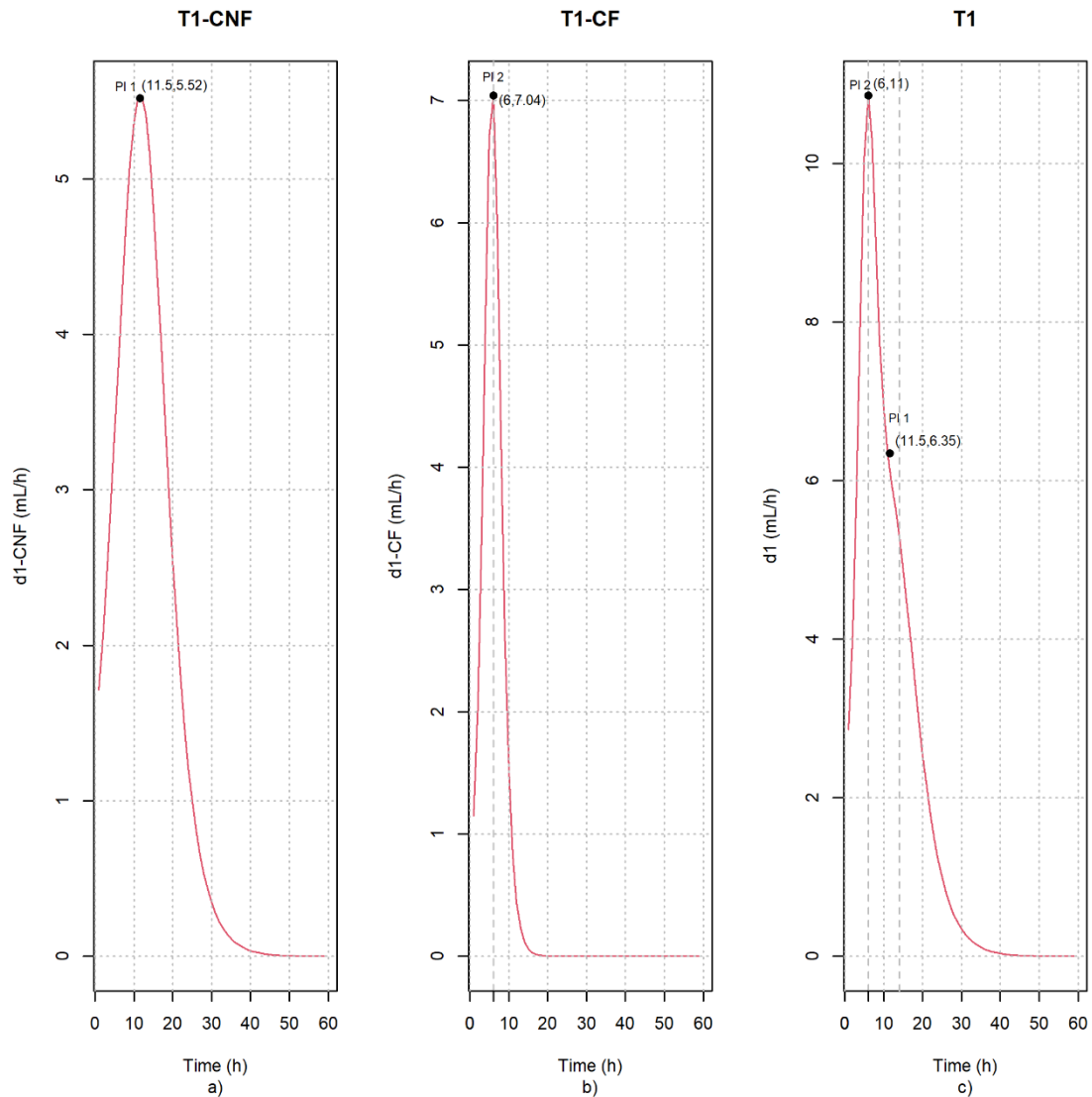
Na Figura 3 (a e b) observa-se que o valor da produção de gás nos pontos críticos é próximo dos valores teóricos calculados para os CNF (43,21 mL) e para os CF (19,89 mL).

Figura 3: T1-CNF: Primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 3a); T1-CF: Segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 3b); T1: Modelo LB completo (Figura 3c)



Na Figura 4a (T1-CNF), observa-se o ponto de Inflexão do compartimento do CNF, que tem como $t_{PI} = 11,5 h$, um valor similar ao encontrado teoricamente. Na Figura 4b (T1-CF), nota-se também o ponto de inflexão do compartimento CF. O $t_{PI} = 6 h$, que é em torno do valor encontrado pela teoria (6,16 h). Já a Figura 4c representa a primeira derivada (d1) do modelo LB.

Figura 4: Primeira derivada (d1) da dieta T1. T1-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 4a); T1-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 4b); T1: d1 do modelo LB completo (Figura 4c)



Na Figura 5 constata-se que os valores de t_{PI} são iguais a 6 e a 11,2. Como o valor de t_{PI} igual a 6 anula a derivada de segunda ordem do modelo LB na Figura 6, logo esse valor é verdadeiramente as abscissa dos ponto de Inflexão PI_2 da produção total de gases $Y(t)$. PI_1 não anula a derivada segunda de $Y(t)$ (a produção de gás total) devido à influência da componente dos CF no valor de $Y(t)$, pois a produção total de gás é a soma das duas componentes independentes.

Para o cálculo teórico do PAM e do PDM dos CNF, têm-se as equações 47 e 48:

$$t_{PAM} = -\frac{\log(2+\sqrt{3})-2}{4\hat{R}_{CNF}} + \hat{L} = -\frac{\log(2+\sqrt{3})-2}{4 \times 0,06} + 3,22 \cong 6,07h, e$$

$$t_{PDM} = -\frac{\log(2-\sqrt{3})-2}{4\hat{R}_{CNF}} + \hat{L} = -\frac{\log(2-\sqrt{3})-2}{4 \times 0,06} + 3,22 \cong 17,04 h.$$

No gráfico da Figura 5a obteve-se $t_{PAM} = 5.4 h$ e $t_{PDM} = 17 h$, resultados bastante similares ao resultado teórico.

Analogamente, o cálculo relativo ao PAM e PDM dos CF é dado por:

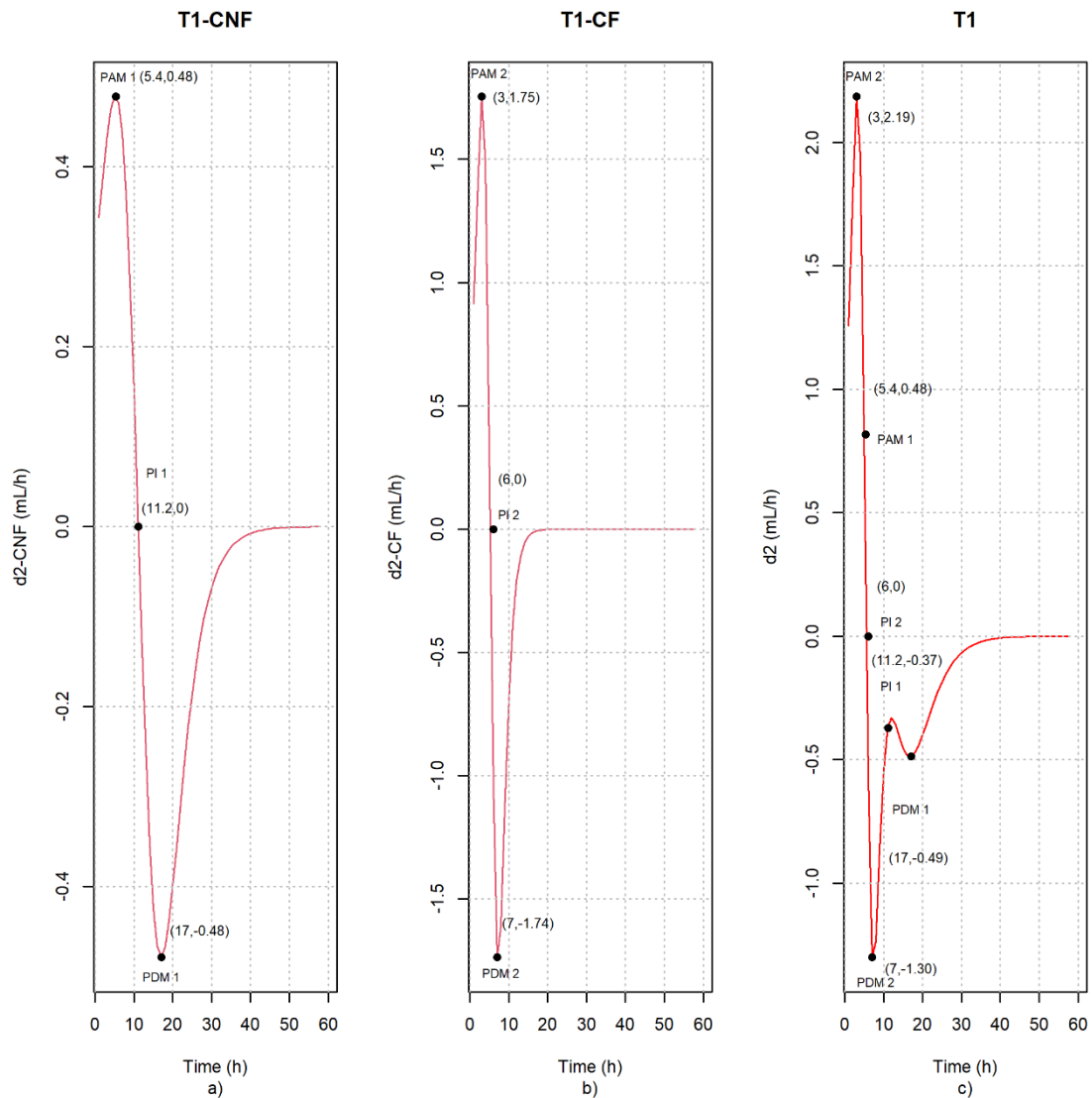
$$t_{PAM} = -\frac{(\log(2+\sqrt{3})-2)}{4K_{CF}} + L = -\frac{(\log(2+\sqrt{3})-2)}{4 \times 0,17} + 3,22 \cong 4,22 h, e$$

$$t_{PDM} = -\frac{(\log(2-\sqrt{3})-2)}{4K_{CF}} + L = -\frac{(\log(2-\sqrt{3})-2)}{4 \times 0,17} + 3,22 \cong 8,10 h.$$

Comparando o resultado teórico com o experimental (Figura 4b), pode-se constatar que a previsão feita pelo modelo foi próximo ao obtido no cálculo anterior, $\hat{t}_{PAM} = 3 h$ e $\hat{t}_{PDM} = 7 h$.

Vale salientar que quando o gráfico do modelo LB é observado (Figura 4c), os pontos críticos obtidos no estudo dos compartimentos separados, permanecem os mesmos no LB.

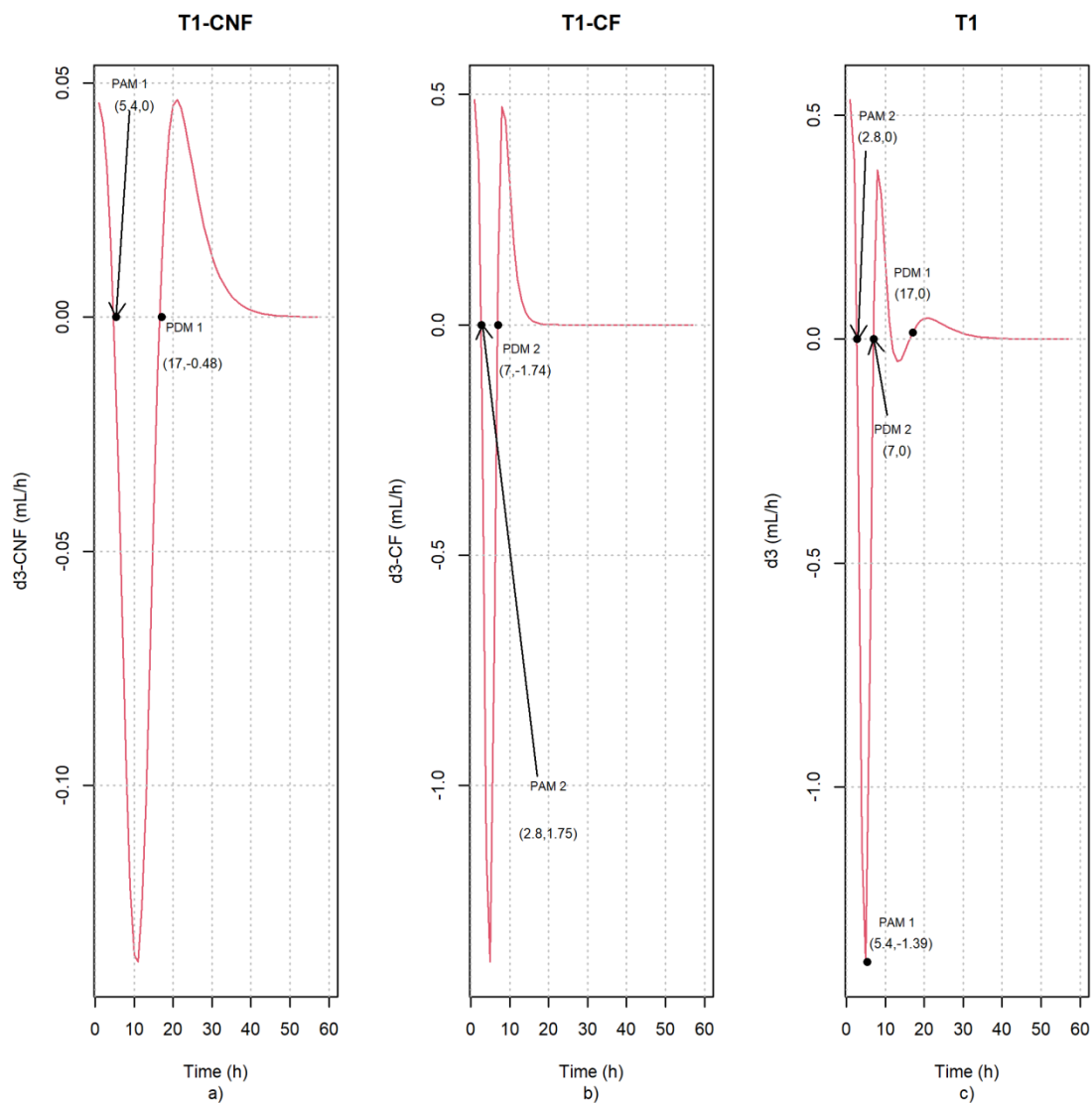
Figura 5: Segunda derivada (d2) da dieta T1. T1-CNF: d2 do primeiro compartimento do modelo LB que modela os CNF (Figura 5a); T1-CF: d2 do segundo compartimento do modelo LB que se ajusta aos CF (Figura 5b); T1: d2 do modelo LB total, que modela os dois compartimentos ao mesmo tempo (os dois tipos de carboidratos) (Figura 5c)



O gráfico da Figura 6a confirma os valores de $t_{PAM} = 5,4 h$ e $t_{PDM} = 17 h$ obtidos algebricamente para os CNF. O gráfico da Figura 6b demonstra resultado similar ao encontrado teoricamente $t_{PAM} = 2,8 h$ e $t_{PDM} = 7 h$ para a fração dos CF. No gráfico da Figura 6c, que se trata da terceira derivada do modelo LB, nota-se que todos os pontos críticos obtidos em separado nos compartimento são confirmados, exceto pelo $t_{PAM} = 5,4 h$ dos CNF.

Isso se deve à contribuição dos CF que estão na mistura, que altera a cinética da produção de gás total d3 (terceira derivada da produção de gás total). A d3-CF (terceira derivada dos CF) colabora negativamente, $d3\text{-CF}(t_{PAM}) \cong -1,4 \frac{mL}{h^3}$ (Figura 6b), o que faz com que a $d3(t_{PAM}) \cong -1,4 \frac{mL}{h^3}$ (Figura 6c) em vez de ser igual a zero neste ponto).

Figura 6: Terceira derivada (d3) da dieta T1. T1-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 6a); T1-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 6b); T1 : d3 do modelo LB (Figura 6c)



Para o cálculo teórico do tempo para atingir o ponto de desaceleração assintótica (PDA), o tempo de desaceleração assintótico (t_{PDA}) dos CNF, é dado por:

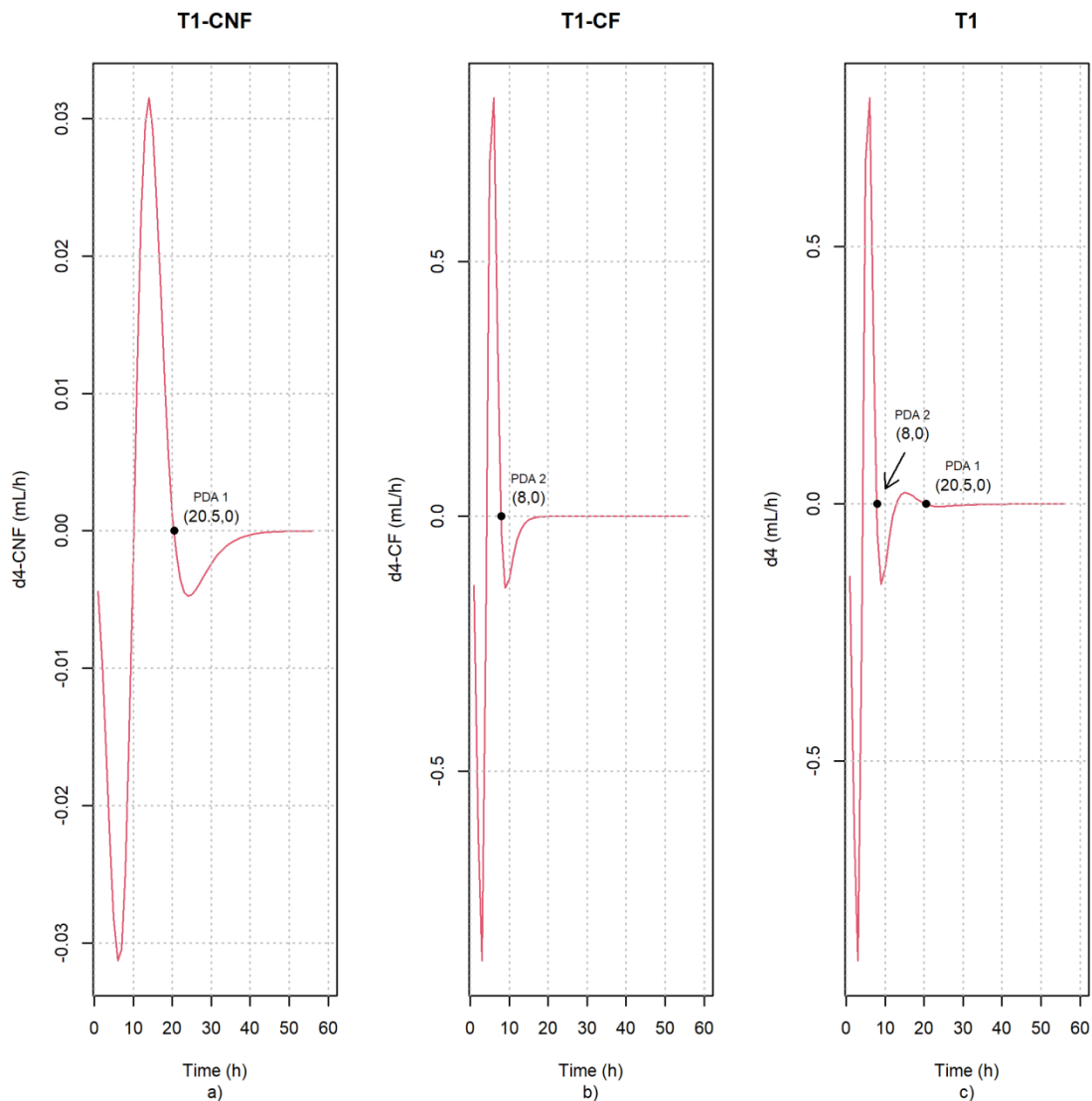
$$t_{PDA} = \frac{2-\log(5-2\sqrt{6})}{4\hat{K}} + \hat{L} = \frac{2-\log(5-2\sqrt{6})}{4 \cdot 0,06} + 3,22 = 21,105 \text{ h.}$$

Este valor teórico é aproximado do valor detectado graficamente (20,5 h) vide Figura

8a. Em relação ao t_{DA} para a CF: $t_{PDA} = \frac{2-\log(5-2\sqrt{6})}{4\hat{K}} + \hat{L} = \frac{2-\log(5-2\sqrt{6})}{4 \cdot 0,17} + 3,22 = 9,532 \text{ h.}$

Valor compatível ao encontrado graficamente (8h), identificado na Figura 7b.

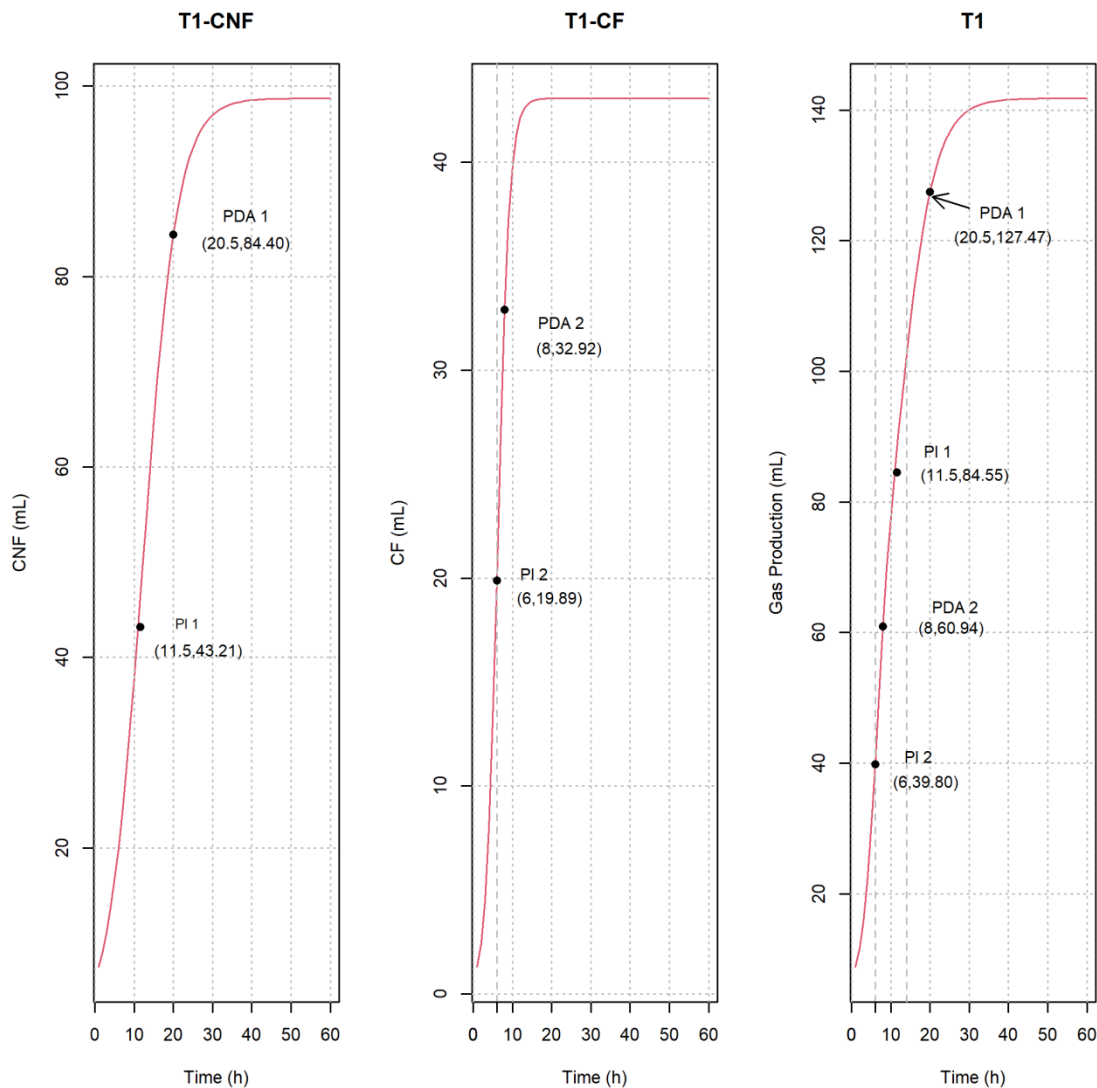
Figura 7: Quarta derivada (d4) da dieta T1. T1-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 7a); T1-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 7b); T1 : d4 do modelo LB (Figura 7c)



Para o cálculo do Y_{PDA} dos CNF: $Y_{PDA} = \frac{\hat{A}}{1,1010} = \frac{98,71}{1,1010} \cong 89,65 \text{ mL}$. Vale salientar que o valor teórico encontrado para o $Y_{DA} = 89,65 \text{ mL}$ e o gráfico é dado por 84,40 mL (Figura 8a), que são números próximos.

Já o Y_{PDA} dos CF: $Y_{PDA} = \frac{\hat{A}}{1,1010} = \frac{43,08}{1,1010} \cong 39,13 \text{ mL}$. O valor encontrado graficamente é 32,92 mL, valor semelhante ao encontrado teoricamente (39,13 mL), na Figura 8b.

Figura 8:T1-CNF: Cálculo do PDA dos CNF e dos CF. Primeiro compartimento do LB, referente à CNF (Figura 8a); T1-CF: Segundo compartimento do LB, referente à CF (Figura 8b); T1: Modelo LB completo (Figura 8c)



Na Tabela 11 observa-se o cálculo dos tempo para se alcançar os pontos críticos para todas as dietas analisadas.

Tabela 11: Cálculo teórico do tempo para se atingir os pontos críticos para as 7 dietas , T1-T7, t em h e Y em mL

Dieta	t_{PI}		Y_{PI}		t_{PAM}		t_{PDM}		t_{PDA}		Y_{DA}	
	CNF	CF	CNF	CF	CNF	CF	CNF	CF	CNF	CF	CNF	CF
1	11,55	6,16	49,35	21,54	6,07	4,22	17,07	8,10	21,11	9,53	89,65	39,13
2	10,94	5,25	38,25	17,98	5,46	3,51	16,43	6,97	20,50	8,26	69,46	32,65
3	12,74	6,91	37,48	12,19	7,26	5,26	18,23	8,56	22,30	9,78	68,08	22,13
4	10,94	5,24	40,22	17,02	5,46	3,51	16,43	6,97	20,50	8,26	73,06	30,93
5	12,91	5,54	43,59	13,72	6,33	3,81	19,49	7,27	24,37	8,56	79,18	24,92
6	10,73	5,03	41,82	16,58	5,25	3,30	16,22	6,76	20,29	8,05	75,97	30,11
7	11,47	5,77	36,98	15,70	5,99	4,04	16,96	7,50	21,03	8,79	67,18	28,51

Já na Tabela 12 consideram-se os tempos para atingir os pontos críticos observados a partir dos dados experimentais.

Tabela 12: Tempo para alcançar os pontos críticos observados para as 7 dietas, T1-T7

Dieta	t_{PI}		t_{PAM}		t_{PDM}		t_{PDA}	
	CNF	CF	CNF	CF	CNF	CF	CNF	CF
1	11,50	6,00	5,40	3,00	17,00	7,00	20,50	8,00
2	11,00	5,00	4,50	2,50	16,50	6,50	20,50	7,00
3	12,30	6,00	6,50	3,50	17,50	7,50	21,50	7,50
4	11,00	5,00	5,00	2,50	16,50	6,50	20,00	7,50
5	12,00	5,50	5,60	3,00	18,00	6,50	22,00	7,50

6	11,00	4,50	5,00	2,50	16,30	6,00	20,00	6,50
7	11,90	5,00	5,50	3,00	17,00	7,50	21,00	7,50

Na Tabela 13 observam-se os desvios do tempo do ponto de inflexão teórico e observado na amostra de produção de gás. As dietas T3 e T7 possuem os maiores desvios (13,17% e 13,75% respectivamente) para os CF, enquanto que a dieta T5 e T6 possuem os menores desvios ambas 0% para os CF. Já para os CNF as dietas T7, T6 e T3 obtiveram os piores resultados em relação à previsão do tempo do ponto de inflexão (3,75%, 3,64% e 3,45%, respectivamente). As dietas T1 e T3 obtiveram maior tempo do ponto de inflexão para os CF em relação às outras dietas estudadas, o que sugere que os os CF demoram mais tempo para serem digeridos a partir dessas dietas (T1 e T3).

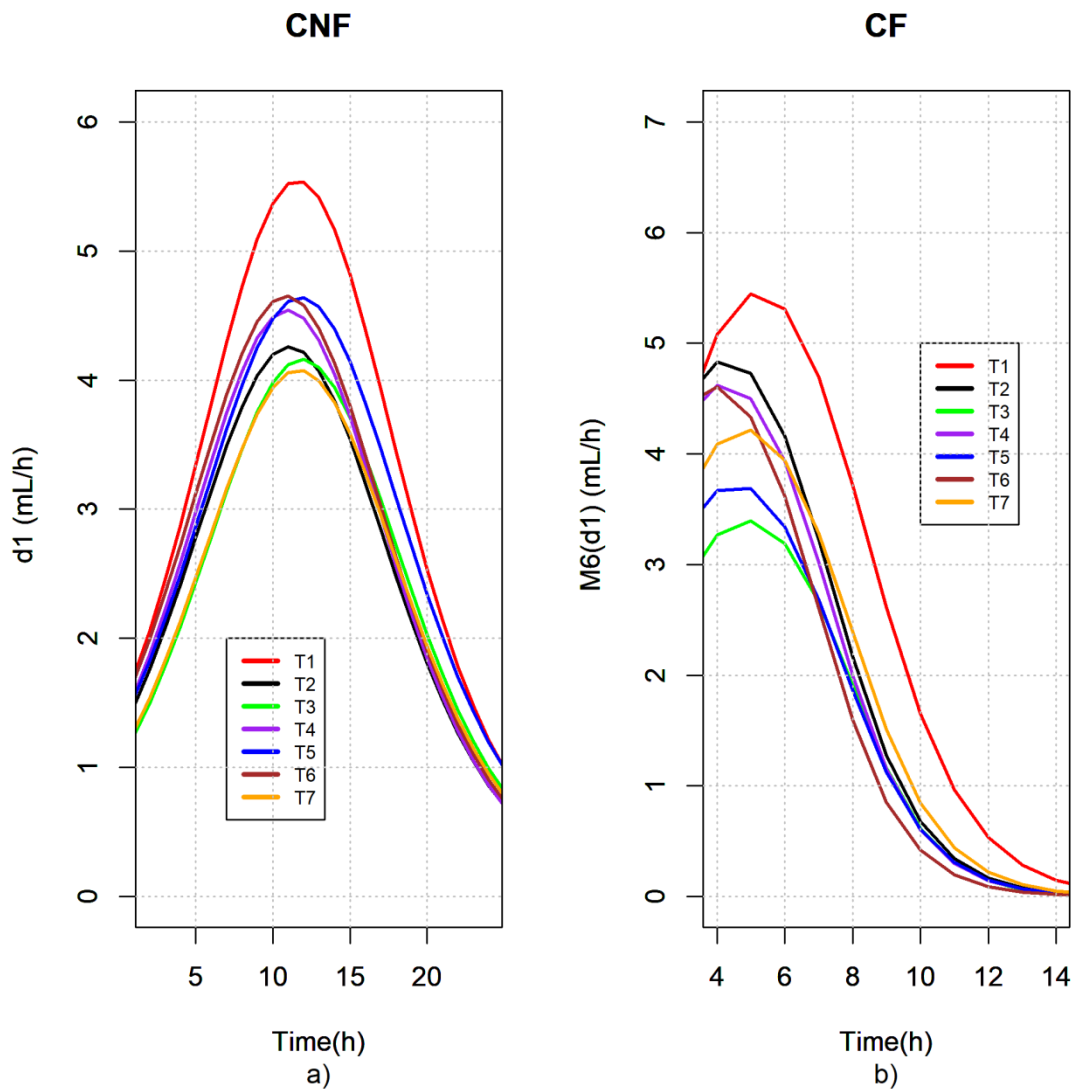
Tabela 13: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Inflexão (t_{PI}) real e teórico

Dieta	Compartimento	t_{PI} teórico	t_{PI} observado	Desvio%
T1	CNF	11,55	11,50	0,43%
	CF	6,16	6,00	2,60%
T2	CNF	10,94	11,00	0,55%
	CF	5,25	5,00	4,76%
T3	CNF	12,74	12,30	3,45%
	CF	6,91	6,00	13,17%
T4	CNF	10,94	11,00	0,55%
	CF	5,24	5,00	4,58%
T5	CNF	12,00	12,4	3,33%
	CF	5,50	5,50	0,00%
T6	CNF	11,00	11,4	3,64%

	CF	4,50	4,50	0,00%
T7	CNF	11,47	11,90	3,75%
	CF	5,77	5,00	13,35%

Na Figura 9 contempla-se a taxa de produção de gás para os CNF e para os CF. Em relação aos CNF todas as dietas demoram praticamente o mesmo tempo para atingir o máximo da taxa de produção de gás (d1), o que significa que o tempo para digerir os CNF para todas as dietas são similares. O mesmo se aplica aos CF, porém a dieta T1 aparenta retardar mais o tempo para digerir os CF, o que pode ser constatado também na Tabela 12. No entanto a dieta T1 possui a maior taxa de produção de gás tanto para os CNF quanto para os CF, o que significa que essa dieta é melhor digerida pelos Coelhos Nova Zelândia de acordo com a técnica in vitro de produção de gás.

Figura 9: Comparação da Primeira Derivada (d1) de todas as dietas, T1-T7. No gráfico dos CNF foi utilizada a média móvel com janela de 6 h



Antes do t_{PAM} e após o t_{PDM} , a produção de gás é muito lenta, porque até o t_{PAM} a dieta está no início da sua produção de gás, e após o t_{PDM} a produção de gás diminui. Finalmente, na fase do t_{PDA} , a aceleração da produção de gás pela digestão da dieta tende a se estabilizar no final de seu ciclo de produção.

A Tabela 14 apresenta o valor de t_{PAM} teórico e observado para as dietas T1 a T7. Observa-se que os desvios do t_{PAM} foram maiores nos CF, em geral em torno dos 28%. Já os CNF apresentam desvios em torno de 11% ou inferiores a esse valor. O maior t_{PAM} real

obtido tanto para os CF quanto para os CNF foi na dieta T3 (3,5h e 6,5h), o que significa que essa dieta demora mais para acelerar a sua produção de gás. Em relação aos CF, em seguida tem-se a dieta T1, T5 e T7, ambas com t_{PAM} igual a 3h. Já com relação aos CNF tem-se T5 (5,6 h), T7 (5,5h) e T1(5,4h).

Tabela 14: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Aceleração Máxima (t_{PAM}) real e teórico

Dieta	Compartimento	t_{PAM} teórico	t_{PAM} observado	Desvio%
T1	CNF	6,07	5,40	11,04%
	CF	4,22	3,00	28,91%
T2	CNF	5,46	4,50	17,58%
	CF	3,51	2,50	28,77%
T3	CNF	7,26	6,50	10,47%
	CF	5,26	3,50	33,46%
T4	CNF	5,46	5,00	8,42%
	CF	3,51	2,50	28,77%
T5	CNF	6,33	5,60	11,53%
	CF	3,81	3,00	21,26%
T6	CNF	5,25	5,00	4,76%
	CF	3,30	2,50	24,24%
T7	CNF	5,99	5,50	8,18%
	CF	4,04	3,00	25,74%

Na Tabela 15 os desvios obtidos do t_{PDM} para os CF foram os maiores em comparação aos CNF. O pior caso foi observado na dieta T1 (13,58%). Já para os CNF os piores desvios foram obtidos nas dietas T5 (7,64%) e T3 (4,00%). A dieta com maior t_{PDM} real dos CNF foi

a dieta T5 (18h), em seguida T3 (17,5h), T1 e T7 (ambas 17h). Já para os CF foram as dietas T3 e T7, ambas 7,5h, e T1 (7h). Por possuírem maiores valores de t_{PDM} , logo a dieta T5 demora mais tempo para diminuir a sua produção de gás produzidos a partir da fração dos CNF, e a dieta T3 e T7 postergam mais o início da diminuição da produção de gás dos CF.

Tabela 15: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Desaceleração Máxima t_{PDM} real e teórico

Dieta	Compartimento	t_{PDM} teórico	t_{PDM} observado	Desvio%
T1	CNF	17,07	17,00	0,41%
	CF	8,10	7,00	13,58%
T2	CNF	16,43	16,50	0,42%
	CF	6,97	6,50	6,74%
T3	CNF	18,23	17,50	4,00%
	CF	8,56	7,50	12,38%
T4	CNF	16,43	16,50	0,43%
	CF	6,97	6,50	6,74%
T5	CNF	19,49	18,00	7,64%
	CF	7,27	6,50	10,59%
T6	CNF	16,22	16,30	0,49%
	CF	6,76	6,00	11,24%
T7	CNF	16,96	17,00	0,24%
	CF	7,50	7,50	0,00%

A Tabela 16 apresenta os desvios do t_{PDA} para os CF e CNF. Tanto para os CNF e CF a dieta T3 obteve o pior resultado do desvio (3,59% e 23,31%, respectivamente). O maior t_{PDA} observado dos CNF foi na dieta T5 (22 h), seguida por T3 (21,5h). Já para os CF a dieta

T1 obteve o maior resultado (8h), logo após a dieta T3, T4, T5 e T7, essas 7,5h. A dieta T6 obteve o menor t_{PDA} tanto para os CF quanto para os CNF (6,5h e 20,0h, respectivamente), o que significa que essa dieta atinge a estabilidade antes das demais.

Tabela 16: Comparação do ponto crítico Tempo do Ponto de Desaceleração Assintótica t_{PDA} real e teórico

Dieta	Compartimento	t_{PDA} teórico	t_{PDA} observado	Desvio%
T1	CNF	21,11	20,50	2,89%
	CF	9,53	8,00	16,05%
T2	CNF	20,50	20,50	0,00%
	CF	8,26	7,00	15,25%
T3	CNF	22,30	21,50	3,59%
	CF	9,78	7,50	23,31%
T4	CNF	20,50	20,00	2,44%
	CF	8,26	7,50	9,20%
T5	CNF	24,37	22,00	2,44%
	CF	8,56	7,50	12,38%
T6	CNF	20,29	20,00	1,43%
	CF	8,05	6,50	19,25%
T7	CNF	20,29	20,00	1,43%
	CF	8,79	7,50	14,68%

4.DISCUSSÃO

A composição de diferentes dietas pode influenciar na produção de gás in vitro, e consequentemente na qualidade da nutrição dos animais. As frações fibrosas e os CNF geram

importante impacto na quantidade total de gases produzidos e na digestibilidade e degradabilidade dos ingredientes e no comportamento fermentativo dos ingredientes (Ferreira et al, 2019). Por exemplo, segundo Kara (2016) a produção total de gás ($A_{CF} + A_{CNF}$) dos carboidratos fibrosos A_{CF} e não fibrosos A_{CNF} do farelo de milho é 50% maior que a produção do farelo de arroz em coelhos, assim como a produção total de gás devido à casca de romã é 4 vezes maior que a encontrada quando utilizou-se a dieta à base de farelo de lentilha. Kara (2016) também comenta que dentre uma lista de fontes de fibras utilizadas em seu estudo, que o bagaço do tomate e a polpa de beterraba foram as bases das dietas que tiveram a maior produção de gás total. Segundo Kara (2016) o bagaço de tomate pode ser recomendado para o uso alternativo de fonte de fibras para dietas de coelhos por ter uma produção maior de gás in vitro. O aumento da produção de gás in vitro pode indicar aumento da intensidade da atividade microbiana de fermentação. O aumento da fermentação microbiana pode estar relacionada com altos teores de fibra solúvel (Kara, 2016).

A dieta referência (T1) possui a maior produção de gás total (141,79 mL), seguida da dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6, 116,79 mL), dieta semi-simplificada com base em farinha das folhas de mandioca (T5, 114,62 mL), dieta semi-simplificada com base em feno de alfafa (T4, 114,49 mL), dieta simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca (T2, 112,43 mL), dieta semi-simplificada com base na mistura de feno do terço superior da rama de mandioca e feno de alfafa (T7, 105,36mL) e por último a dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3, 99,33 mL). Machado (2010) encontrou resultados semelhantes indicando a dieta de referencia, a dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa como as dietas com potenciais máximo de produção de gás superiores aos das outras dietas analisadas. Faria et al. (2008) estudaram dietas

simplificadas com base em feno de alfafa e feno do terço superior da rama da mandioca, e concluíram que os animais que recebiam dietas simplificadas apresentaram desempenho inferior, quando comparados aos que recebiam dieta referência, no entanto os animais que receberam dietas simplificadas alcançaram ganho de peso considerável.

A digestibilidade e a degradabilidade *in vitro* da matéria seca são positivamente relacionados com a taxa de produção do gás de acordo com Ferreira et al. (2019), logo, quanto maior a taxa de produção de gás, maior a digestibilidade *in vitro* e maior a degradabilidade *in vitro* da matéria seca. As dietas analisadas apresentaram valores próximos de taxa de produção de gás em relação à fração dos CNF. Porém a dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3) e dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) apresentaram maiores valores da taxa de produção de gás dos CF (ambos 20 mL/h). Logo, deveriam apresentar maior digestibilidade e degradabilidade *in vitro*. Em relação à digestibilidade aparente das dietas estudadas, tem-se que a dieta de referência (T1) é superior a todas as dietas, obtendo maior valor de Coeficiente de digestibilidade aparente (CDa) para a proteína bruta (PB), energia bruta (EB), matéria seca (MS), e matéria orgânica (MO). Já a dieta dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) fica em segundo lugar para a MO, terceiro para a MS e quarto para a EB (Tabela 22, página 96, MACHADO, 2010). A dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3) fica em terceiro lugar em relação à PB, porém nas demais apresenta resultados inferiores à outras dietas, inclusive a dieta semi-simplificada com base em feno de alfafa (T4) (Tabela 22, página 96, MACHADO, 2010). Resultados semelhantes foram encontrados por Ferreira et al (2007) que constatou que a dieta composta de feno da rama de mandioca possui baixo coeficiente de digestibilidade, comparada com o da dieta referência, e a dieta à base do terço superior da rama de mandioca apresentou os menores valores médios para os CDa de todos os

nutrientes em relação à dieta de feno de alfafa e a dieta de referência de seu estudo. Neste estudo a taxa de produção de gás aparenta estar negativamente relacionada com a digestibilidade, pois a dieta de referência (T1) apresentou a menor taxa dos CF e teve a melhor digestibilidade.

Baixos valores da latência podem sugerir que o inóculo se adaptou melhor ao substrato/dieta, mas também pode denotar uma composição menos complexa com menos disponibilidade de nutrientes, com teores de hemicelulose, acelerando o processo de fermentação (Lavrenčič, 2007). Nestes casos, podem ocorrer a depressão do crescimento e a fermentação microbiana, resultando em autólise e possível fermentação de bactérias mortas pelos remanescentes (Calabrò et al., 2013). O menor valor encontrado para a latência foi na dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6, 2.40h), e o maior na dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3, 3.41 h), seguida da dieta referência (T1, 3.22 h) e dieta semi-simplificada com base na mistura de feno do terço superior da rama de mandioca e feno de alfafa (T7, 3.14 h). Resultados semelhantes foram encontrados por MACHADO (2010) que obteve as dietas T1, T3 e T7 com os maiores valores do Lag time em seu estudo com o modelo de France et al. (1993).

Identifica-se o ponto de aceleração máxima (PAM) a passagem de um crescimento lento para um mais acelerado. Depois desse ponto, a característica em estudo atinge o ponto de inflexão (PI) e começa a desacelerar até atingir a desaceleração máxima (PDM). Posteriormente, ao atingir o ponto de crescimento de equilíbrio, ocorre o ponto conhecido como desaceleração assintótica (PDA) (Teixeira et al, 2021). O ponto de inflexão (PI) significa a transição da taxa de crescimento de crescente para decrescente (DIEL et al 2020).

O intervalo entre o PAM e o PDM indica a concentração da produção (DIEL et al, 2020), e um menor intervalo entre esses dois pontos indica concentração da produção em menos tempo (SARI, 2018). Em relação aos CNF da dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca (T5) obteve a maior diferença entre o PAM e o PDM (teórico 13.16 h, real 12.4 h), portanto essa dieta concentra a produção de gás da fração dos CNF em mais tempo. Já a dieta referência (T1) obteve a maior diferença entre o PAM e o PDM da produção de gases referente aos CF (3.88h), logo essa dieta concentra a produção de gás da fração de CF em mais tempo; as dietas: dieta simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca (FFM) e feno de alfafa (T2), dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3), dieta semi-simplificada com base em feno de alfafa (T4), dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) e dieta semi-simplificada com base na mistura de feno do terço superior da rama de mandioca e feno de alfafa (T7) possuem a mesma diferença entre o PAM e PDM teórico da fração dos CNF, no entanto a diferença entre o PAM e PDM real a dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3) obteve a menor diferença (11 h). O dado real aponta as dietas semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca (T5) e dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) com menor diferença entre PAM e PDM nos CF (ambos 3.5 h). Segundo Sari et al. (2018), um curto intervalo entre o PAM e PDM sugere um rápido desenvolvimento da característica em estudo. Teixeira et al (2021) não conseguiram estimar o PAM para a curva de crescimento de cavalos da raça Campolina, pois os mesmos possuíam PAM inferior a 6 meses de idade, e os dados coletados eram superiores a 6 meses de idade, logo não conseguiram também calcular a diferença entre o PAM e o PDM. Já Sari et al (2018) conseguiu estabelecer essa relação de diferença entre o PAM e PDM em seus dados, indicando onde a produção foi mais concentrada.

Segundo Sari et al (2018) o momento da ocorrência do PI é caracterizado por ter a taxa máxima de produção de frutas, que no contexto do presente estudo seria a taxa máxima de produção de gás. Sari et al (2018) denominam o tempo para se alcançar o PI de precocidade produtiva. Os autores trazem como exemplo que, no contexto da produção de alimentos, se para o genótipo 1 o PI for alcançado antes do Genótipo 2, podemos concluir que a produção desse genótipo foi mais precoce, embora o genótipo 2 tenha começado a produzir frutos antes. Assim, no contexto da produção de gases, no presente estudo, a dieta simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T2) e dieta semi-simplificada com base em feno de alfafa (T4) obtiveram os menores valores do tempo para atingir o PI (ambos 10.94 h) em relação à fração dos CNF. Já a dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) obteve o menor valor do tempo para atingir o PI (4.5 h) em relação aos CF. Portanto essas dietas foram precoces produtivas.

O momento da ocorrência do PAM indica a lentidão da produção inicial (e o quanto o comportamento é sigmóide), além de ajudar a verificar o grau de maturação do fenômeno no início do processo. Quanto mais tarde o PAM ocorrer, menor será o aumento da produção, indicando um menor grau de maturação do fenômeno estudado (SARI et al , 2018). A dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3) obteve o maior valor real para atingir o PAM tanto para os CNF (6.5 h), quanto para os CF (3.5 h), o que indica que essa dieta teve um menor aumento da produção entre todas as dietas, e um menor grau de maturação da digestão dos carboidratos. Já a dieta simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T2) obteve o menor valor real para atingir o PAM (4.5h), seguidas das dietas semi-simplificada com base em feno de alfafa (T4) e semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de

alfafa (T6) (ambas 5h). Isso significa que essas dietas tiveram os maiores aumentos de produção de gás entres todas as dietas estudadas.

Segundo Teixeira et al (2021) um maior valor da taxa de produção \hat{K} , os pontos PI, PAM, PDM e PDA são atingidos mais rapidamente. Pode-se constatar que as dietas semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3) e semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) obtiveram os maiores valores da taxa de produção de gás referente à fração dos CF (0,20 mL/h para ambas as dietas). Logo, essas dietas deveriam atingir os pontos críticos mais rapidamente, no entanto, somente a dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) seguiu essa lógica. Isso deve ser explicado pelo fato da dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3) possuir um alto valor de latência, o maior de todas as dietas. Segundo Sari et al (2018) valores mais altos da taxa de produção \hat{K} reduz o tempo entre o início e o fim das colheitas, que no contexto da produção de gás in vitro pode ser interpretado como início e fim da produção dos gases. Além disso, Sari et al (2018) afirmam que quando a taxa de produção é maior, o ritmo de produção é maior e o PI ocorre mais cedo. Finalmente, os valores mais altos da taxa de produção encurtam o tempo entre PAM e PDM, ou seja, quanto mais cedo a ocorrência do PI e o menor tempo entre MAP e MDP indicam que, na prática, a taxa de produção de gás pode ser utilizada para interpretar quão precoce foi a produção e em quantas horas a produção de gás estava concentrada. Foi constatado no parágrafo anterior que a dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) obteve maior valor de taxa de produção de gases $\hat{K} = 0,2$ mL/h e obteve menor valor para a diferença entre PAM e MDP nos dados reais dos CF, assim dizendo, indica a concentração da produção de gases dessa fração em menos tempo.

Este presente trabalho deduziu as equações do PI, PAM, PDM e PDA a partir do modelo logístico com parametrização para a produção de gases, logo as equações resultantes do PI, PAM, PDM e PDA são mais apropriadas para serem aplicadas na fenomenologia da produção de gases *in vitro*. Shofield et al. (1994) calcularam o PI para seu modelo logístico modificado. Se fizermos $C = \frac{\mu_m}{a}$ (μ_m é taxa máxima de produção de gás, que ocorre no ponto de inflexão da curva do gás), $A = V_F$, $L = \lambda$, a equação do tempo para atingir o PI (t_{PI}), obtida no apêndice, se torna igual a Shofield et al. (1994). As equações do t_{PAM} e t_{PDM} obtidas no presente estudo, são similares às encontradas por Zwietering et al. (1992), bastando fazer $C = \frac{\mu_m}{a}$ (μ_m é taxa máxima de crescimento bacteriano), $A = a$, $L = \lambda$. No entanto, estas equações descrevem o crescimento bacteriano, ao passo que, neste trabalho, descrevem a consequência metabólica do crescimento das células em termos da produção de gás. Senol (2020) identificou os valores de PI, PAM, PDM e PDA nas curvas de produção de biogás metano para fins energéticos, porém não disponibilizou nenhuma equação para os pontos de estabilização PI, PAM, PDM e PDA em seu artigo. Neste presente trabalho, cada compartimento do modelo logístico bicompartimental é decorrente de uma causa em separado, um compartimento se refere à degradação dos CNF e o outro compartimento dos CF. Segundo Wang et al. (2011) o modelo unicompartmental pode ser estendido para uma análise de dois compartimentos se o substrato potencialmente degradável é composto por dois componentes, sendo uma fração de degradação rápida e uma fração de degradação lenta. Os fenômenos com mais de um compartimento em que a variável resposta $Y(t)$ possui mais de uma causa de ocorrência, cada qual responsável por um compartimento em separado, os pontos de estabilização podem ser calculados para cada compartimento individualmente. Embora se formos derivar o modelo LB, os valores dos pontos críticos sejam possivelmente diferentes do modelo Logístico unicompartmental (Mischán et al. 2015), no entanto, por os processos de produção de gás dos CF e CNF serem considerados independentes, as

componentes de produção de gás podem ser calculadas em separado, logo os tempos de alcance dos pontos críticos podem ser calculados devido a produção de CF e CNF de modo separado. Isso é uma consequência do fenômeno e não puramente matemática. Existem indícios que parte dos pontos críticos obtidos a partir do modelo bicompartimental em si podem não ter significado biológico por serem apenas um anulamento de componentes positivas e negativas, gerando um ponto “crítico aparente”, que não tem correlação com o fenômeno. Este problema não ocorre se as componentes dos CF e CNF forem analisadas em separado por modelos unicompartmentais, seguindo o método desenvolvido no presente trabalho.

5.CONCLUSÃO

As dietas: semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6), semi-simplificada com base em feno de alfafa (T4) e simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T2) obtiveram os maiores aumentos de produção de gás entres todas as dietas estudadas. As dietas: simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T2) e simplificada com base em feno de alfafa (T4) foram precoces produtivas em relação à fração dos CNF. A dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6) obteve maior precocidade na produção de gases e obteve menor tempo para a concentração da produção dos gases referentes à fração dos CF. A dieta de referência (T1) concentra a produção de gás da fração de CF em mais tempo. Embora a dieta de referência (T1) proporcione a maior produção de gás total, as dietas semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T6), semi-simplificada com base em feno de alfafa (T4), simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca e feno de alfafa (T2) e dieta semi-simplificada com base na mistura de farinha das folhas de mandioca (T5) se mostraram alternativas viáveis para a produção de coelhos da raça Nova

Zelândia. A dieta semi-simplificada com base em feno do terço superior da rama da mandioca (T3) e a dieta semi-simplificada com base na mistura de feno do terço superior da rama de mandioca e feno de alfafa (T7) obtiveram os piores resultados dentre os parâmetros estudados, não sendo recomendadas para a dieta de coelhos Nova Zelândia. As equações deduzidas para o cálculo do PI, PAM, PDM e PDA do modelo logístico para produção de gases se mostrou importante para a interpretação biológica do fenômeno estudado.

Capítulo 4: Considerações Finais

Neste capítulo discorreremos sobre a conclusão final do trabalho.

Pode-se constatar a eficácia do novo método de geração de modelos por combinação de modelos pré-existentes adicionado da operação de composição de funções proposto no capítulo 2 (De Figueiredo et al 2023). A partir desse novo método, pode-se criar um novo modelo unicompartmental, que obteve resultados superiores aos modelos clássicos consagrados de crescimento animal.

No capítulo 3 foram deduzidas as equações dos tempos para atingir os pontos de estabilização para o modelo logístico modificado reparametrizado e foram aplicadas a cada compartimento do modelo logístico bicompartimental. Esses tempos se mostraram competentes para fornecer interpretações biológicas importantes do fenômeno da produção de gases in vitro no contexto da escolha de dietas para a nutrição animal de coelhos.

Em estudos futuros pretende-se utilizar o novo modelo de crescimento animal criado no capítulo 2 para analisar a cinética ruminal em um modelo bicompartimental e calcular os pontos de estabilização desse modelo.

RERERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGGREY, S. E. Comparison of three nonlinear and spline regression models for describing chicken growth curves. **Poultry science**, v.81, p. 1782-1788, 2002.

AKAIKE, Hirotugu. Statistical predictor identification. **Annals of the institute of Statistical Mathematics**, v. 22, n. 1, p. 203-217, 1970.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control, Ieee**, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.

AKAMINE, T. Non-linear and graphical methods for fish stock analysis with statistical modeling. **Aqua-BioScience Monographs**, v. 2, n. 3, 2009.

AL-ALI, M. R., RAZUKI, W. M., AL-ANBARI, E. H. Characterization of Growth Curve Patterns for Iraqi Indigenous Chickens through Nonlinear Growth Models. **Indian Journal of Ecology**, n. 20, p. 324-331, 2020.

APOSTEL, L. Toward the formal study of models in the non-formal sciences. In: FREUDENTHAL, H. The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences Amsterdam : Dordrecht, p.1-37, 1991

ACOSTA-LOZANO, N.; BARROS-RODRÍGUEZ, M.; GUSHICA-CUNUHAY, C.; ANDRADE-YUCAILLA, V.; CONTRERAS-BARROS, K.; SANDOVAL-CASTRO, C.; ELGHANDOUR, M.M.M.Y.; ZEIDAN M.S., A Potential Effect of Dietary Supplementation of Tannin-Rich Forage on Mitigation of Greenhouse Gas Production, Defaunation and Rumen Function. **Veterinary Sciences**, v. 10, n. 7, p. 467, 2023.

BEM, C.M., CARGNELUTTI FILHO, A., CARINI, F., PEZZINI, R.V. Univariate and multivariate nonlinear models in productive traits of the sunn hemp. **Revista Ciência Agronômica**, v. 51, 2020.

BERTALANFFY, L. V. Quantitative laws in metabolism and growth. **The Quarterly Review of Biology**, v. 32, p. 217–230, 1957.

BERTALANFFY, L. V., 1957. Quantitative laws in metabolism and growth. **The Quarterly Review of Biology**, v.32, p. 217–230, 1957.

BISCARINI, F., BOVENHUIS, H., ELLEN, E. D., ADDO, S., VAN ARENDONK, J. A. M. Estimation of heritability and breeding values for early egg production in laying hens from pooled data. **Poultry science**, 89, 1842-1849, 2010.

BOVERA, F.; D'URSO, S.; CALABRO`, S.; DI MEO, C.; TUDISCO, R.; NIZZA, A. Prediction of rabbit caecal fermentation characteristics from faeces by in vitro gas production technique: roughages. **Journal of animal physiology and animal nutrition**, v. 92, n. 3, p. 260-271, 2008.

BOVERA, F., CALABRO, S., CUTRIGNELLI, M. I., INFASCELLI, F., PICCOLO, G., NIZZA, S., NIZZA, A. Prediction of rabbit caecal fermentation characteristics from faeces by in vitro gas production technique: roughages. **Journal of Animal Physiology and Animal Nutrition**, v. 92, n. 3, p. 260-271, 2008.

BRODY, S., 1945. Bioenergetics and growth. [S.l.]: Reinhold Publishing Corporation: New York.

BRUNNER, N., KÜHLEITNER, M., NOWAK, W. G., RENNER-MARTIN, K., SCHEICHER, K. Comparing growth patterns of three species: Similarities and differences. **PloS one**, 14, e0224168, 2019.

CAO, L., SHI, P. J., LI, L., & CHEN, G. A new flexible sigmoidal growth model. **Symmetry**, v. 11, n. 2, P. 204, 2019.

Carini, F., Cargnelutti Filho, A., Pezzini, R.V., Souza, J.M., Chaves, G.G., Provedi, A. Nonlinear models for describing lettuce growth in autumn-winter. **Ciência Rural**. v. 50, e20190534, 2020.

CALABRÒ, S., CARCIOFI, A.C., MUSCO, N., TUDISCO, R., GOMES, M.O.S. Fermentation characteristics of several carbohydrate sources for dog diets using the in vitro gas production technique. **Italian Journal of Animal Science**, v. 12, n. 1, p. e04, 2013.

CERON, M. S., OLIVEIRA, V. D., PIEVE, N. A. N. N., SILVA, N. C. D., ROSSI, C. A. R., FRAGA, B. N., KESSLER, A. D. M. Equações não lineares para determinar a curva de crescimento de suínos imunocastrados. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 55, n. X, p.01184, 2020.

CHAKRABARTI, A., & GHOSH, J. K. AIC, BIC and recent advances in model selection. **Philosophy of statistics**, p. 583-605, 2011.

CHEN, S. Y., LIAO, Y., WANG, Z., GLORIA, L. S., ZHANG, K., ZHANG, C., LAI, S. 2021. Genome-wide association studies for growth curves in meat rabbits through the single-step nonlinear mixed model. **Frontiers in genetics**, v. 12, p. 750939, 2021.

CORRALES, J. D., MUNILLA, S., CANTET, R. J. C. Polynomial order selection in random regression models via penalizing adaptively the likelihood. **Journal of Animal Breeding and Genetics**, v. 132, n. 4, p. 281-288, 2015.

DE BLAS, J. C.; MATEOS, G. G. Feed formulation. In: DE BLAS, J. C.; WISEMAN, J. The nutrition of the rabbit. Cambridge: CAB International, p. 241-253, 1998.

DIEL, M.I., LUCIO, A.D., VALERA, O.V.S., SARI, B.G., OLIVOTO, T., PINHEIRO, M.V.M., MELO, P.J., TARTAGLIA, F.L., SCHIMDT, D. Production of biquinho pepper in different growing seasons characterized by the logistic model and its critical points. **Ciência Rural**, v. 50, p. e20190477, 2020.

DOMÍNGUEZ-VIVEROS, J., RODRÍGUEZ-ALMEIDA, F. A., AGUILAR-PALMA, G. N., CASTILLO-RANGEL, F., SAIZ-PINEDA, J. F., VILLEGAS-GUTIÉRREZ, C. Fitting of non-linear models to characterize the growth of five zebu cattle breeds. **Livestock Science**, v. 242, p. 104303, 2020.

DE FIGUEIREDO, M. P. S., MOREIRA, G. R., DE BRITO, C. C. R., GOMES-SILVA, F., DOS SANTOS, A. L. P., DA COSTA, M. L. L., DO AMARAL, L. S. Method to generate growth and degrowth models obtained from existing models compositions applied to animal sciences—The Athens-Canadian chicken growth case. **Livestock Science**, v. 269, p. 105162, 2023.

DOWNING, D, CLARK, J. Business Statistics. Nova Yorque, Barron's Educational Series, 2006.

DOS SANTOS, A. L. P., MOREIRA, G. R., DE BRITO, C. C. R., GOMES-SILVA, F., DA COSTA, M. L. L., PIMENTEL, P. G., MIZUBUTI, I. Y. Method to generate growth and degrowth models obtained from differential equations applied to agrarian sciences. **Semina: Ciências Agrárias**, 39(6), 2659-2672, 2018.

DOS SANTOS, A. L. P., MOREIRA, G. R., GOMES-SILVA, F., BRITO, C. C. R. D., DA COSTA, M. L. L., PEREIRA, L. G. R., FILHO, M. C. Generation of models from existing models composition: An application to agrarian sciences. **PloS one**, v. 14, n. 12, p. e0214778, 2019.

DOS SANTOS, A. L. P., DA SILVA, F. S. G., MOREIRA, G. R., DE BRITO, C. C. R., DA COSTA, M. L. L., CUNHA FILHO, M., GONÇALVES, N. C. Proposals of non-linear models to adjust in vitro gas production at different incubation times in cassava genotypes. **Ciência e Natura**, 43, e22-e22, 2021.

ELZHOV, T. V., MULLEN, K. M., SPIESS, A. N., BOLKER, B., MULLEN, M. K. M., & SUGGESTS, M. A. S. S. Package 'minpack. lm'. Title R Interface Levenberg-Marquardt Nonlinear Least-Sq. Algorithm Found MINPACK Plus Support Bounds, 2016.

FARIA, H. G. D., FERREIRA, W. M., SCAPINELLO, C., & OLIVEIRA, C. E. Á. D. Efeito da utilização de dietas simplificadas, à base de forragem, sobre a digestibilidade e o

desempenho de coelhos Nova Zelândia. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 37, n. 10, p. 1797-1801, 2008.

FERNANDES, F. A., FERNANDES, T. J., PEREIRA, A. A., MEIRELLES, S. L. C., COSTA, A. C. Growth curves of meat-producing mammals by von Bertalanffy's model. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 54, p. e01162, 2019.

FERREIRA, F. N. A., FERREIRA, W. M., NETA, C. S. S., DA SILVA INÁCIO, D. F., DAS NEVES MOTA, K. C., DA COSTA JÚNIOR, M. B., DE OLIVEIRA FONTES, D. Effect of dietary inclusion of dried or autoclaved sugarcane bagasse and vinasse on live performance and in vitro evaluations on growing rabbits. **Animal Feed Science and Technology**, v. 230, p. 87-95, 2017.

FERREIRA, F. N. A., FERREIRA, W. M., DA SILVA INÁCIO, D. F., NETA, C. S. S., DAS NEVES MOTA, K. C., DA COSTA JÚNIOR, M. B., CAICEDO, W. O. In vitro digestion and fermentation characteristics of tropical ingredients, co-products and by-products with potential use in diets for rabbits. **Animal feed science and technology**, v. 252, p. 1-10, 2019.

FERRO, M. M., DE MOURA, D. C., DA COSTA, F. G., DE OLIVEIRA, E. B., FERRO, R. M., DA SILVA CABRAL, L. Parâmetros de degradação ruminal e digestibilidade in vitro de dietas para ruminantes utilizando diferentes níveis de coprodutos industriais. **Nativa**, v. 8, n. 4, p. 533-537, 2020.

FRANCE, J., DHANOA, M. S., THEODOROU, M. K., LISTER, S. J., DAVIES, D. R., ISAC, D. A model to interpret gas accumulation profiles associated with in vitro degradation of ruminant feeds. **Journal of theoretical biology**, v. 163, n. 1, p. 99-111, 1993.

FREITAS, A. R. D. (2005). Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 34, p. 786-795, 2005.

FU, X. Y., MO, W. P., ZHANG, J. Y., ZHOU, L. Y., WANG, H. C., HUANG, X. M. Shoot growth pattern and quantifying flush maturity with SPAD value in litchi (*Litchi chinensis* Sonn. **Scientia Horticulturae**, v. 174, p. 29-35, 2014.

GOMPertz, B. XXIV. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. In a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, n.115, p. 513-583, 1825

GROOT, J. C., CONE, J. W., WILLIAMS, B. A., DEBERSAQUES, F. M., LANTINGA, E. A. (1996). Multiphasic analysis of gas production kinetics for in vitro fermentation of ruminant feeds. **Animal Feed Science and Technology**, v. 64, n. 1, p. 77-89. 1996.

HERNANDEZ-L LAMAS, A., RATKOWSKY, D. A. Growth of fishes, crustaceans and molluscs: estimation of the von Bertalanffy, Logistic, Gompertz and Richards curves and a new growth model. **Marine Ecology Progress Series**, v. 282, p. 237-244, 2004.

HERNANDEZ, Juan Carlos Angeles et al. Ensiling on chemical composition and in vitro fermentation in rabbits of different forages. **Ciência Rural**, v. 47, 2017.

HOU, C., ZUO, W., MOSES, M. E., WOODRUFF, W. H., BROWN, J. H., WEST, G. B. Energy uptake and allocation during ontogeny. **science**, v. 322, n. 5902, p. 736-739, 2008.

Hurvich, C. M., Tsai, C. L. Bias of the corrected AIC criterion for underfitted regression and time series models. **Biometrika**, v. 78, n. 3, p. 499-509, 1991.

LAIRD, A. K. Dynamics of relative growth. **Growth**. v. 29, p. 249-263, 1965.

LAVRENCIC, A. The effect of rabbit age on in vitro caecal fermentation of starch, pectin, xylan, cellulose, compound feed and its fibre. **Animal**, v.1, p. 241–248, 2007.

LEITE, L. A., REIS, R. B., PIMENTEL, P. G., SATURNINO, H. M., COELHO, S. G., MOREIRA, G. R. Performance of lactating dairy cows fed sunflower or corn silages and

concentrate based on citrus pulp or ground corn. **Revista Brasileira de Zootecnia**. v. 46, p. 56-64, 2017.

KARA, KANBER. Effect of dietary fibre and condensed tannins concentration from various fibrous feedstuffs on in vitro gas production kinetics with rabbit faecal inoculum. **Journal of Animal and Feed Sciences**, v. 25, n. 3, 2016.

KOOIJMAN, S. A. L. M. Energy budgets can explain body size relations. *Journal of Theoretical Biology*, v. 121, n. 3, p. 269-282, 1986.

KOOIJMAN, B., KOOIJMAN, S. A. L. M. Dynamic energy budget theory for metabolic organisation. **Cambridge university press**, 2010.

KEARNEY, M. R. What is the status of metabolic theory one century after Pütter invented the von Bertalanffy growth curve?. **Biological Reviews**, v. 96, n. 2, p. 557-575, 2021.

KÜHLEITNER, M., BRUNNER, N., NOWAK, W. G., RENNER-MARTIN, K., SCHEICHER, K. Best-fitting growth curves of the von Bertalanffy-Pütter type. **Poultry science**, v. 98, p. 3587-3592, 2019.

MACHADO, Luiz Carlos. Avaliação da parte aérea de cultivares de mandioca, desempenho e digestibilidade em dietas simplificadas e semi-simplificadas com ou sem suplementação enzimática para coelhos em crescimento. Tese apresentada ao programa de Pós-graduação da Escola de Veterinária da Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

MAERTENS L.; PEREZ J. M.; VILLAMIDE M., CERVERA, C., GIDENNE, T., XICCATO, G. Nutritive value of raw materials for rabbits: Egran tables 2002. **World Rabbit Science**, v. 10, n. 4, p. 157- 166, 2002.

MAURICIO, RM., MOULD, FL., DHANOA, MS., OWEN, E., CHANNA, KS., THEODOROU, MK. Semi-automated in vitro gas production technique for ruminant feedstuff evaluation. **Anim Feed Sci Technol**, v. 79, n. 4, p. 321–330, 1999.

MATA-ESTRADA, ANALY, GONZÁLEZ-CERÓN, F., PRO-MARTÍNEZ, A., TORRES-HERNÁNDEZ, G., BAUTISTA-ORTEGA, J., BECERRIL-PÉREZ, C. M., SOSA-MONTES, E. Comparison of four nonlinear growth models in Creole chickens of Mexico. **Poultry Science**. V. 99, p. 1995-2000, 2020.

MCFADDEN, D. Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. Zarembka, **Frontiers in Econometrics**, Academic Press., *New York.*, p. 105-142, 1974.

MENDES, M. Growth curves for body weight and some body measurement of Ross 308 broiler chickens. **Journal of Applied Animal Research**, v. 36, p. 85-88, 2009.

MELLO, R., MAGALHÃES, A. L. R., BREDA, F. C., REGAZZI, A. J., 2008. Modelos para ajuste da produção de gases em silagens de girassol e milho. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 43, p. 261-269, 2008.

MENARD, Scott. Coefficients of determination for multiple logistic regression analysis. **The American Statistician**, v. 54, n. 1, p. 17-24, 2000.

MISCHAN, MM., PINHO, SZ., CARVALHO, LR. Determination of a point sufficiently close to the asymptote in nonlinear growth functions. **Scientia Agricola**, v. 68, p. 109-114, 2011.

MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. Modelos não lineares: funções assintóticas de crescimento. **Cultura Acadêmica: São Paulo**, 2014.

MISCHAN, M. M., PASSOS, J. R. D. S., PINHO, S. Z. D., CARVALHO, L. R. D. Inflection and stability points of/ diphasic logistic analysis of growth. **Scientia Agricola**, v. 72, p. 215-220, 2015.

MOSES, M. E., HOU, C., WOODRUFF, W. H., WEST, G. B., NEKOLA, J. C., ZUO, W., & BROWN, J. H. Revisiting a model of ontogenetic growth: estimating model parameters from theory and data. **The American Naturalist**, v. 171, n. 5, p. 632-645, 2008.

MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C. Applied Statistics and Probability for Engineers. **A John Wiley & Sons, inc**, 2007.

NELDER, J. The fitting of a generalization of the logistic curve. **Biometrics**, v. 17, p. 89-110, 1961.

NGUYEN, T.H., NGUYEN, C.X., LUU, M.Q., NGUYEN, A.T., BUI, D.H., PHAM, D.K. AND DO, D.N. Mathematical models to describe the growth curves of Vietnamese Ri chicken. **Brazilian Journal of Biology**, v. 83, p. e249756, 2021.

ØRSKOV, E. R., MCDONALD, I. The estimation of protein degradability in the rumen from incubation measurements weighted according to rate of passage. **The Journal of Agricultural Science**, v. 92, n. 2, p. 499-503, 1979.

ROSTAGNO H. S. Tabelas brasileiras para aves e suínos: composição de alimentos e exigências nutricionais. 2 ed. Viçosa: UFV, Departamento de Zootecnia, 2005. 186 p.

RICHARDS, F. A flexible growth function for empirical use. **Journal of experimental Botany, Oxford University Press**, v. 10, n. 2, p. 290-301, 1959.

Ricklefs, RE. "Is rate of ontogenetic growth constrained by resource supply or tissue growth potential? A comment on West et al.'s model." **Functional Ecology**, p. 384-393, 2003.

RODRIGUES, M. A. M., FONSECA, A. J. M., SEQUEIRA, C. A., DIAS-DA-SILVA, A. A. Digestion kinetic parameters from an in vitro gas production method as predictors of voluntary intake of forage by mature ewes. **Animal Feed Science and Technology**, v. 95, n. 3-4, p. 133-142, 2002.

RODRIGUES, J. A., DE ABREU, J. G., ABREU, M. L. C., ASSIS, L. M. B., DA ROCHA, N. T., DE SOUZA JÚNIOR, V. B., XAVIER, M. F. N. Parâmetros cinéticos de produção de gás in vitro de diferentes genótipos de capim-elefante (*Pennisetum purpureum* schum.). **Veterinária e Zootecnia**, v. 28, p. 1-8, 2021.

SANUSI, A., OSENI, S. Nigerian Fulani ecotype chickens: Estimation of growth curve parameters. **Genetics & Biodiversity Journal**, v. 4, n. 1, p. 1-13, 2020.

SARMENTO, J. L. R., REGAZZI, A. J., SOUSA, W. H. D., TORRES, R. D. A., BREDA, F. C., MENEZES, G. R. D. O. Estudo da curva de crescimento de ovinos Santa Inês. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v.35, n.2, p.435-442, 2006.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics, Institute of Mathematical Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.

SOUSA, J. E. R., SILVA, M. A., SARMENTO, J. L. R., SOUSA, W. H., SOUZA, M. S. M. Avaliação da trajetória média de crescimento de caprinos em modelos de regressão aleatória. **Archivos de zootecnia**, v. 59, n. 226, p. 267-276, 2010.

STOICA, P., BABU, P. Model order estimation via penalizing adaptively the likelihood (PAL). **Signal Processing**, v. 93, p. 2865-2871, 2013.

OHNISHI, S., YAMAKAWA, T., AKAMINE, T. On the analytical solution for the Pütter–Bertalanffy growth equation. **Journal of Theoretical Biology**, v. 343, p. 174-177, 2014.

PAULINO, M. T. F., DE OLIVEIRA, E. M., DE OLIVEIRA GRIESER, D., TOLEDO, J. B. Criação de frangos de corte e acondicionamento térmico em suas instalações. **Revisão. Pubvet**, v.13, p. 170, 2019.

OLIVEIRA, J. A., PIRES, L. C., DA SILVA, L. P., LEITE, C. D. S., DA SILVA PEREIRA, J., EUCLYDES, R. F., DE SOUSA, W. H. Curvas de crescimento em caprinos da raça alpina criados no semiárido nordestino. **Zootecnia: pesquisa e práticas contemporâneas-volume 2**, v. 2, n. 1, p. 64-82, 2021.

POWELL, C. D., DHANOA, M. S., GARBER, A., MURRAY, J. A. M., LOPEZ, S., ELLIS, J. L., FRANCE, J. Models based on the Mitscherlich equation for describing typical and atypical gas production profiles obtained from in vitro digestibility studies using equine faecal inoculum. **Animals**, v. 10, n. 2, p. 308, 2020.

PUIATTI, G.A., CECON, P. R., NASCIMENTO, M., PUIATTI, M., FINGER, F. L., SILVA, A. D., NASCIMENTO, A.C.C. Análise de agrupamento em seleção de modelos de regressão não lineares para descrever o acúmulo de matéria seca em plantas de alho. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 31, n. 3, p. 337-351, 2013.

WANG, M., TANG, S. X., TAN, Z. L. Modeling in vitro gas production kinetics: derivation of logistic–exponential (LE) equations and comparison of models. **Animal Feed Science and Technology**, v. 165, n. 3-4, p. 137-150, 2011.

WEST, G. B., BROWN, J. H., & ENQUIST, B. J. "A general model for ontogenetic growth." **Nature**, v. 413, n. 6856, p. 628-631, 2001.

WEST, G. B., BROWN, J. H., & ENQUIST, B. J. "Growth models based on first principles or phenomenology?." **Functional Ecology**, v. 18, n. 2, p. 188-196, 2004.

WEST, B. J., WEST, D. Stochastic ontogenetic growth model. **Europhysics Letters**, v. 97, n. 4, p. 48002, 2012.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2021.

SANTANA, T. J. S., SCALON, J. D., BITTENCOURT, T. C. C., DE SANTANA, A. S. A. A von bertalanffy model with response plateau to describe growth curves of beef cattle. **Revista Brasileira de Biometria**. v. 34, p. 646-655, 2016.

SANTOS, A. L. P., MOREIRA, G. R., DE BRITO, C. C. R., GOMES-SILVA, F., DA COSTA, M. L. L., PIMENTEL, P. G., MIZUBUTI, I. Y. Method to generate growth and degrowth models obtained from differential equations applied to agrarian sciences. **Semina: Ciências Agrárias**. V. 39, p. 2659-2672, 2018.

SANTOS, A. L. P., MOREIRA, G. R., GOMES-SILVA, F., BRITO, C. C. R., COSTA, M. L. L., PEREIRA, L. G. R., MAURICIO, R. M., AZEVEDO, J. A. G., PEREIRA, J. M., FERREIRA, A. L., CUNHA FILHO, M. Generation of models from existing models composition: An application to agrarian sciences. **PloS one**. v. 14, p. e0214778, 2019.

SALMERÓN, Diego. Bayesian beta nonlinear models with constrained parameters to describe ruminal degradation kinetics. **Journal of Applied Statistics**, v. 49, n. 10, p. 2612-2628, 2022.

SANTANA, T. J. S., SCALON, J. D., BITTENCOURT, T. C. C., DE SANTANA, A. S. A. A von Bertalanffy model with response plateau to describe growth curves of beef cattle. **Revista Brasileira de Biometria**. v. 34, p. 646-655, 2016.

SANTOS, A. L. P., DE BRITO, C. C. R., MOREIRA, G. R., GOMES-SILVA, F., CUNHA FILHO, M., DA COSTA, M. L., DE FIGUEIREDO, M. R. New model of evaluation of sunflower and corn silages by the in vitro gas production technique. **Semina: Ciências Agrárias**. v. 41, p. 1373-1384, 2020.

SARI, B. G., OLIVOTO, T., DIEHL, M. I., KRYSCZUN, D. K., LÚCIO, A. D., & SAVIAN, T. V. Nonlinear modeling for analyzing data from multiple harvest crops. **Agronomy Journal**, v.110, n.6, p.2331- 2342, 2018.

JANAMPA-SARMIENTO, P.C., TAKATA, R., FREITAS, T.M., PEREIRA, M.M.B., SÁ-FREIRE, L., LUGERT, V., PEREIRA, M.M. Análise não linear do crescimento em

comprimento de truta-arco-íris de aquicultura. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, v. 72, p. 1778-1788, 2020.

SELVAGGI, M., LAUDADIO, V., DARIO, C., TUFARELLI, V. Modelling growth curves in a nondescript Italian chicken breed: An opportunity to improve genetic and feeding strategies.

The Journal of Poultry Science, v. 52, n. 4, p. 288-294, 2015.

SCHOFIELD, P., PITT, R. E., & PELL, A. N. Kinetics of fiber digestion from in vitro gas production. **Journal of animal science**, v. 72, n. 11, p. 2980-2991, 1994.

SCHWARTZ, G. Estimating the dimension of a model, **Ann. Stat.** v. 6, p. 461-464, 1978.

SCHOUPS, G., VAN DE GIESEN, N. C., SAVENIJE, H. H. G. Model complexity control for hydrologic prediction. **Water Resources Research**, v. 44, n. 12, 2008.

STOICA, P., BABU, P. Model order estimation via penalizing adaptively the likelihood (PAL). **Signal Processing**, v. 93, p. 2865-2871, 2013.

SUASSUNA, J.M.A., ANDRADE, A.P.D., MENEZES, D.R., TELES, Y.C.F., ARAUJO, C.M., LIMA, L.K.S., BEELEN, P.M.G., MAGALHÃES, A.L.R., FERNANDES, B.D.O., MEDEIROS, A.N. Accuracy of Techniques for Predicting Gas Production by Ruminants Associated with Diet. **Fermentation**, v. 9, n. 1, p. 39, 2023.

SHU, S. M., ZHU, W. Z., KONTSEVICH, G., ZHAO, Y. Y., WANG, W. Z., ZHAO, X. X., WANG, X. D. A discrete model of ontogenetic growth. **Ecological Modelling**, v. 460, p. 109752, 2021.

STACHOWIAC, Herbert. Models. SCIENTIFIC thought: concepts, methods and procedures. Paris : Unesco, p. 145-166, 1972.

TELEKEN, J. T., GALVÃO, A. C., ROBAZZA, W. D. S. Comparing non-linear mathematical models to describe growth of different animals. **Acta Scientiarum. Animal Sciences**. v. 39, p. 73-81, 2017.

TEIXEIRA, G. L., FERNANDES, T. J., MUNIZ, J. A., DE SOUZA, F. A. C., DE MOURA, R. S., DOS SANTOS MELO, R. M. P. Growth curves of campolina horses using nonlinear models. **Livestock Science**, v. 251, p. 104631, 2021.

THEODOROU, M. K., WILLIAMS, B. A., DHANOA, M. S., MCALLAN, A. B., FRANCE, J. A simple gas production method using a pressure transducer to determine the fermentation kinetics of ruminant feeds. **Feed Science Technology**, v. 48, n. 3-4, p. 185-197, 1994.

THOLON, P., QUEIROZ, S. A. D. Modelos matemáticos utilizados para descrever curvas de crescimento em aves aplicados ao melhoramento genético animal. **Ciência Rural**, v. 39, p. 2261-2269, 2009.

TILLEY JMA., TERRY RA. A two-stage technique for the in vitro digestion of forage crops. **Grass and Forage Science**. v. 18, n. 2, p. 104-7, 1963.

TJØRVE, E. AND TJØRVE, K.M., 2010. A unified approach to the Richards-model family for use in growth analyses: why we need only two model forms. **Journal of theoretical biology**, v. 267, n. 3, p. 417-425, 2010.

TOPAL, M., BOLUKBASI, Ş.C. Comparison of nonlinear growth curve models in broiler chickens. **Journal of Applied Animal Research**, v. 34, p. 149-152, 2018.

VERHULST, P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. **Corresp. Math. Phys.** V. 10, p. 113-126, 1838.

WANG, M., TANG, S., TAN, Z. Modeling in vitro gas production kinetics: Derivation of logistic–exponential (le) equations and comparison of models. **Animal Feed Science and Technology**, v. 165, p. 137-150, 2011.

VERHULST, P.F.. "Deuxième Mémoire sur la Loi d'Accroissement de La Population.." **Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique** 20, v. 1, 1847.

VILLAMIDE, M. J., MAERTENS, C., DE BLAS, C., PEREZ, J. M. Feed evaluation. In: DE BLAS, C., WISEMAN, J. The nutrition of the rabbit. Cambridge: CAB International, p. 89-102, 1998.

ZORNITTA, CS., ÍTAVO, L. C. V., ÍTAVO, C. C. B. F., DOS SANTOS, G. T., DIAS, A. M., DOS SANTOS DIFANTE, G., GURGEL, A. L. C. Kinetics of in vitro gas production and fitting mathematical models of corn silage. **Fermentation**, v. 7, n. 4, p. 298, 2021.

ZUO, W., MOSES, M. E., WEST, G. B., HOU, C., BROWN, J. H. A general model for effects of temperature on ectotherm ontogenetic growth and development. **Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences**, v. 279, n. 1734, p. 1840-1846, 2012.

ZWIETERING, M.H., ROMBOUTS, F.M., RIET, K.V.T. Comparison of definitions of the lag phase and the exponential phase in bacterial growth. **Journal of Applied Bacteriology**. v. 72, n. 2, p. 139-145, 1992.

APÊNDICE A : Gráficos das derivadas d1, d2, d3 e d4 da produção de gás das dietas T2**a T7. Modelo LB.**

Figura 10:Primeira derivada (d1) da dieta T2. T2-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d1 do modelo LB completo.

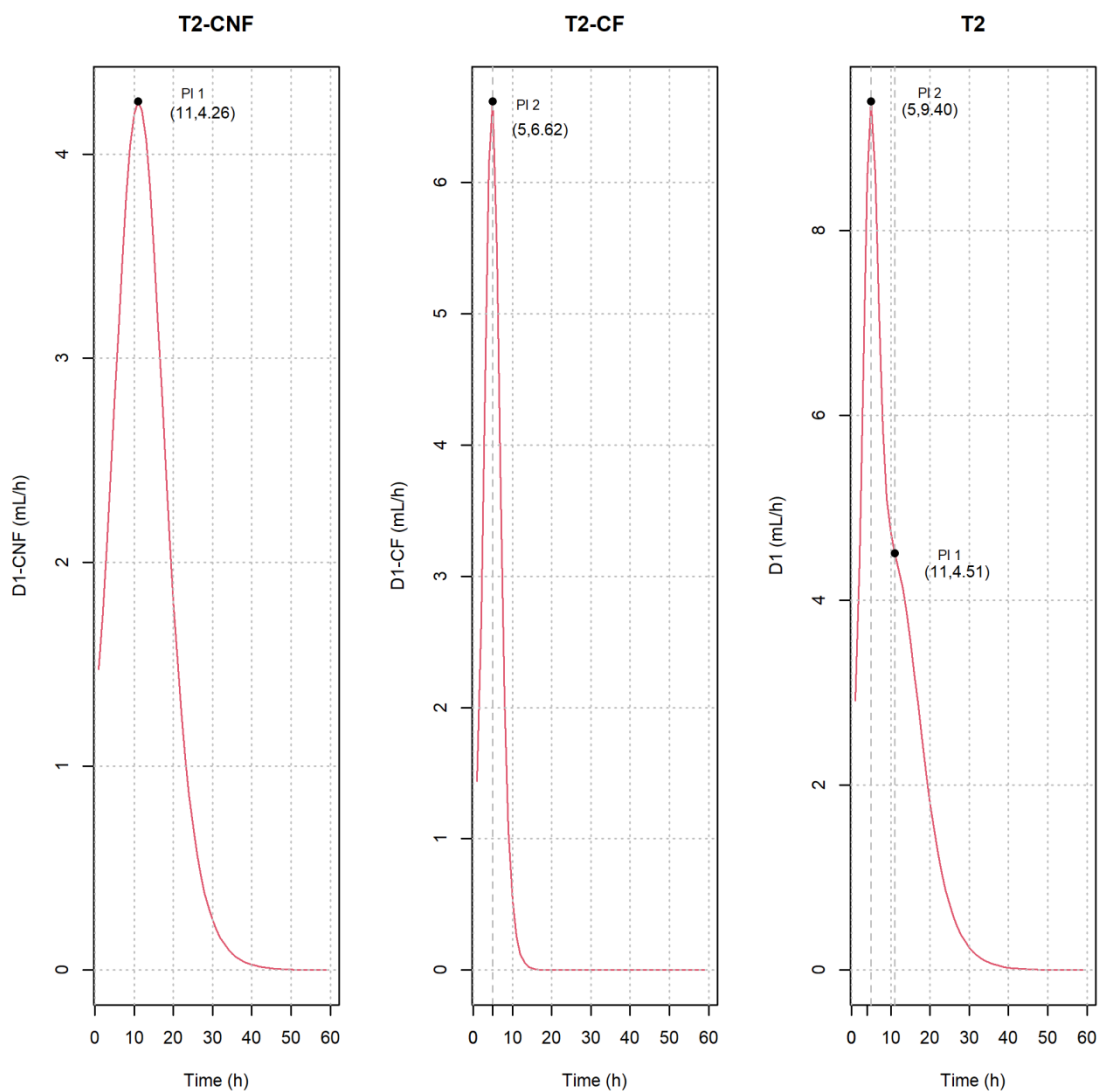


Figura 11:Primeira derivada (d1) da dieta T3. T3-CNF: D1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d1 do modelo LB completo.

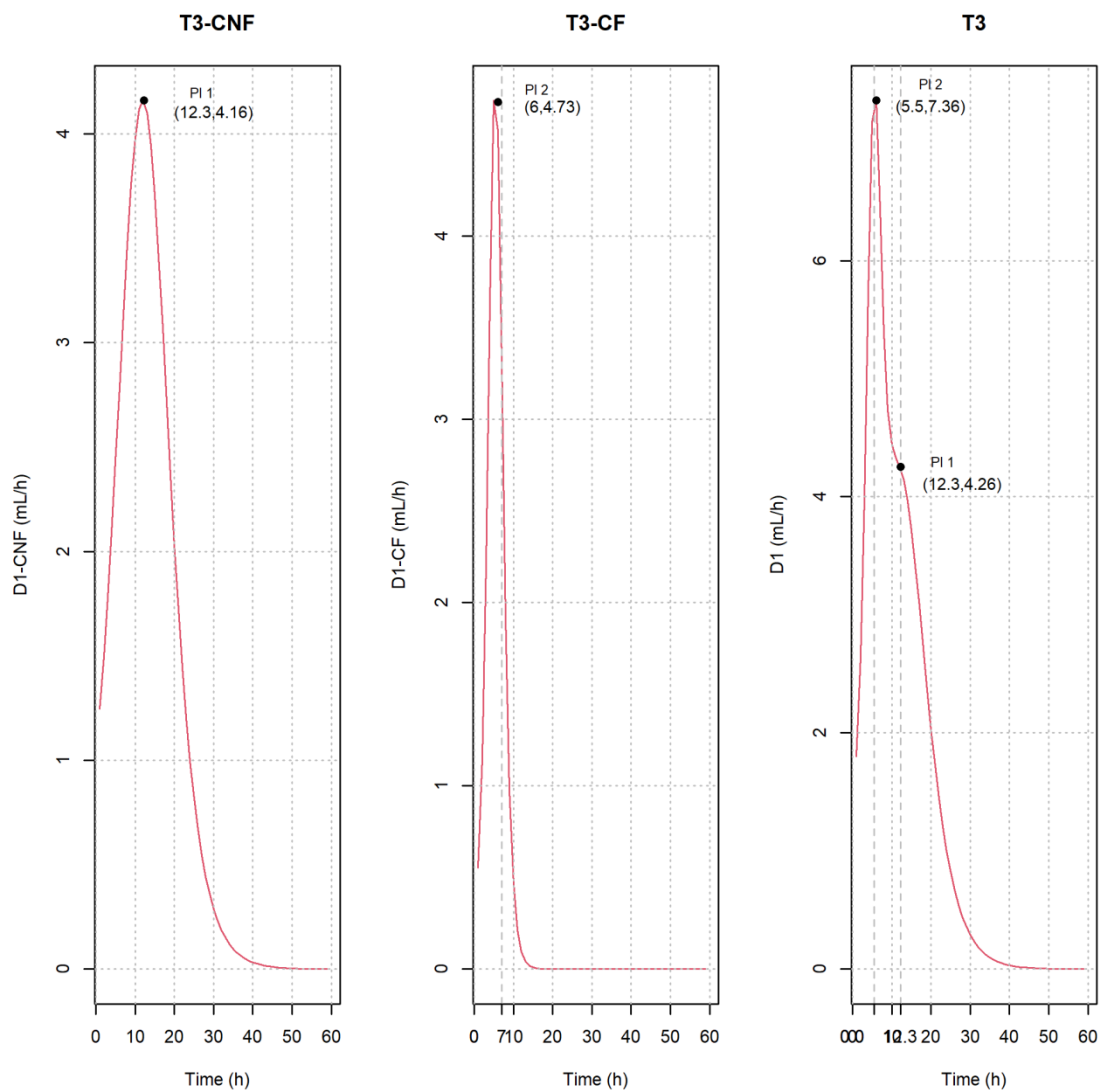


Figura 12:Primeira derivada (d1) da dieta T4. T4-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d1 do modelo LB completo.

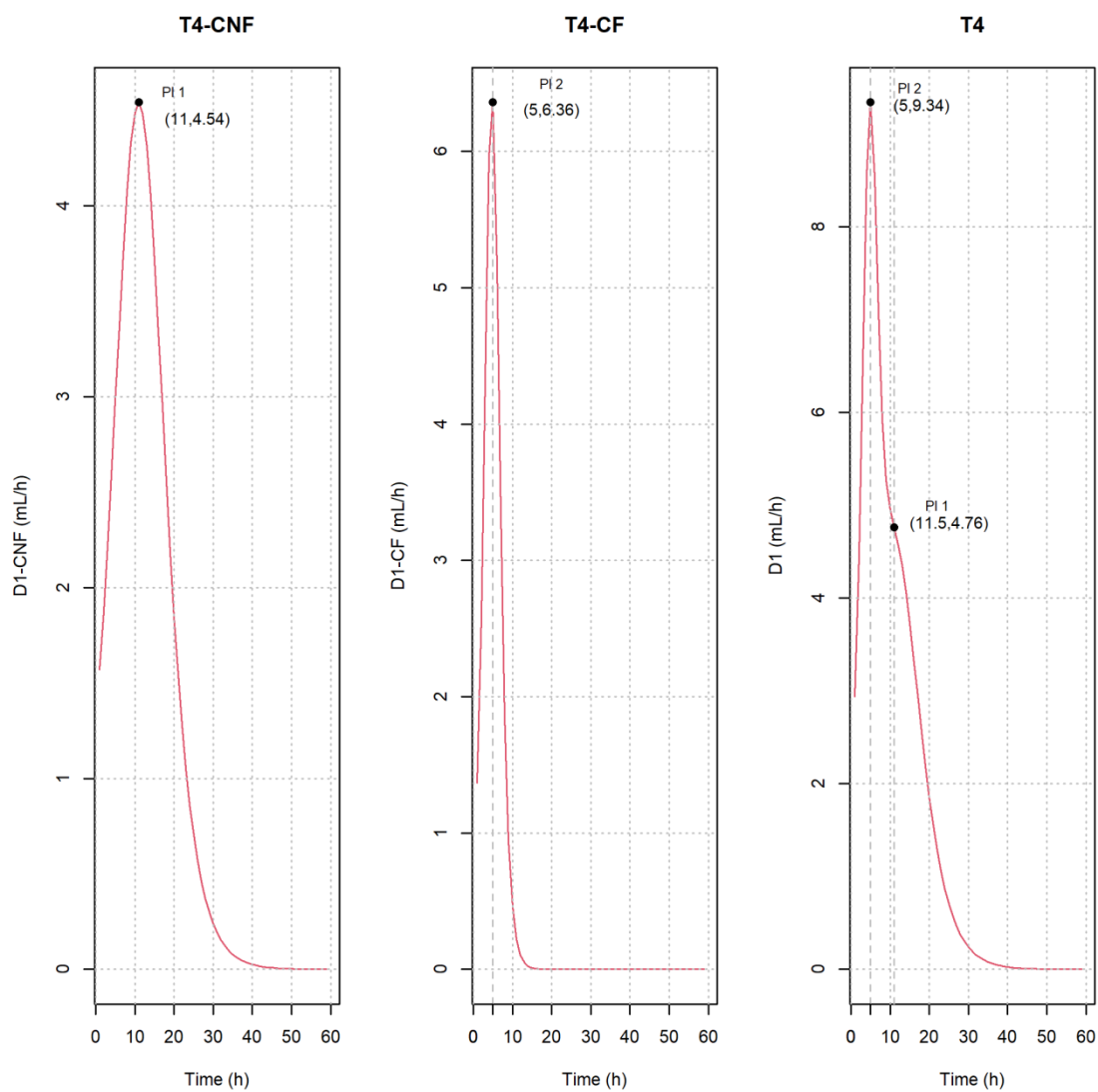


Figura 13:Primeira derivada (d1) da dieta T5. T5-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d1 do modelo LB completo.

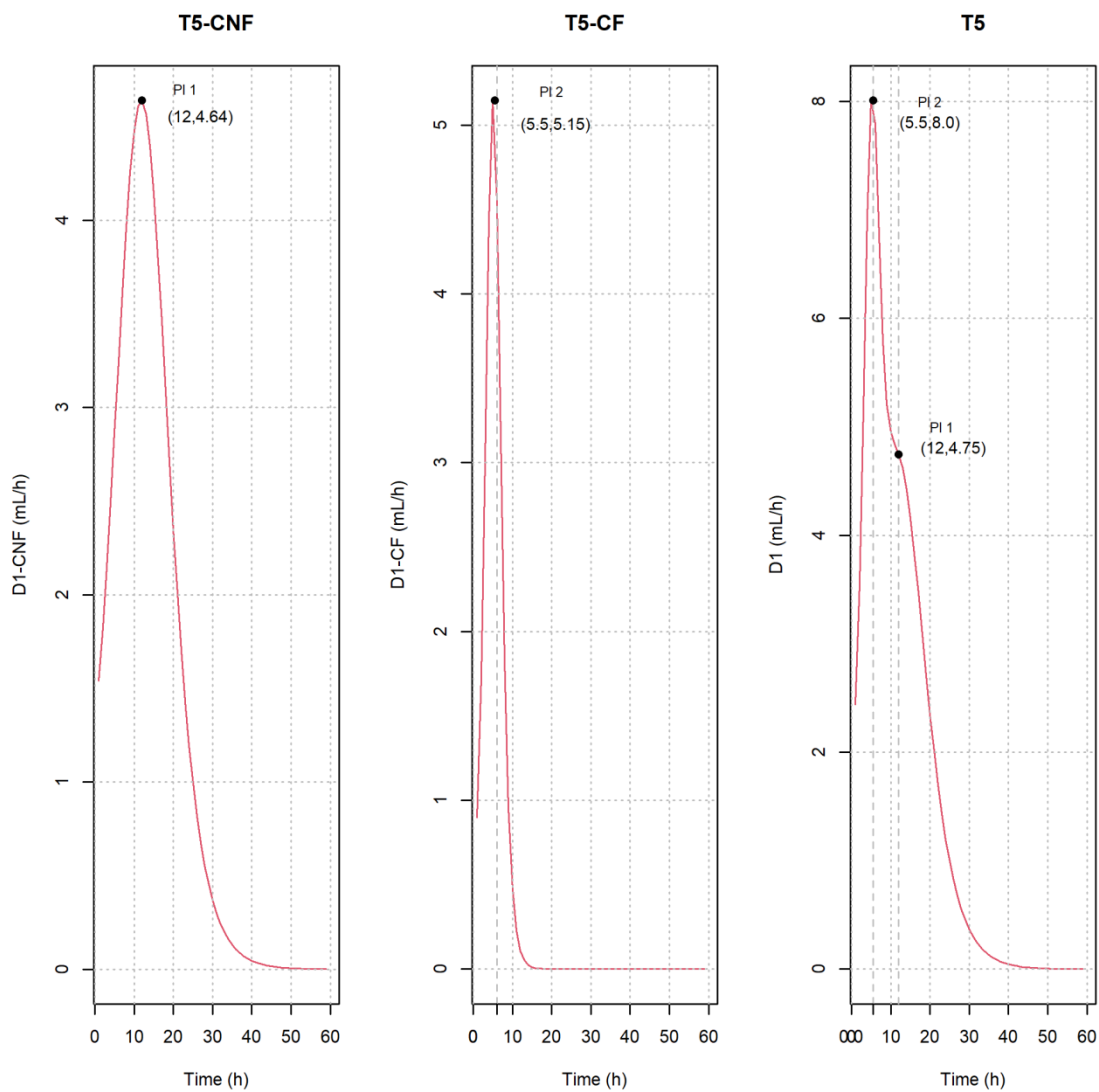


Figura 14:Primeira derivada (d1) da dieta T6. T6-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d1 do modelo LB completo.

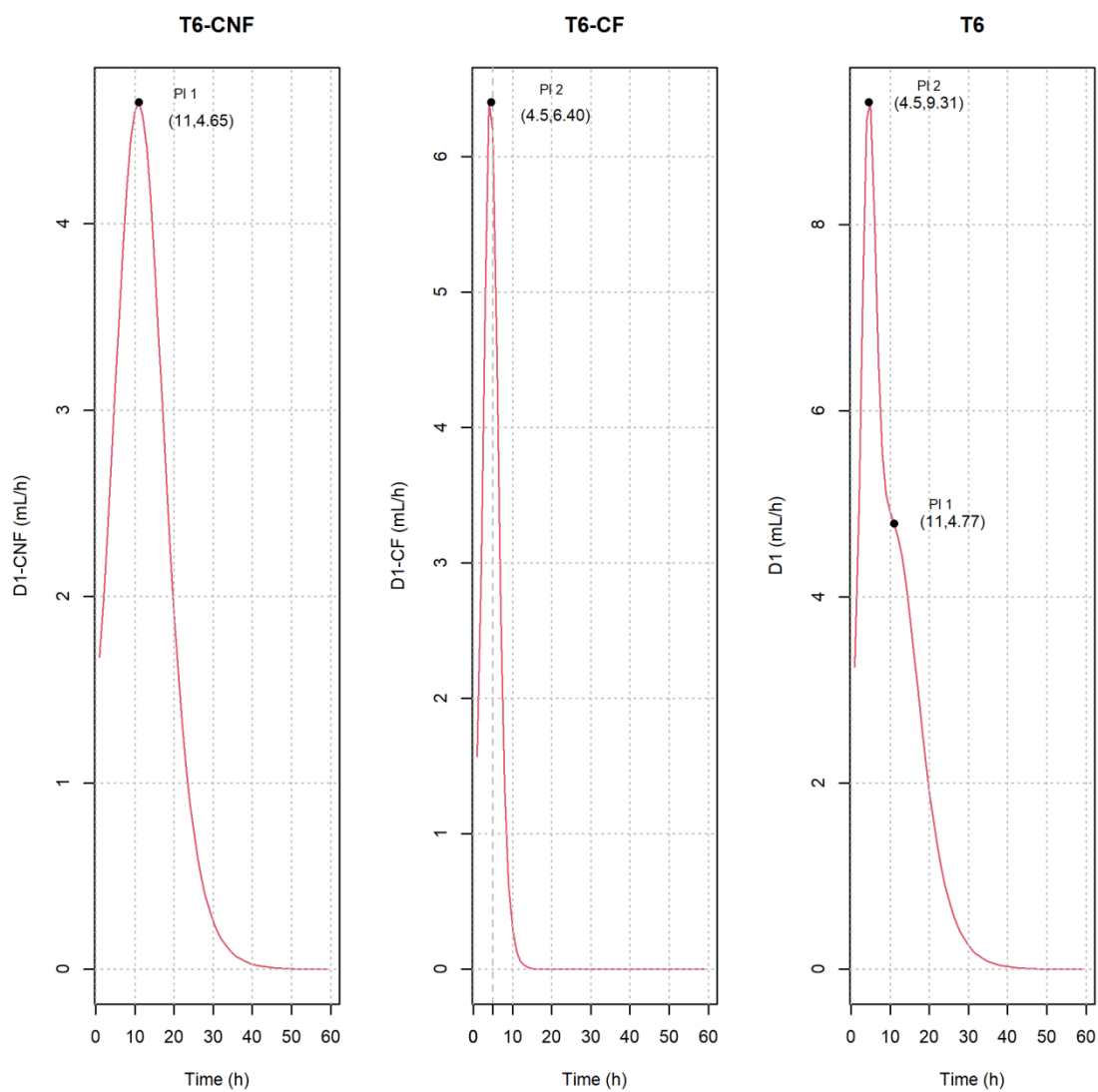


Figura 15: Primeira derivada (d1) da dieta T7. T7-CNF: d1 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d1 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d1 do modelo LB completo.

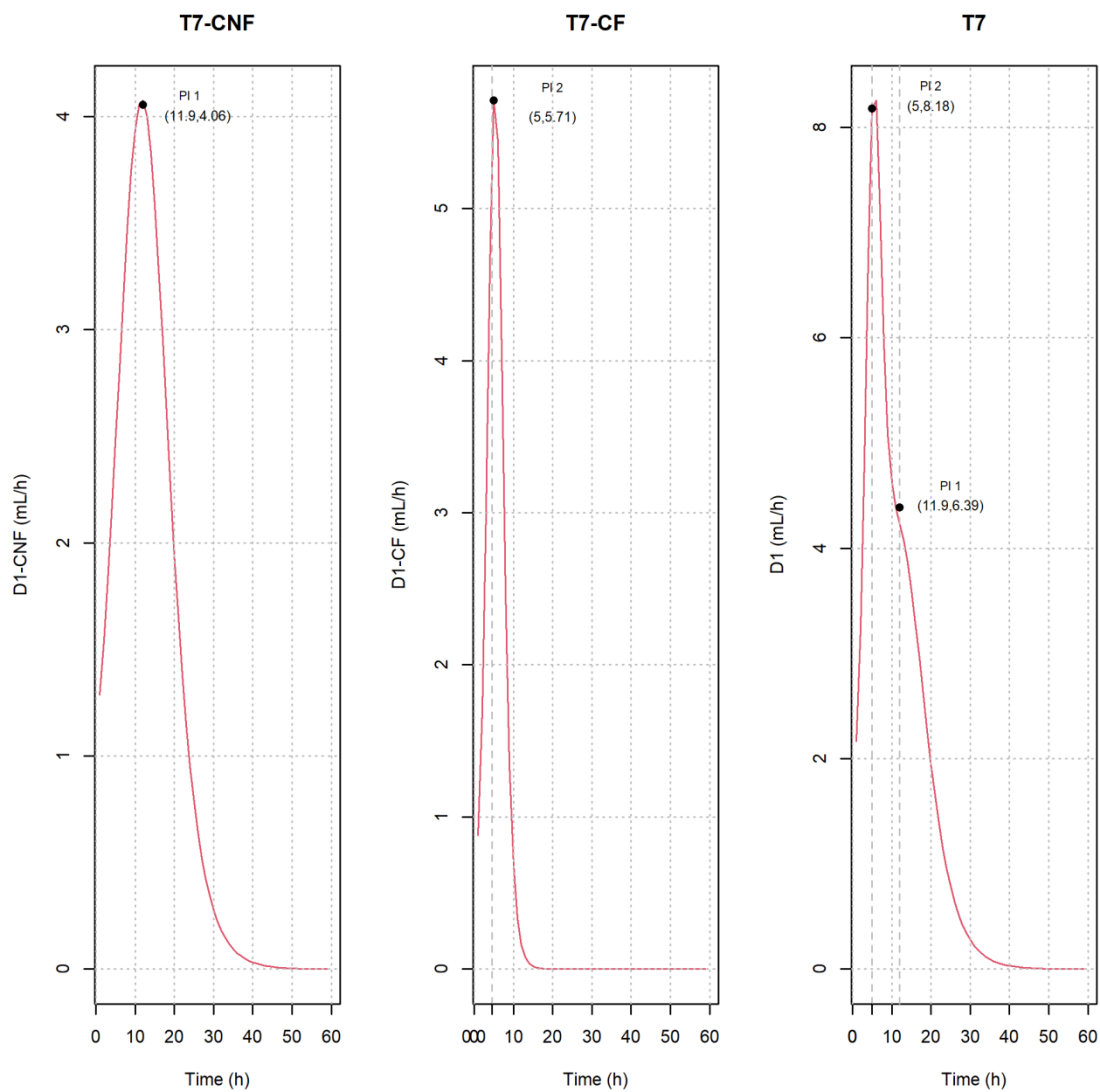


Figura 16: Segunda derivada (d2) da dieta T2. T2-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d2 do modelo LB completo.

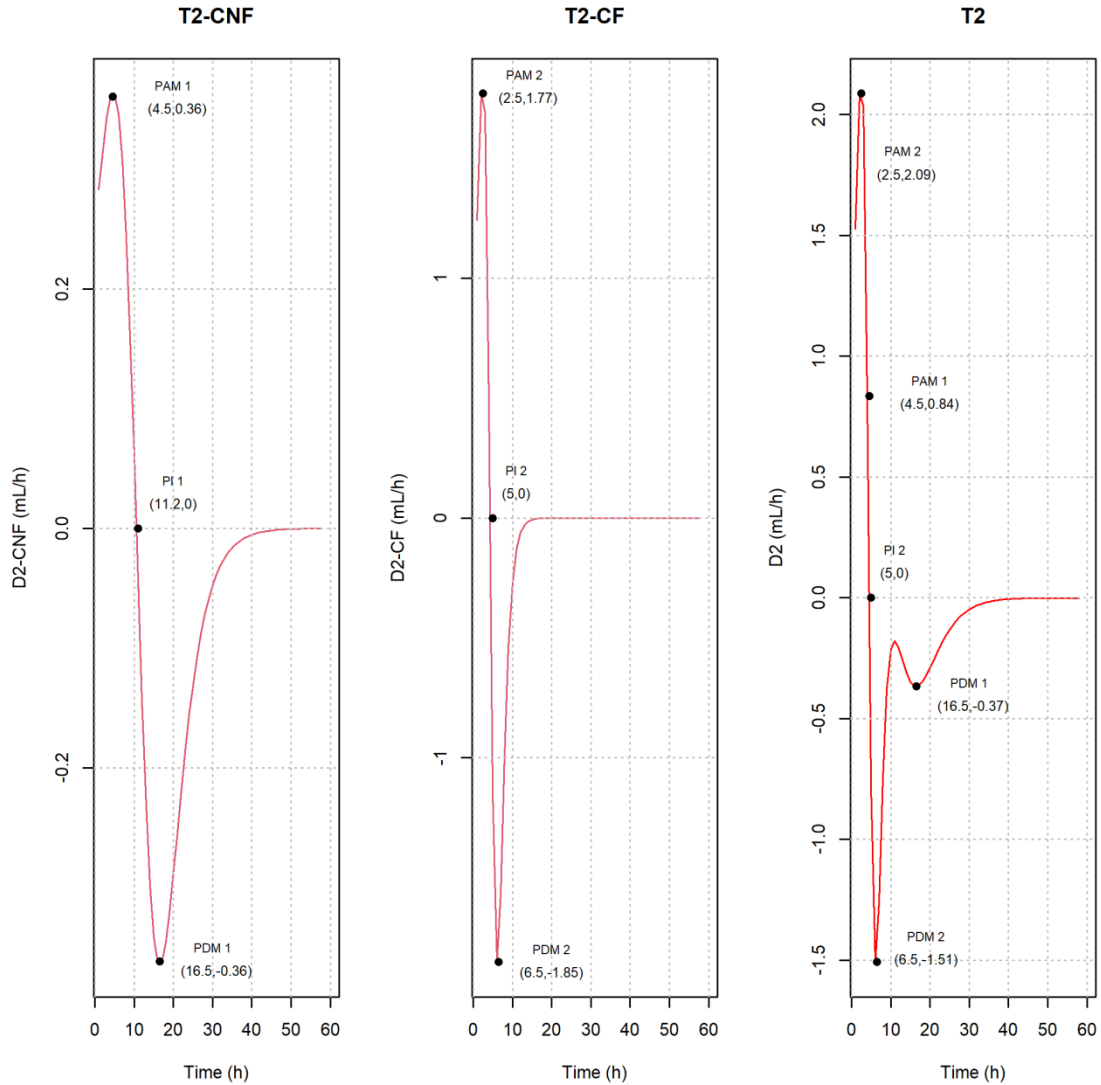


Figura 17: Segunda derivada (d2) da dieta T3. T3-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d2 do modelo LB completo.

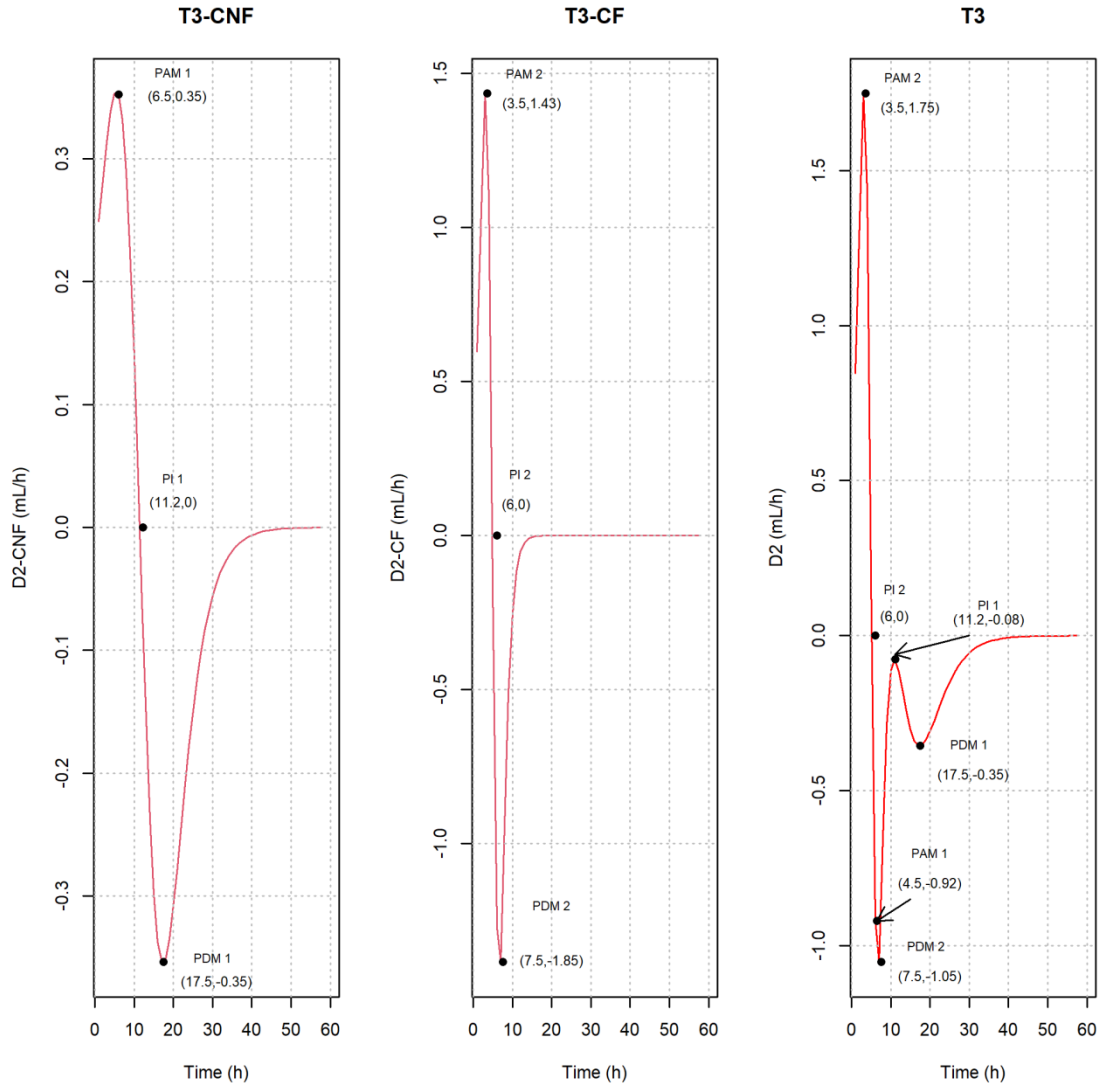


Figura 18: Segunda derivada (d2) da dieta T4. T4-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d2 do modelo LB completo.

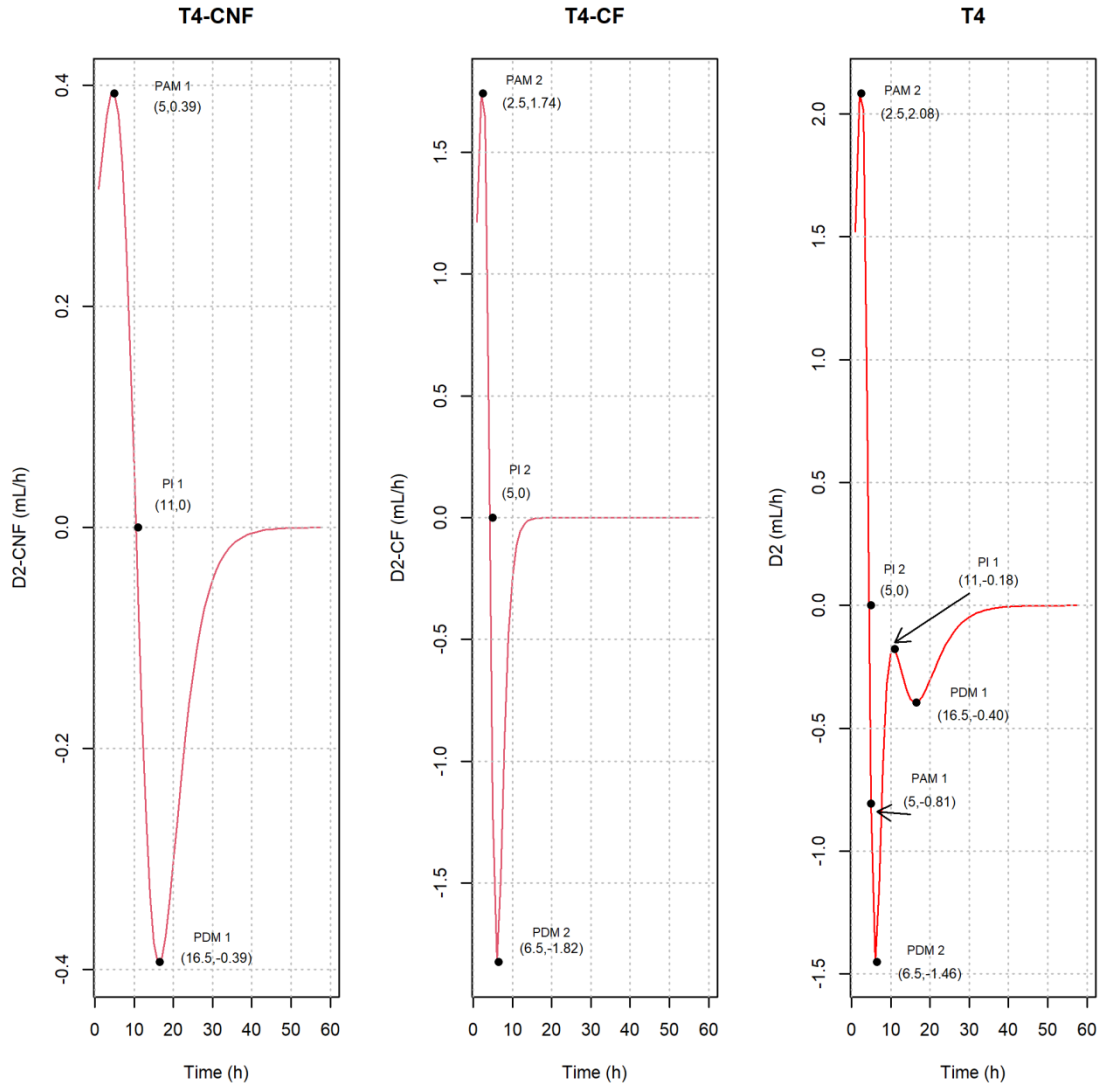


Figura 19: Segunda derivada (d2) da dieta T5. T5-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d2 do modelo LB completo.

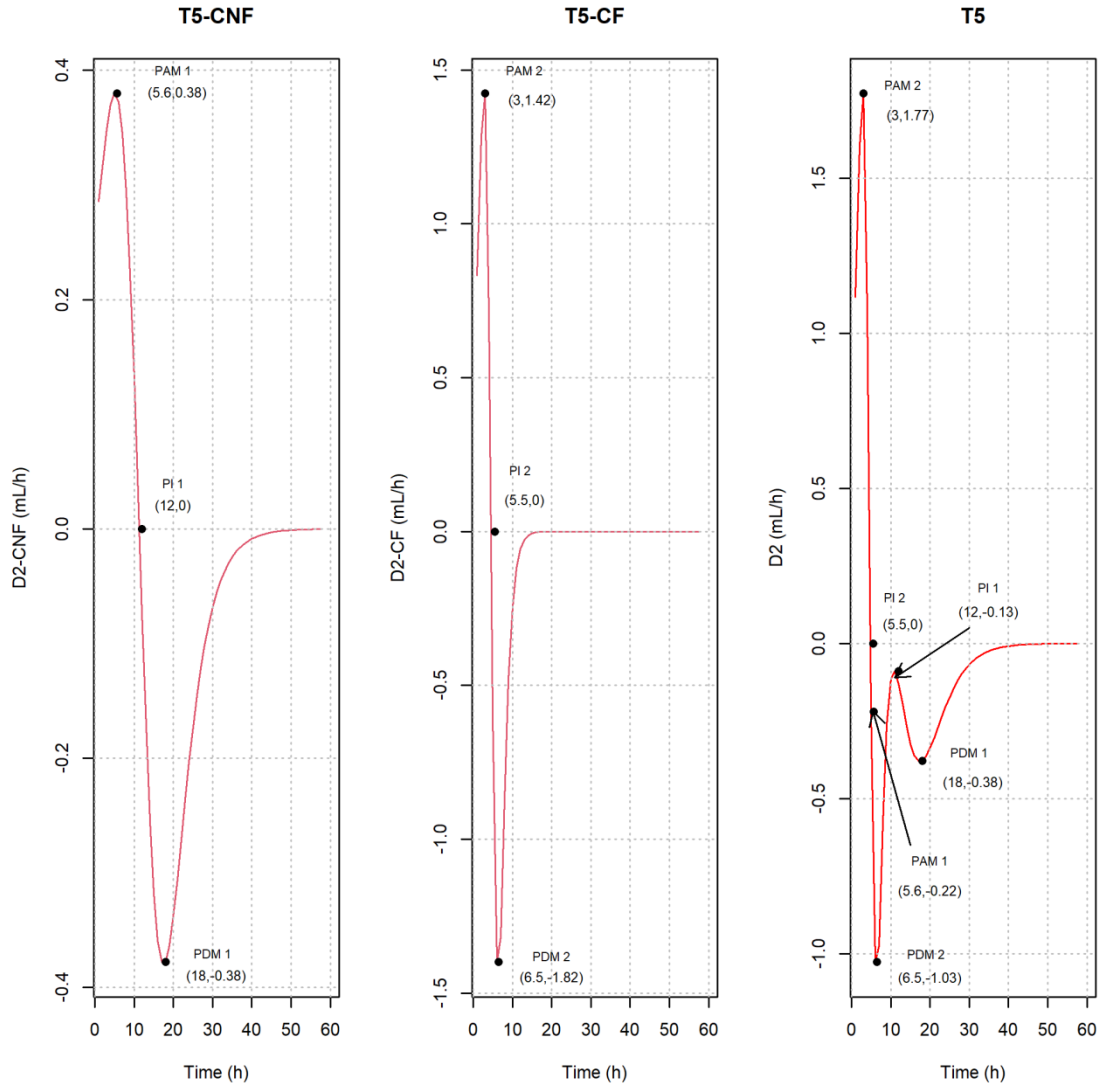


Figura 20: Segunda derivada (d2) da dieta T6. T6-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d2 do modelo LB completo.

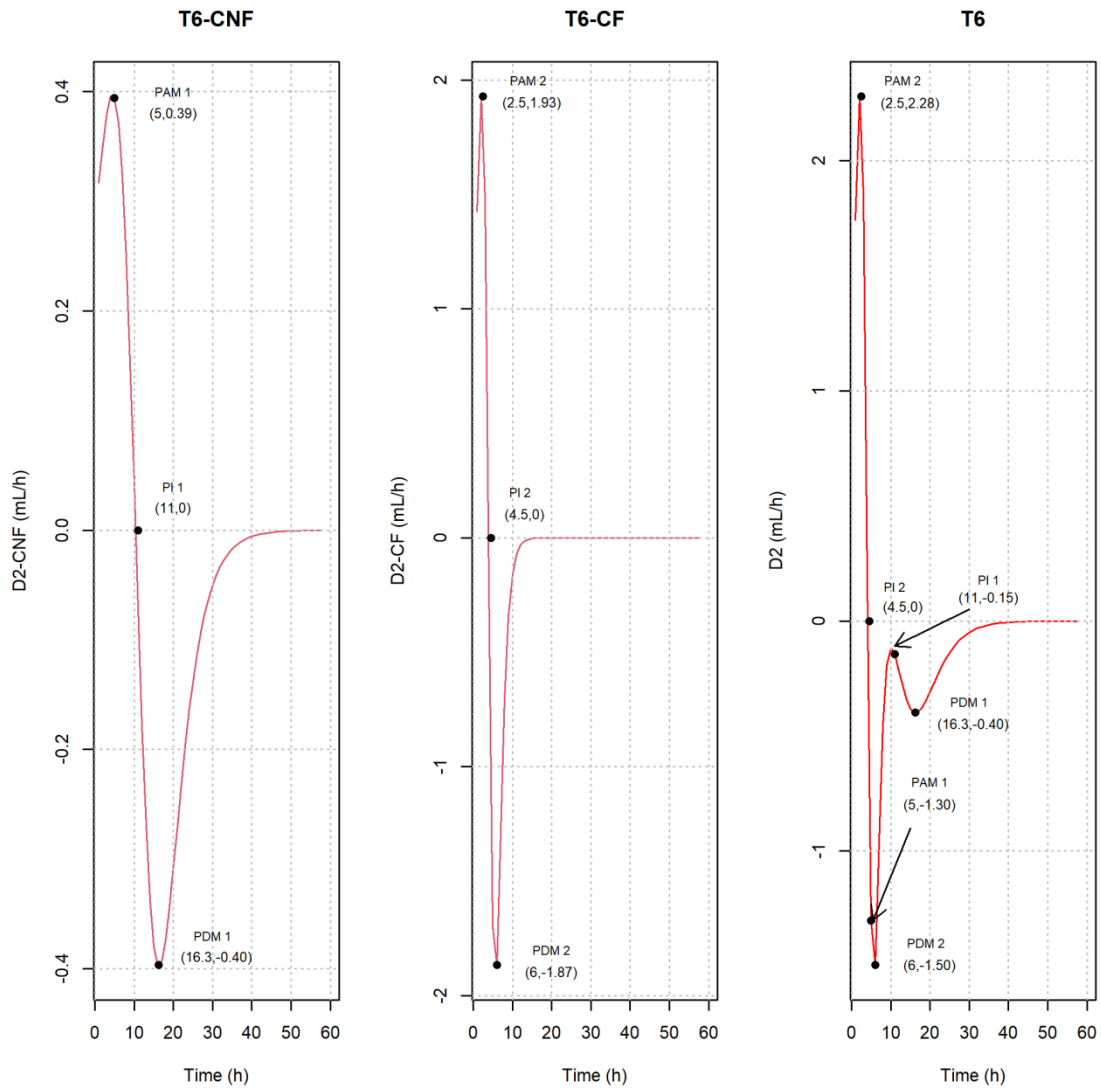


Figura 21: Segunda derivada (d2) da dieta T7. T7-CNF: d2 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d2 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d2 do modelo LB completo.

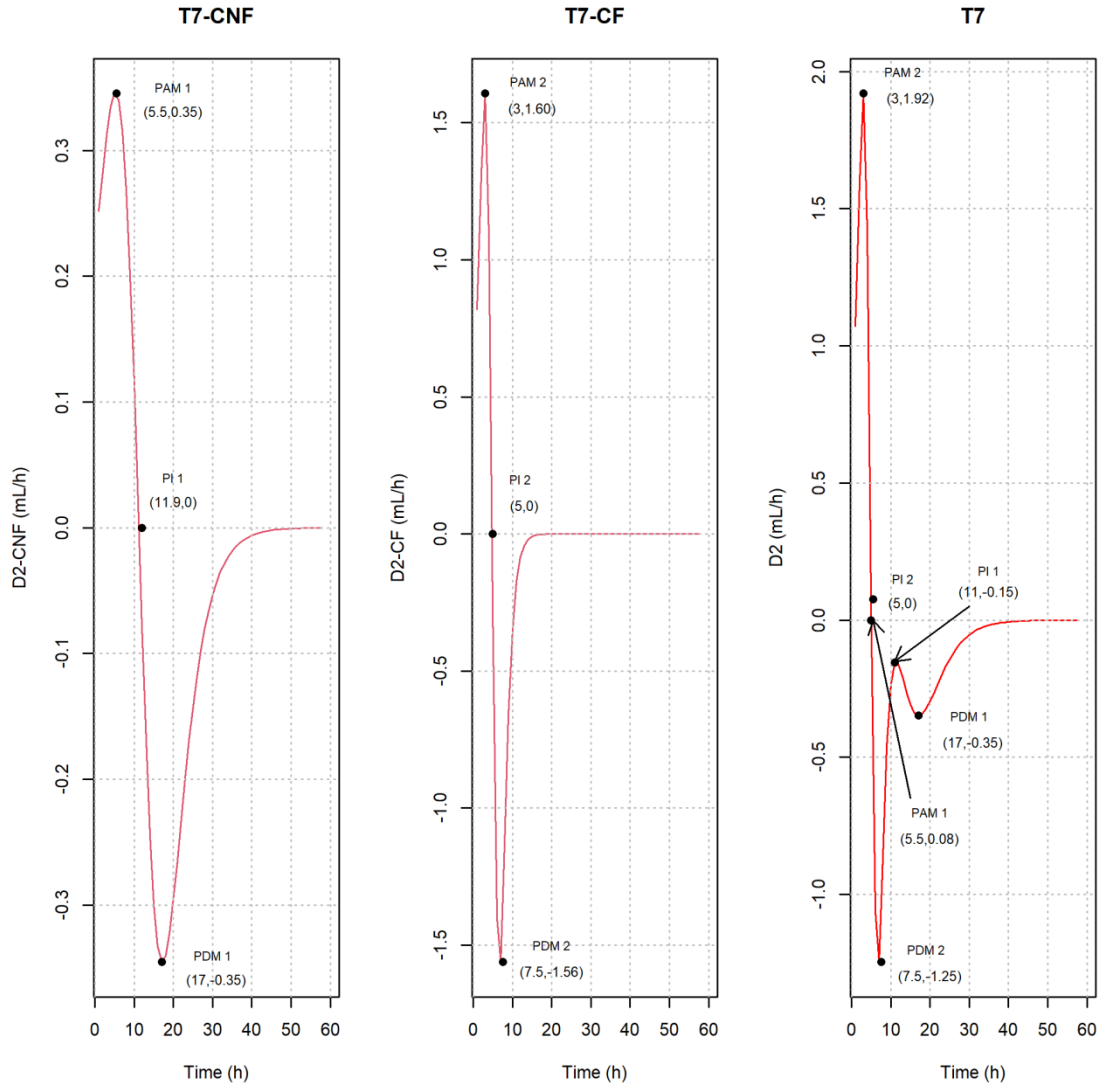


Figura 22: Terceira derivada (d3) da dieta T2. T2-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d3 do modelo LB completo.

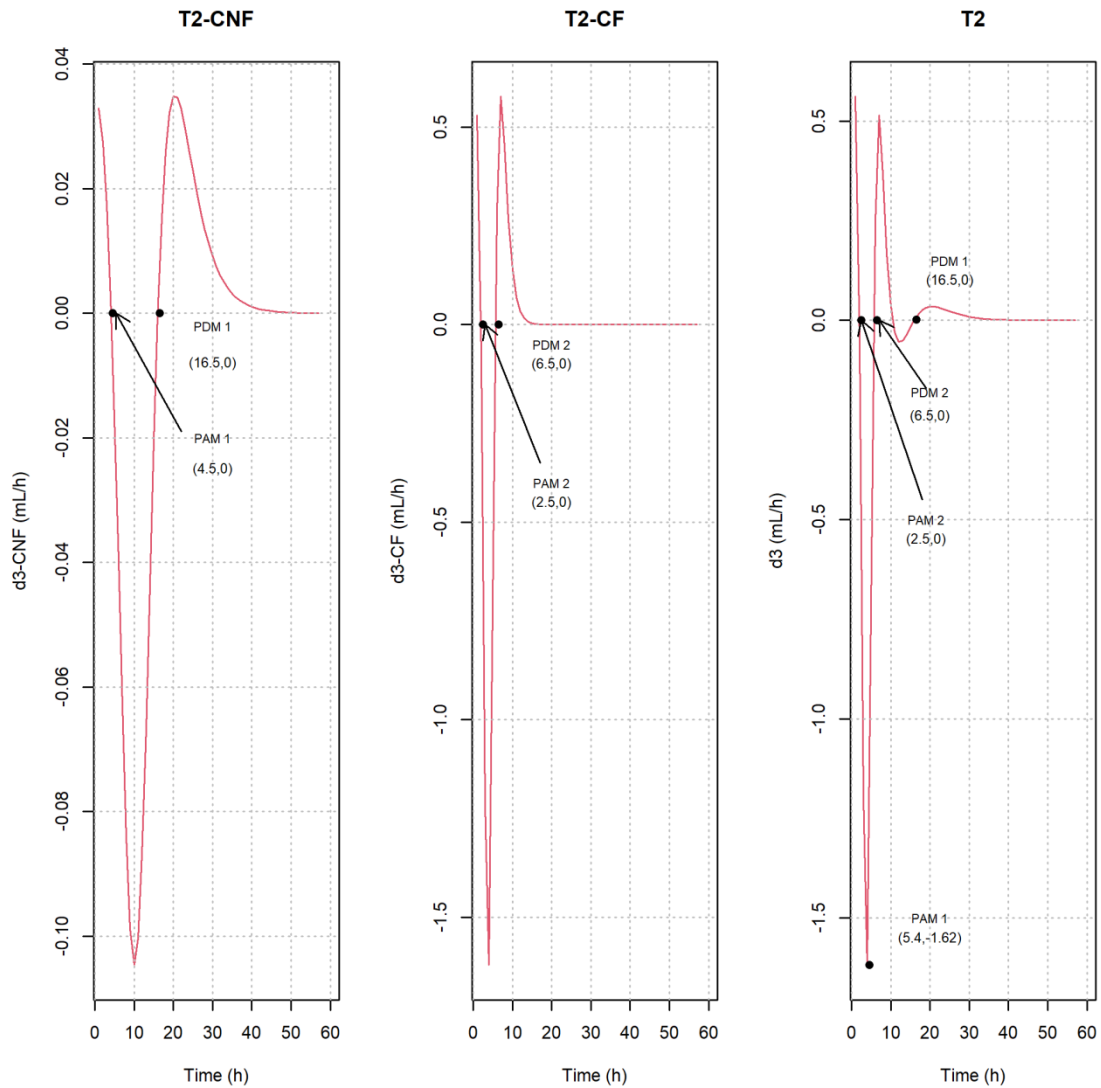


Figura 23: Terceira derivada (d3) da dieta T3. T3-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d3 do modelo LB completo.

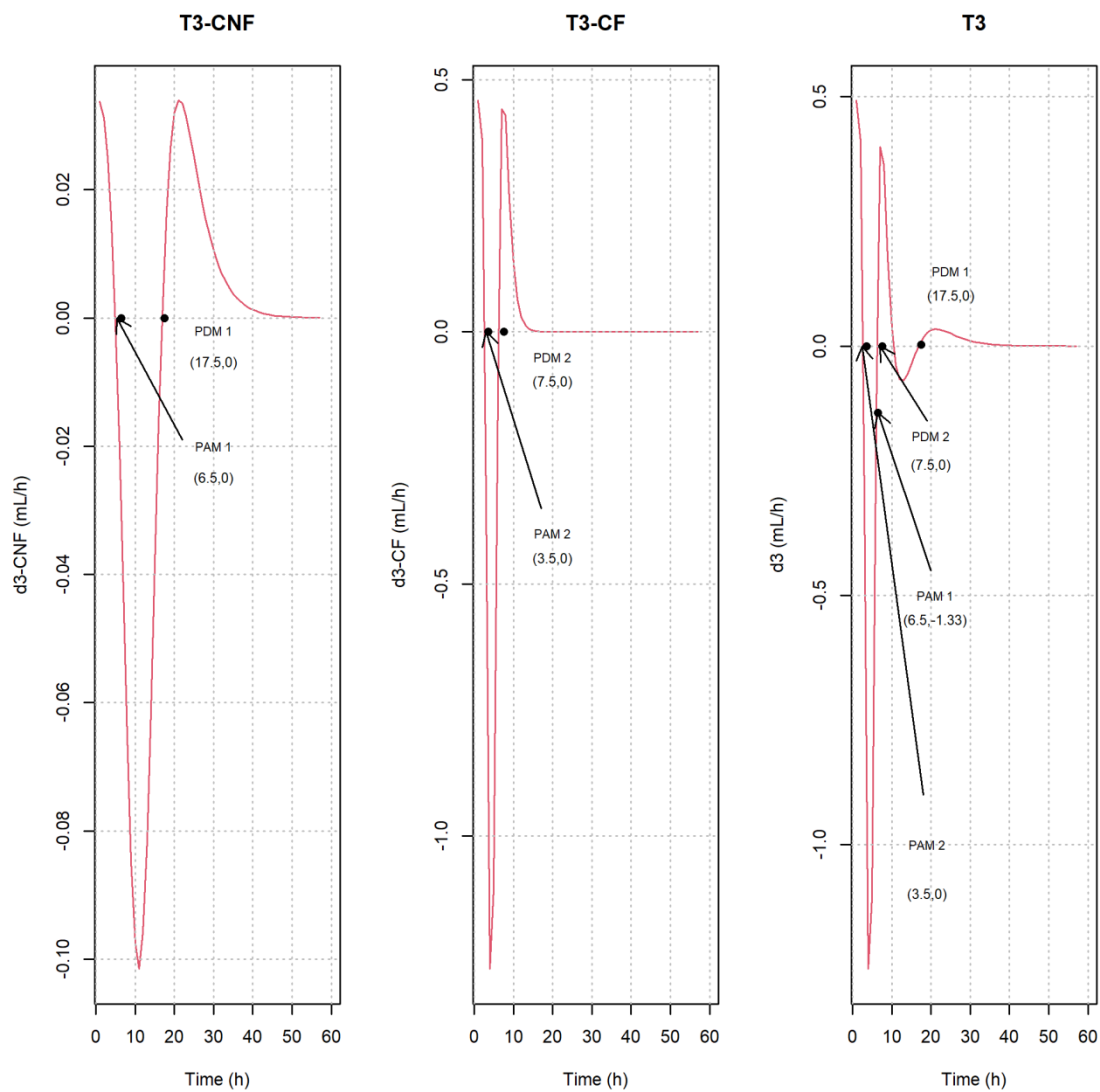


Figura 24: Terceira derivada (d3) da dieta T4. T4-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d3 do modelo LB completo.

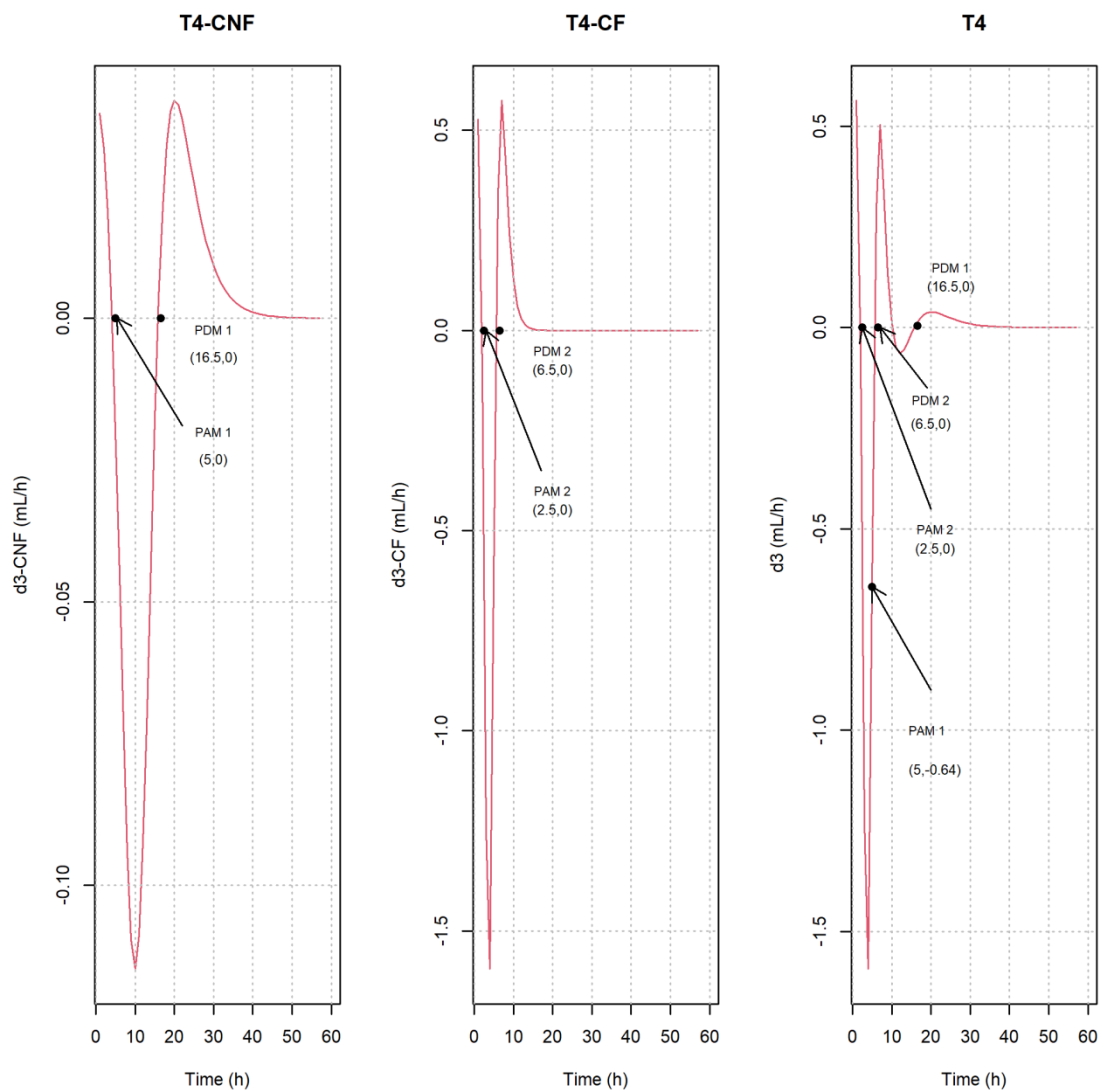


Figura 25: Terceira derivada (d3) da dieta T5. T5-CNF: D3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d3 do modelo LB completo.

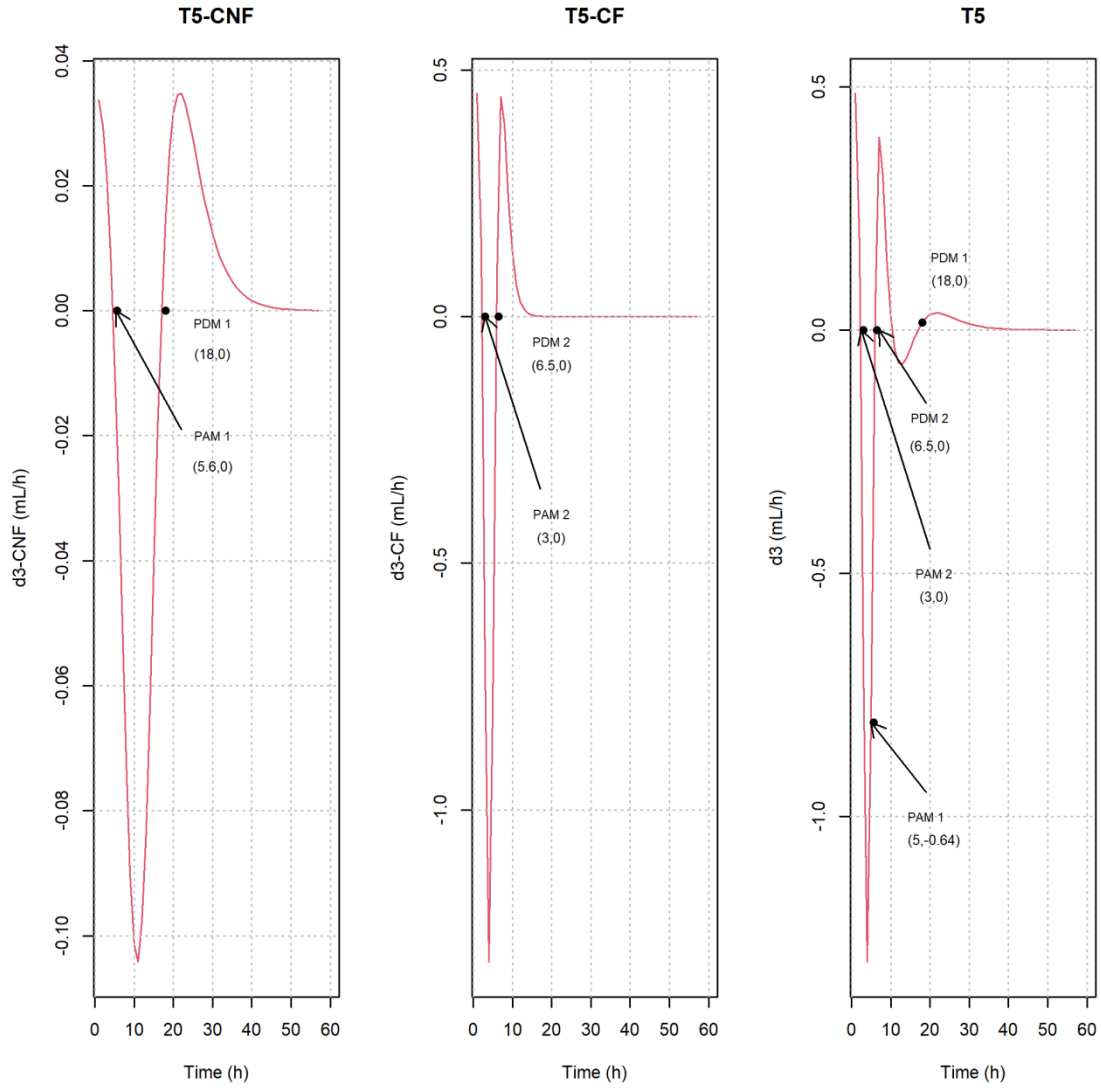


Figura 26: Terceira derivada (d3) da dieta T6. T6-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d3 do modelo LB completo.

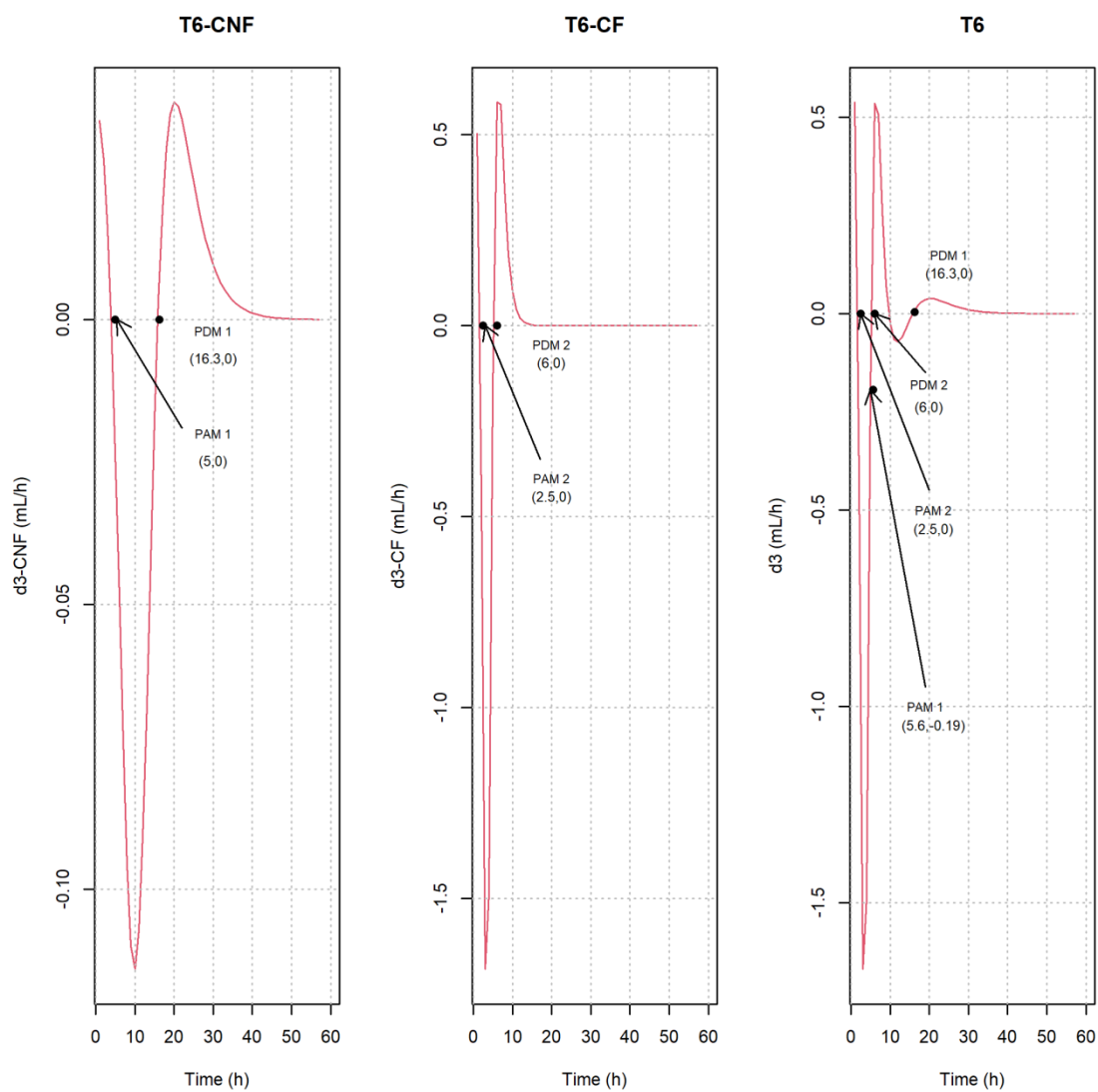


Figura 27: Terceira derivada (d3) da dieta T7. T7-CNF: d3 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d3 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d3 do modelo LB completo.

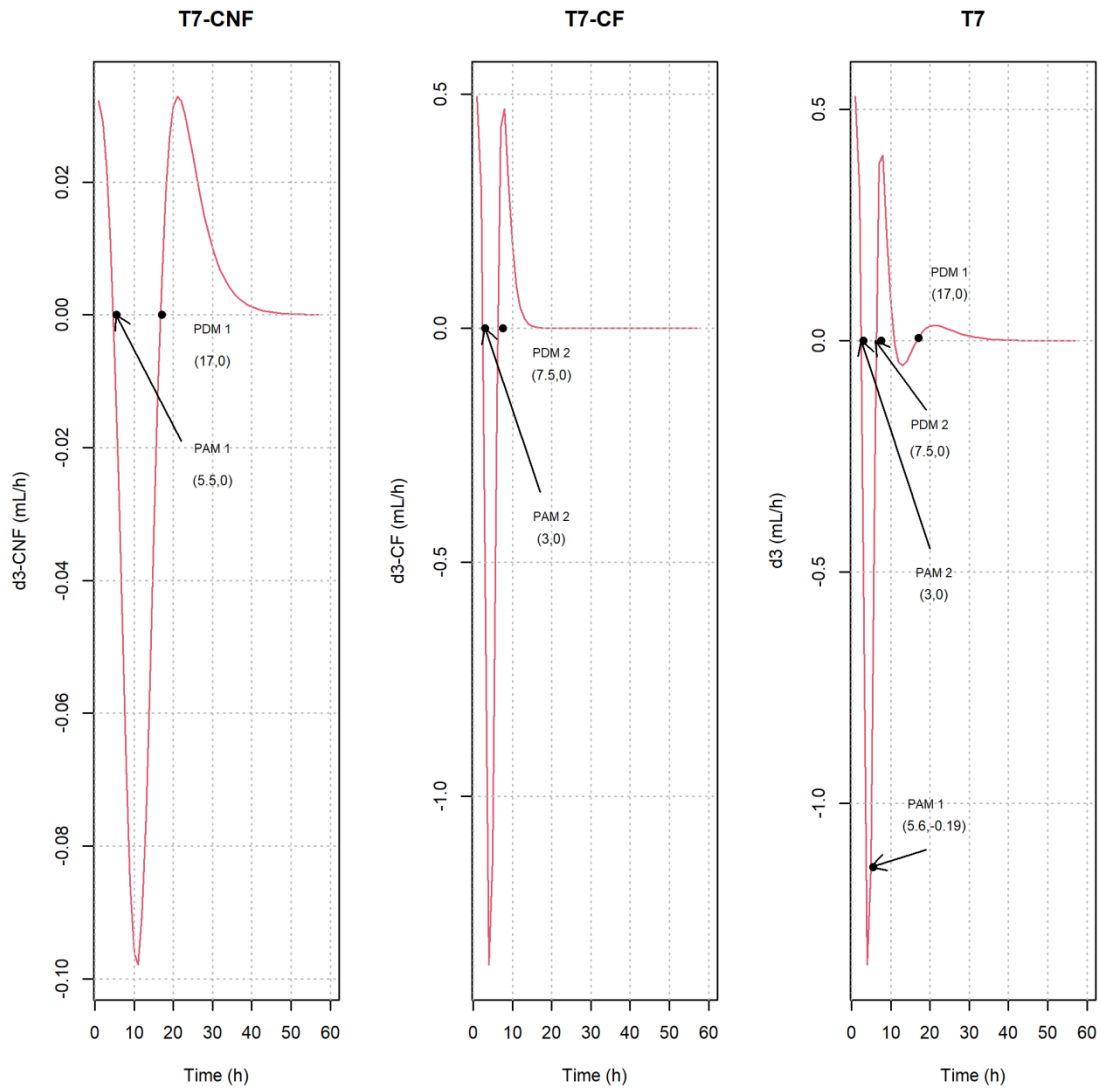


Figura 28: Quarta derivada (d4) da dieta T2. T2-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T2-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T2: d4 do modelo LB completo.

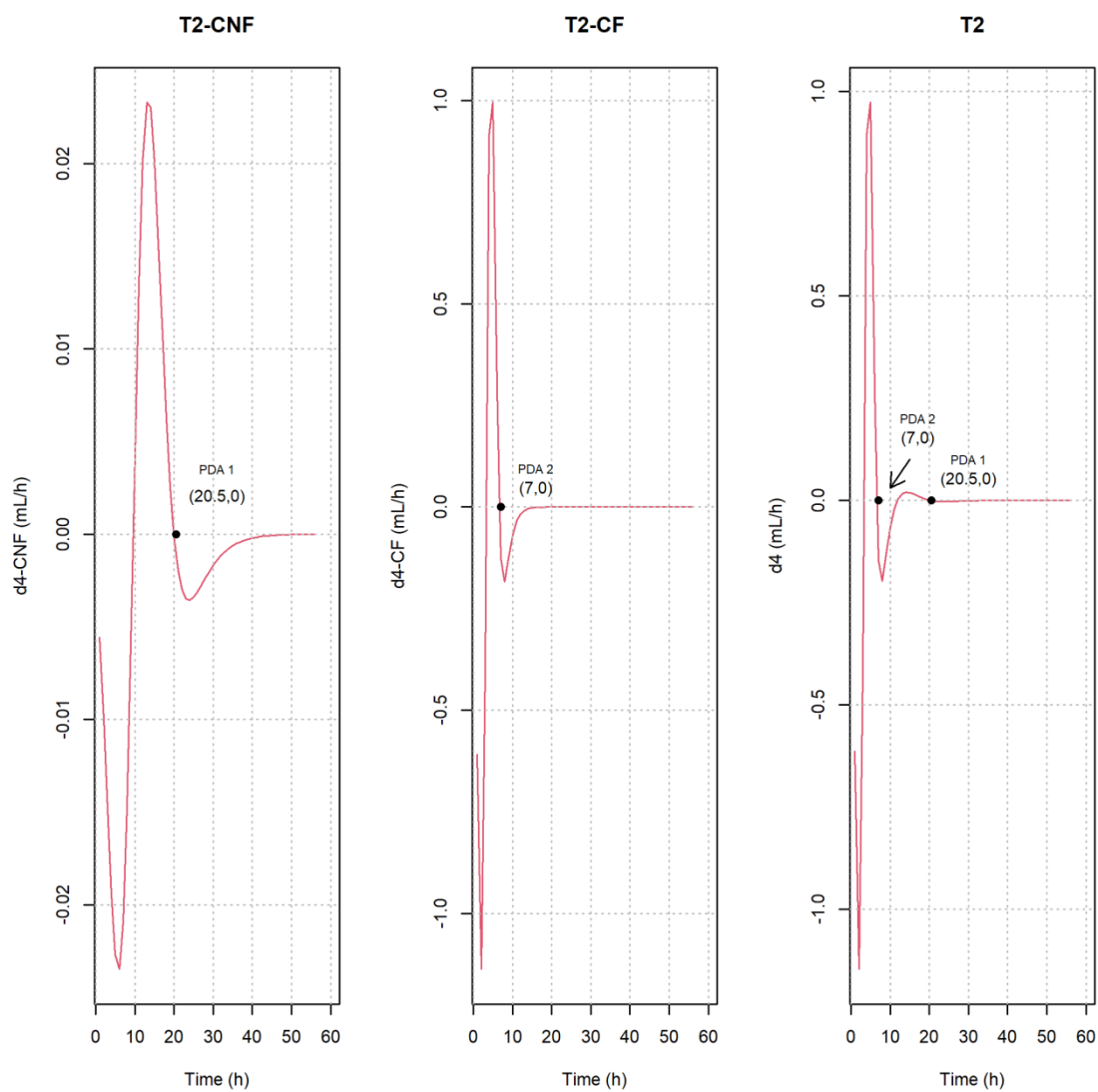


Figura 29: Quarta derivada (d4) da dieta T3. T3-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T3-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T3: d4 do modelo LB completo.

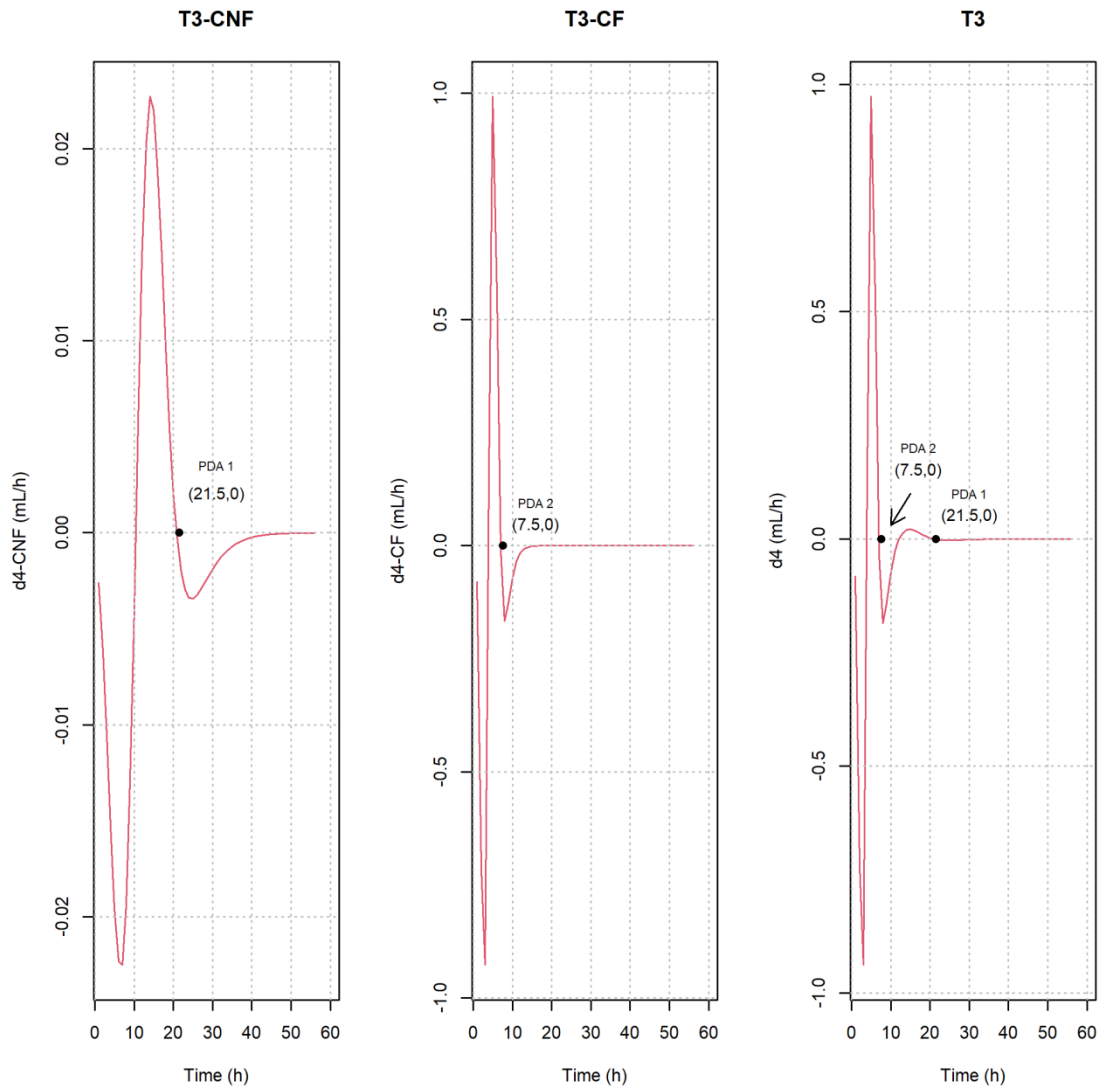


Figura 30:Quarta derivada (d4) da dieta T4. T4-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T4-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T4: d4 do modelo LB completo.

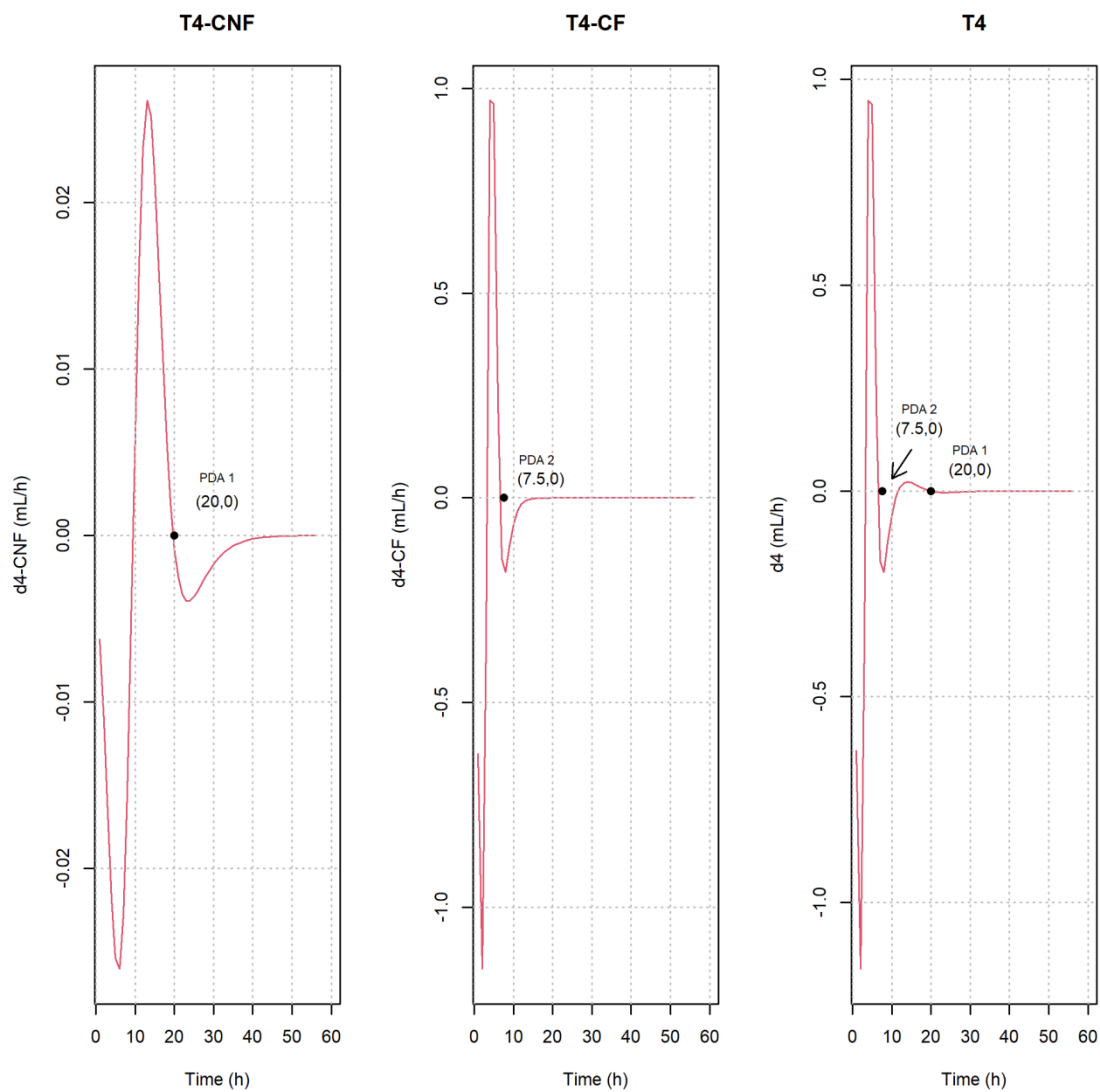


Figura 31: Quarta derivada (d4) da dieta T5. T5-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T5-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T5: d4 do modelo LB completo.

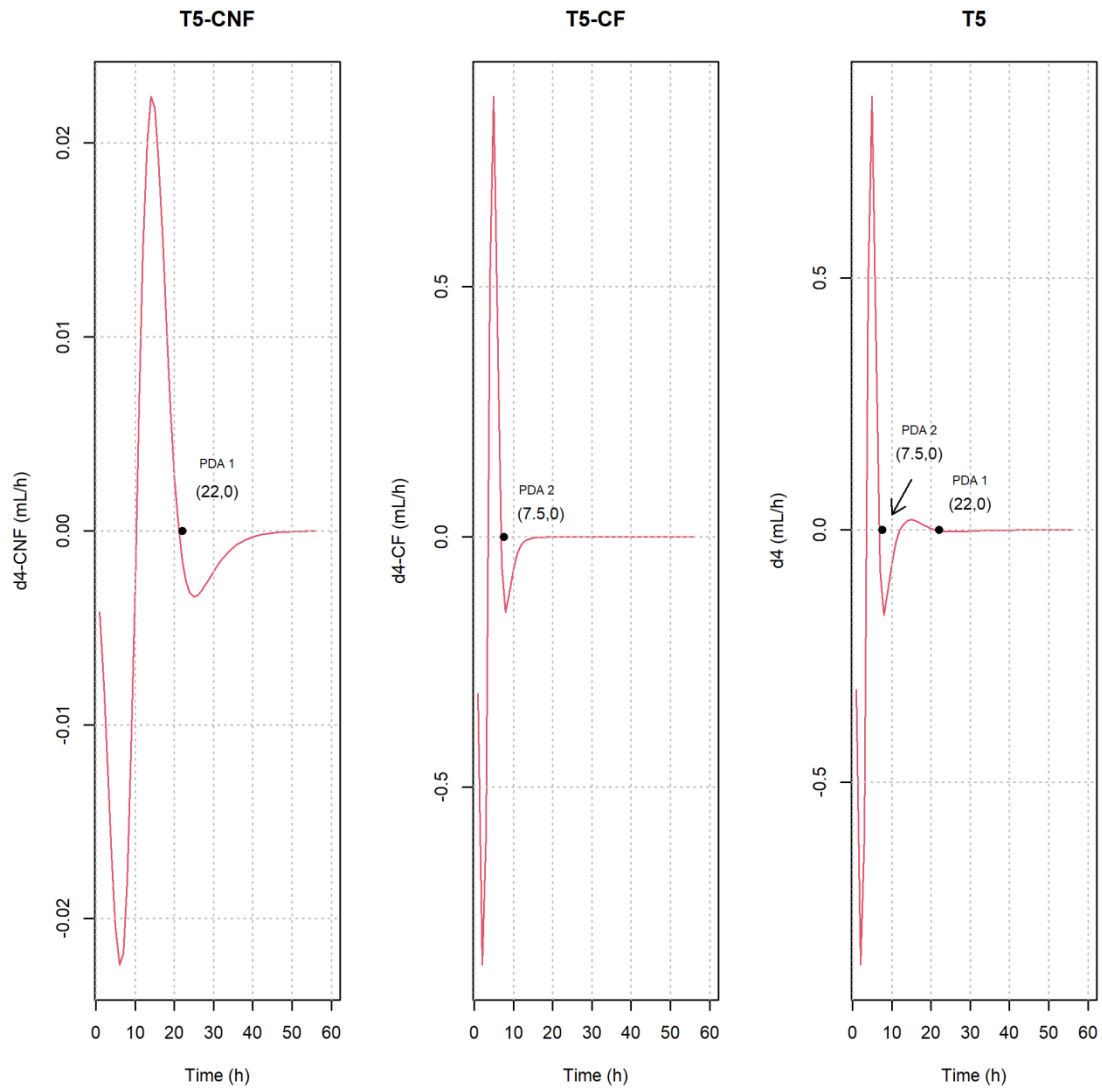


Figura 32: Quarta derivada (d4) da dieta T6. T6-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T6-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T6: d4 do modelo LB completo.

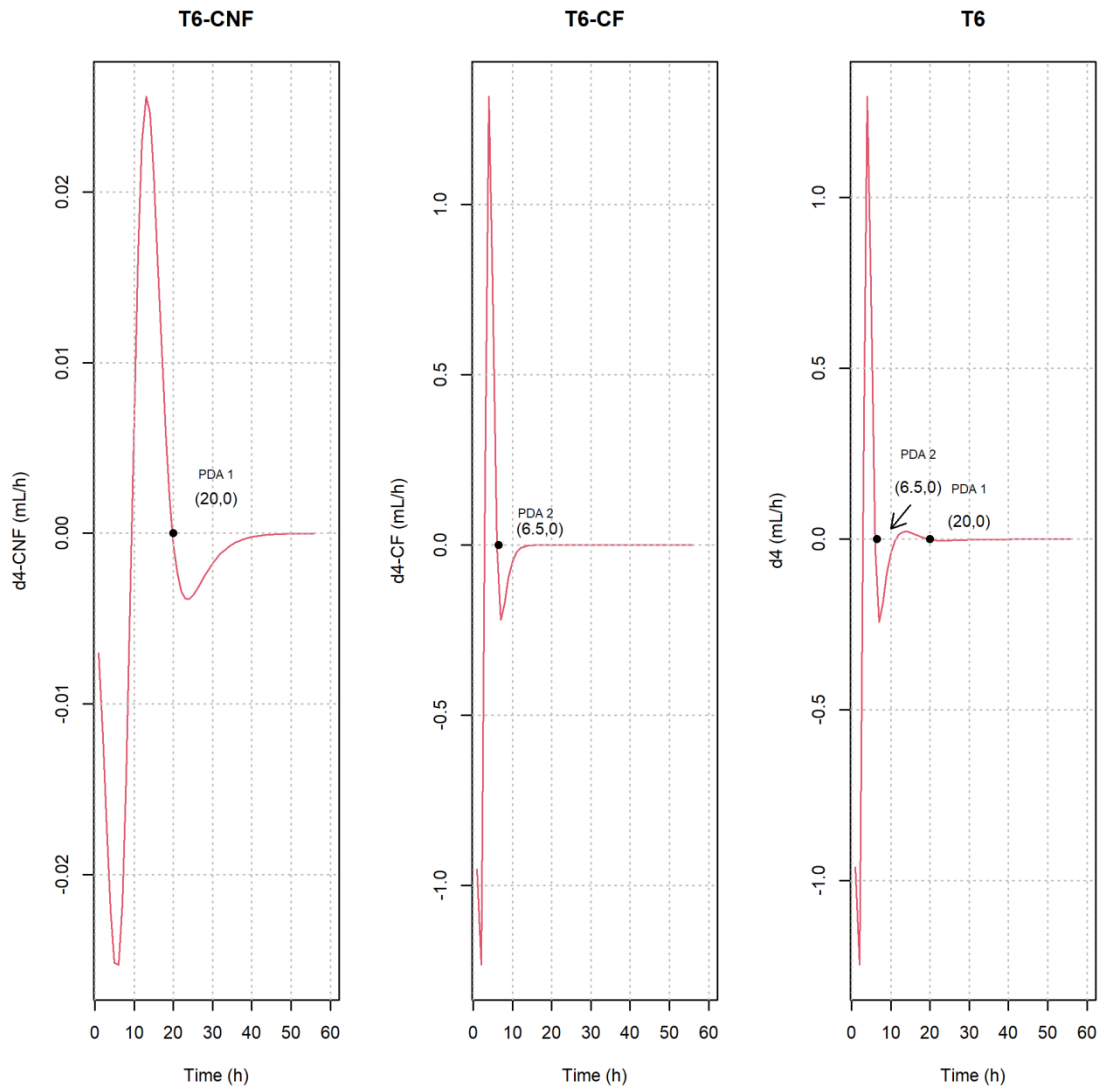
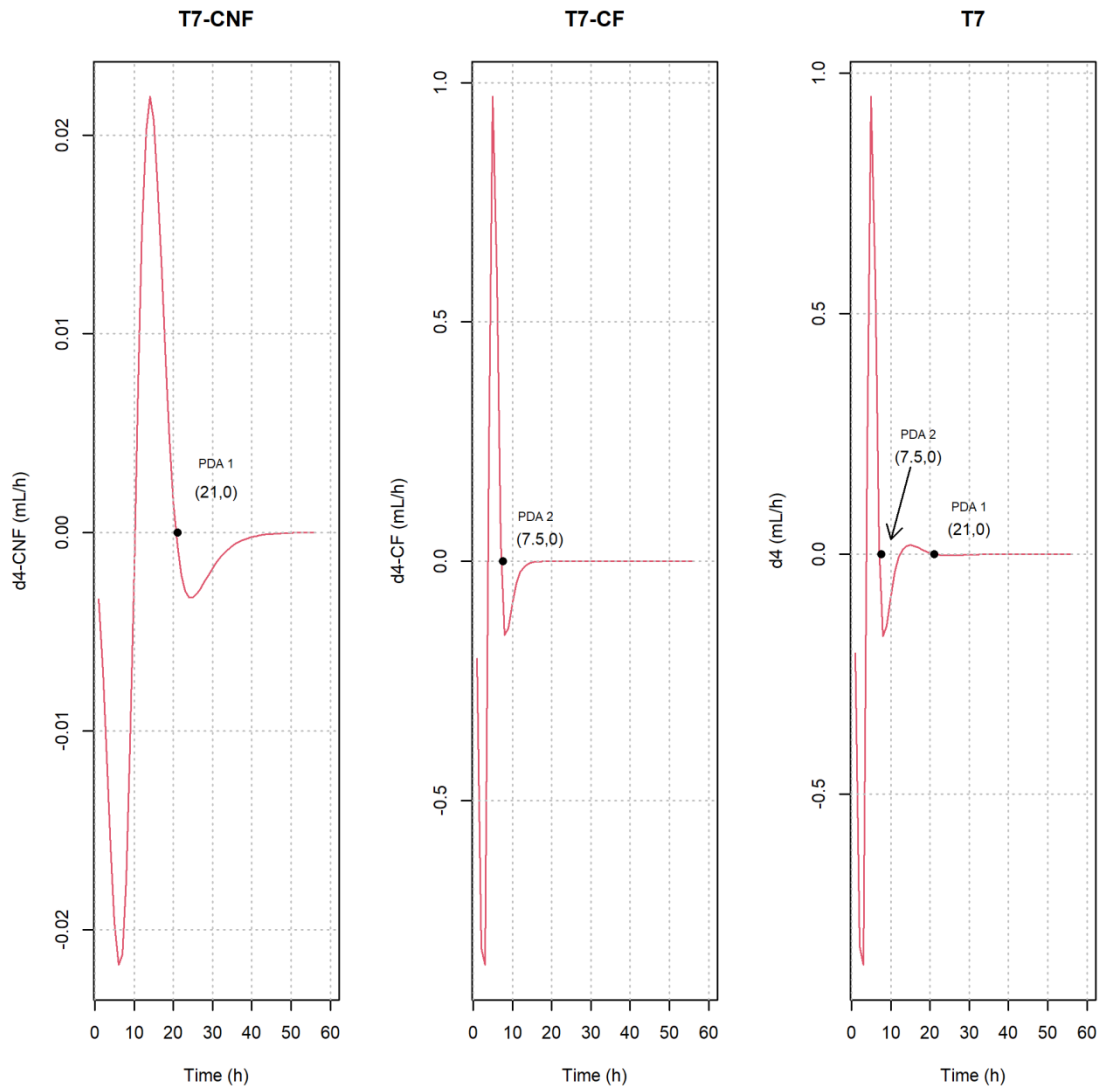


Figura 33: Quarta derivada (d4) da dieta T7. T7-CNF: d4 do primeiro compartimento do LB, referente à CNF. T7-CF: d4 do segundo compartimento do LB, referente à CF. T7: d4 do modelo LB completo.



APÊNDICE B: Dedução algébrica dos pontos críticos

1. Dedução do t_{PI}

$$Y(t) = \frac{A}{1 + e^{2-4C(t-L)}}$$

Sabe-se que $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

Faça

$$X = e^{2-4C(t-L)} \quad (1)$$

, como $(A)' = 0$, temos:

$$Y' = \frac{-A \cdot X'}{(1 + X)^2} \quad (2)$$

Sabe-se que $[f(g(t))]' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$, logo:

$$X' = e^{2-4C(t-L)} \cdot (-4C) = -4C e^{2-4C(t-L)}$$

$$X' = -4CX \quad (3)$$

Das eq. (2) e (3) temos:

$$Y' = \frac{4ACX}{(1 + X)^2} \quad (4)$$

$$Y'' = \frac{(1+X)^2 \cdot 4ACX' - 4AC[(1+X)^2]'}{(1+X)^4} \quad (5)$$

Segue que:

$$[(1+X)^2]' = 2(1+X) \cdot X' = 2(1+X) \cdot (-4CX) \quad (6)$$

Substituindo a eq. (6) na eq. (5) e fazendo manipulações algébricas, chega-se à expressão da derivada de segunda ordem:

$$Y'' = \frac{16C^2XA(X-1)}{(1+X)^3} \quad (7)$$

O valor de t que anula a derivada de Y - eq. (7) é :

$$X = e^{2-4C(t-L)} = 1$$

$$e^{2-4C(t-L)} = e^0$$

$$2 - 4C(t - L) = 0$$

Logo,

$$t_{PI} = \frac{1}{2C} + L \quad (8)$$

2. Dedução do Y_{PI}

Temos

que

$$Y(t) = \frac{A}{1 + e^{2-4C(t-L)}}$$

Calcula-se o Y_{PI} fazendo $t = t_{PI}$. Logo:

$$Y_{PI}(t_{PI}) = \frac{A}{1 + e^{2-4C(t_{PI}-L)}}$$

Segue de (8) que

$$Y_{PI}(t_{PI}) = \frac{A}{1 + e^{2-4C(\frac{1}{2C}+L-L)}} = \frac{A}{1 + e^{2-4C(\frac{1}{2C})}} = \frac{A}{1 + e^{2-2}} = \frac{A}{1 + e^0} = \frac{A}{1 + 1} = \frac{A}{2}$$

Logo

$$Y_{PI} = \frac{A}{2} \quad (9)$$

Portanto, o ponto de inflexão de Y pode ser calculado como:

$$PI = (t_{PI}, Y_{PI})$$

3. Dedução do t_{PAM} e do t_{PDM}

Derivando a eq. (7), obtêm-se:

$$Y''' = \frac{(1+X)^3 16AC^2 [X' \cdot (X-1) + X \cdot (X-1)'] - 16AC^2 X \cdot (X-1) 3(1+X)^2 X'}{(1+X)^6}$$

Já calculou-se na secção 1 o valor de $X' = -4CX$. Observa-se que $(X - 1)' = X'$.

Após substituir os valores de X' e $(X - 1)'$ em Y''' , e diversas manipulações algébricas, temos:

$$Y''' = \frac{64AC^3X(X^2 - 4X + 1)}{(1 + X)^4} \quad (10)$$

Os valores de X que anulam Y''' são quando $X^2 - 4X + 1 = 0$. Ou seja, $X_1 = 2 + \sqrt{3}$ e $X_2 = 2 - \sqrt{3}$. Logo:

$$X_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$e^{2-4C(t-L)} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\ln(e^{2-4C(t-L)}) = \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$2 - 4C(t - L) = \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$t_{PAM} = \frac{2 - \ln(2 + \sqrt{3})}{4C} + L \quad (11)$$

O mesmo processo foi realizado com X_2 ,

$$X_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$e^{2-4C(t-L)} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\ln(e^{2-4C(t-L)}) = \ln(2 - \sqrt{3})$$

$$2 - 4C(t - L) = \ln(2 - \sqrt{3})$$

$$t_{PDM} = \frac{2 - \ln(2 - \sqrt{3})}{4C} + L \quad (12)$$

4. Cálculo do t_{PDA} .

Seja $Y''' = \frac{64AC^3X(X^2-4X+1)}{(1+X)^4}$, sabendo que $X' = -4CX$,

$$Y^{(4)} = \frac{(1+X)^4 64AC^3 [X(X^2-4X+1)]' - 64AC^3 X(X^2-4X+1) 4(1+X)^3 X'}{(1+X)^8}$$

e que $[X(X^2 - 4X + 1)]' = [X^3 - 4X^2 + X]' = 3X^2X' - 8XX' + X' = -12CX^3 + 32CX^2 - 4CX$,

$$Y^{(4)} = \frac{256AC^4X(X^3 - 11X^2 + 11X - 1)}{(1+X)^5}$$

Se fizermos $f(X) = (X^3 - 11X^2 + 11X - 1)$ e $X=1$, temos que : $f(1) = 1^3 - 11 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 1 = 1 - 11 + 11 - 1 = 0$. Logo, pode-se dividir o polinômio $X^3 - 11X^2 + 11X - 1$ pelo monômio $X - 1$, que tem como resultado $X^2 - 10X + 1$ (13). Utilizou-se Basckara para calcular a solução do polinômio resultante (13). Encontrou-se que $X = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Portanto, $X = e^{2-4C(t-L)} = 5 \pm 2\sqrt{6}$.

$$e^{2-4C(t-L)} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\ln(e^{2-4C(t-L)}) = \ln(5 - 2\sqrt{6})$$

$$2 - 4C(t - L) = \ln(5 - 2\sqrt{6})$$

$$-4C(t - L) = \ln(5 - 2\sqrt{6}) - 2$$

$$4C(t - L) = 2 - \ln(5 - 2\sqrt{6})$$

$$(t - L) = \frac{2 - \ln(5 - 2\sqrt{6})}{4C}$$

$$t_{PDA} = \frac{2 - \ln(5 - 2\sqrt{6})}{4C} + L \quad (14)$$

5. Dedução do Y_{PDA}

$$Y(t) = \frac{A}{1 + e^{2-4C(t-L)}}$$

$$Y(t_{PDA}) = \frac{A}{1 + e^{2-4C\left(\frac{2-\ln(5-2\sqrt{6})}{4C}+L-L\right)}}$$

$$Y(t_{PDA}) = \frac{A}{1 + e^{2-2+\ln(5-2\sqrt{6})}}$$

$$Y(t_{PDA}) = \frac{A}{1 + e^{\ln(5-2\sqrt{6})}}$$

$$Y(t_{PDA}) = \frac{A}{1 + 5 - 2\sqrt{6}}$$

$$Y(t_{PDA}) = \frac{A}{6 - 2\sqrt{6}} \cong \frac{A}{1.1010} \text{ (90,8\% de } A\text{)}$$