

Cícero Carlos Felix de Oliveira

**Transformação de Processos de Renovação Generalizados
em Processos Homogêneos de Poisson e seus
Desdobramentos**

Recife

31 de agosto de 2016



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

**Transformação de Processos de Renovação Generalizados em Processos
Homôgeneos de Poisson e seus Desdobramentos**

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 22/07/2016 pela comissão examinadora

Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Orientador:
Prof. Dr. Cláudio Tadeu Cristino
Coorientador:
Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino

Recife

31 de agosto de 2016

Ficha catalográfica

O48t Oliveira, Cícero Carlos Felix de
Transformação de processos de renovação generalizados em
processos homogêneos de Poisson e seus desdobramentos / Cícero
Carlos Felix de Oliveira. - Recife, 2016.
55 f. : il.

Orientador : Cláudio Tadeu Cristino.
Coorientador: Paulo Renato Alves Firmino.
Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada) – Universidade
Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática,
Recife, 2016.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Processos de renovação generalizados 2. Distribuição Weibull e
distribuição Exponencial 3. Transformação por lei de potência 4. Teste de
aderência 5. Momentos 6. Intervalos de confiança assintóticos I. Cristino,
Cláudio Tadeu, orient. II. Firmino, Paulo Renato Alves, coorient. Título.

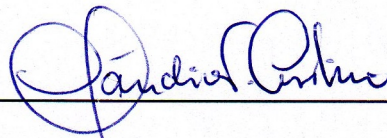
CDD 574.018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA
Transformação de Processos de Renovação Generalizados em Processos
Homogêneos de Poisson e seus Desdobramentos

Cícero Carlos Felix de Oliveira

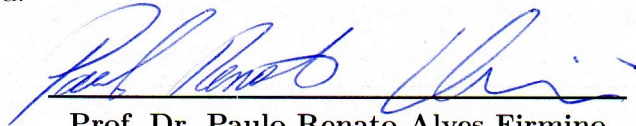
Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 22/07/2016 pela comissão examinadora

Orientador:

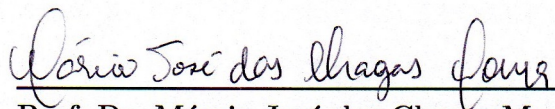


Prof. Dr. Cláudio Tadeu Cristino
Orientador

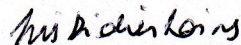
Banca examinadora:



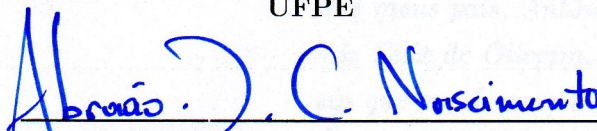
Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino
Centro de Ciências e Tecnologia, UFCA



Prof. Dr. Márcio José das Chagas Moura
Departamento de Eng. de Produção,
UFPE



Profa. Dra. Ísis Didier Lins
Departamento de Eng. de Produção,
UFPE



Prof. Dr. Abraão David Costa do
Nascimento
Departamento de Estatística, UFPE

Este trabalho é dedicado a DEUS, por ter me ajudado nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Antônia Freire Batista e Valmir Felix de Oliveira, pelas orações e incentivos que me deram no decorrer da minha vida.

À minha esposa, Francisca Alves de Souza, por estar presente em todos os momentos da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, uma vez que sem sua vontade nada é possível e por acreditar que nenhum homem seja capaz de superar obstáculos sem fé.

Eu sou extremamente grato aos meus orientadores: Dr. Cláudio Tadeu Cristino e Dr. Paulo Renato Alves Firmino, por sua orientação perspicaz, um suporte generoso e entusiasmado durante meu doutorado em Biometria e Estatística Aplicada. Eu gostaria antecipadamente, de expressar minha sincera gratidão aos membros da minha banca.

Agradeço ao corpo docente deste departamento por ofertar vários temas que ampliaram meu conhecimento, aguçando minhas habilidades técnicas e me preparando para minha carreira de docente pesquisador. Estou muito grato a todos os meus amigos e colegas pelo apoio durante todos esses anos. Ao secretário Marcos pela amizade e ajuda nas questões burocráticas.

Agradeço também aos colegas de trabalho do IFCE, Campus Crato, os quais eu tenho orgulho de tê-los como amigos. Agradeço em especial, o diretor e professor Eder Cardoso Gomes, pelo apoio nos meus projetos acadêmicos.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos meus familiares, pois sem eles não teria sido possível chegar até aqui. Aos meus pais, Antônia Freire Batista e Valmir Felix de Oliveira e também aos meus irmãos que sempre acreditaram em mim e me apoiaram para prosseguir nos meus sonhos. Um agradecimento especial à minha esposa, Francisca Alves de Souza, pois fui capaz de me dedicar aos meus estudos, livre de preocupações e medos, porque eu sabia que ela estaria comigo em cada momento.

*“Nem tudo que se enfrenta
pode ser modificado, mas
nada pode ser modificado
até que seja enfrentado”.*
(Albert Einstein)

Resumo

Processos de renovação generalizados (PRG) são ferramentas poderosas para a modelagem de sistemas reparáveis. Eles permitem uma avaliação da qualidade das intervenções realizadas, bem como a previsão do tempo de ocorrência de eventos indesejáveis, incorporando a fase de melhoria, estabilidade ou deterioração do sistema de interesse. Da literatura sobre o PRG, observa-se o desafio de desenvolver um teste de aderência simples para o PRG, bem como intervalos de confiança para seus parâmetros. Esta tese apresenta um modelo matemático capaz de fornecer análise estatística para o modelo PRG baseado na distribuição Weibull (PRGW). A essência deste modelo está em converter o PRGW em um Processo Homogêneo de Poisson (PHP), por meio da introdução de uma lei de potência generalizada. Uma característica importante dessa transformação é que o conjunto das variáveis obtidas além de serem identicamente distribuídas também são independentes entre si. A partir daí, propõe-se um teste de aderência simples para o PRGW, o qual testa a aderência da distribuição Exponencial sobre os dados transformados (por exemplo, utilizando o teste de Kolmogorov-Smirnov ou de Bartlett). A fim de estudar o desempenho do teste de aderência proposto para o PRGW em termos de ambas as taxas dos erros tipo I e tipo II, são realizadas simulações referentes ao PRGW e ao PRG baseado na distribuição Uniforme. Ainda com base nesta transformação, é possível construir intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do PRGW. A transformação ainda possibilita a obtenção de uma fórmula fechada para os k momentos do modelo PRGW, permitindo assim uma comparação com a distribuição Normal e fortalecendo ainda mais a ideia dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PRGW. O desempenho do teste de aderência e dos intervalos de confiança assintóticos também são analisadas através de casos reais da literatura envolvendo instalações marítimas, sistemas de para-brisa e de transformadores. A partir desses dados, pode-se concluir que o teste de aderência proposto para o PRGW tem o desempenho semelhante aos testes de aderência em geral, sendo que os intervalos de confiança assintóticos são adequados apenas nos casos que satisfazem as condições estabelecidas neste trabalho. Por sua vez, os casos reais indicam que alguns casos particulares do PRGW devem ser evitados em algumas circunstâncias.

Palavras-chaves: Processos de Renovação Generalizados. Distribuição Weibull e Distribuição Exponencial. Transformação por Lei de Potência. Teste de Aderência. Momentos. Intervalos de Confiança Assintóticos.

Abstract

Generalized Renewal Processes (GRP) are a powerful formalism for modelling repairable systems. They enable one to evaluate the quality of the performed interventions as well as to forecast the time to occur undesirable events. From GRP literature, one can see the current challenge of studying the goodness of fit of GRP models as well as the confidence intervals for GRP parameters. This thesis presents a mathematical model able to provide essential statistical analysis to the Weibull-based generalized renewal processes (WGRP). The essence of this model is to convert the WGRP in exponentially distributed variables (leading WGRP to Homogenous Poisson Processes (HPP)) by means of a generalized power law. An important feature of this transformation is that the resulting variables are independent and identically distributed to each other. Thereafter, a goodness of fit test is proposed to WGRP, where the adherence of the Exponential distribution to the transformed data is verified (via the Kolmogorov-Smirnov or Bartlett test, for instance). In order to study the performance of the proposed goodness of fit test for WGRP in terms of both type I and II error rates, simulated Uniform-based GRP and WGRP realizations are studied. Also based on this transformation, constructed asymptotic intervals for PRGW parameters. The transformation also allows a closed form for k moments of the WGRP, thus allowing a comparison with the normal distribution and further strengthening the idea of asymptotic intervals for PRGW. The usefulness of the goodness of fit test and asymptotic intervals are also illustrated by means of real world cases involving offshore, windshield, and transformer facilities. From the simulations, one can conclude that the proposed goodness of fit test for WGRP has performance similar to the goodness of fit test in general, being that asymptotic intervals are appropriate only in cases that meet the conditions established in this work. In turn, three real cases indicate that particular WGRP alternatives might be avoided in some circumstances.

Key-words: Generalized Renewal Processes. Weibull and Exponential Distributions. Power Law Transformations. Goodness of Fit Tests. Moments. Asymptotic Intervals.

Lista de Figuras

Figura 1 – Três situações de intervenções de acordo com o valor de q	6
Figura 2 – Duas situações extremas, com valores de q	7
Figura 3 – Ajuste do modelo PRGW ao conjunto de dados referente ao sistema de compressão (LANGSETH; LINDQVIST, 2006)], de acordo com Ferreira, Firmino e Cristino (2015)	46
Figura 4 – Comportamento do coeficiente de assimetria em relação ao valor de β , quando $n = 100$	49
Figura 5 – Comportamento do coeficiente de curtose em relação ao valor de β , quando $n = 100$	49
Figura 6 – Comportamento do coeficiente de assimetria em relação ao valor de q , quando $n = 100$	50
Figura 7 – Comportamento do coeficiente de curtose em relação ao valor de q , quando $n = 100$	51
Figura 8 – Comportamento do terceiro momento em relação aos valores de β , quando $n = 100$	52
Figura 9 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PRGW em relação ao tamanho amostral e o valor de β , com 95% de confiança.	53
Figura 10 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PRGW em relação ao tamanho amostral e o valor de q , com 95% de confiança.	54
Figura 11 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PR em relação ao tamanho amostral e o valor de β , com 95% de confiança.	55
Figura 12 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PNHP em relação ao tamanho amostral e o valor de β , com 95% de confiança.	55
Figura 13 – Comportamento da função $g(v_{i-1}) = \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$, em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo I.	82
Figura 14 – Comportamento da função $g(v_{i-1}) = \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$ em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo II.	83

- Figura 15 – Comportamento da função $h(v_{i-1}) = \Gamma\left(a, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right) \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$ em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo I e $a \rightarrow 0^+$ 83
- Figura 16 – Comportamento da função $h(v_{i-1}) = \Gamma\left(a, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right) \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$ em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo II e $a \rightarrow 0^+$ 84

Lista de tabelas

Tabela 1 – A distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com β e n para simulação com 100 iterações para cada amostra do modelo PRGWT, com respeito ao teste de aderência K-S para a distribuição Exponencial.	40
Tabela 2 – A distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com β e n para simulação com 100 iterações para cada amostra do modelo PRGWT, com respeito ao teste de aderência B para a distribuição Exponencial.	41
Tabela 3 – A distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com β e n para simulação com 100 iterações para cada amostra do modelo PRGWT, com respeito ao teste de aderência C-M para a distribuição Exponencial.	41
Tabela 4 – A distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com β e n para simulação com 100 iterações para cada amostra do modelo PRGWT, com respeito ao teste de aderência A-D para a distribuição Exponencial.	42
Tabela 5 – A distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com n e $q = 0,5$ para o teste de aderência do modelo PRGW através do Algoritmo 1, envolvendo 100 iterações para cada tamanho de amostra para o modelo PRGU.	43
Tabela 6 – Teste de aderência proposto via Algoritmo 1 para os modelos PRGW ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de compressão (LANGSETH; LINDQVIST, 2006).	45
Tabela 7 – Teste de aderência proposto via Algoritmo 1 para os modelos PRGW ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de pará-brisas de aeronave (MURTHY; XIE; JIANG, 2004).	47
Tabela 8 – Teste de aderência proposto via Algoritmo 1 para os modelos PRGW ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de transformadores da CHESF (CRISTINO, 2008).	48
Tabela 9 – Intervalos assintóticos para os modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de compressão (LANGSETH; LINDQVIST, 2006).	56

Tabela 10 – Intervalos assintóticos para os modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de pára-brisa de aeronave (MURTHY; XIE; JIANG, 2004).	56
Tabela 11 – Intervalos assintóticos para os modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de transformadores (CRISTINO, 2008).	56
Tabela 12 – Teste de derivada de segunda ordem para verificar o máximo local nos modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de transformadores (CRISTINO, 2008).	86

Lista de abreviaturas e siglas

PRG	Processo de Renovação Generalizado
PR	Processo de Renovação
PRGW	Processo de Renovação Generalizado baseado na distribuição Weibull
PHP	Processo Homogêneo de Poisson
FDA	Função Distribuição Acumulada
FDP	Função de Densidade de Probabilidade
MV	Máxima Verossimilhança
i.i.d.	Independente e Identicamente Distribuída
PRGWT	PRGW Transformada por lei de potência generalizada
PRGU	PRG baseada em uma distribuição Uniforme
A-D	Anderson-Darling
B	Bartlett's
K-S	Kolmogorov-Smirnov
C-M	Cramér-von Mises
p_{K-S}^*	p.valor do teste de K-S
p_{C-M}^*	p.valor do teste de C-M
p_{A-D}^*	p.valor do teste de A-D
p_B^*	p.valor do teste de B
EQM	Erro Quadrado Médio
LV	Log-Verossimilhança
$\mathbb{E}(X)$	Esperança da v.a. em X

<i>LI</i>	Limite Inferior
<i>LS</i>	Limite Superior
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	4
1.2	Organização da tese	4
2	Fundamentação Teórica	5
2.1	Processo de Renovação Generalizado	5
2.2	A Modelagem do PRGW	8
2.2.1	A distribuição Weibull	8
2.2.2	O modelo PRGW	9
2.3	Distribuição Assintótica dos Estimadores de MV	12
2.3.1	Matriz de informação de Fisher	12
2.3.2	Condições de regularidade	13
2.3.3	Intervalos assintóticos	14
3	Objetivos	15
3.1	Objetivo Geral	15
3.2	Objetivos Específicos	15
4	Metodologia Proposta	16
4.1	Comportamento do PRGW após transformação por lei de potência	16
4.1.1	A transformação por lei de potência simples	16
4.1.2	Propondo uma transformação por lei de potência para o PRGW	17
4.2	Algumas contribuições da transformação por lei de potência	20
4.2.1	A proposta do teste de aderência para o PRGW	20
4.2.2	Momentos do modelo PRGW	23
4.2.3	Intervalos de confiança assintóticos para o modelo PRGW	25
4.2.3.1	Estimador de máxima verossimilhança de α , β e q	25
4.2.3.2	Matriz de informação de Fisher	27
4.2.3.3	Intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do PRGW	35
4.2.3.4	Casos particulares do PRGW	35
5	Resultados	38
5.1	Aplicando o teste de aderência para o PRGW	38
5.1.1	Casos simulados	39

5.1.1.1	Taxa de erro tipo I: teste de aderência para o PRGW quando realiza o PRGW	39
5.1.1.2	Taxa de erro tipo II: teste de aderência para o PRGW quando realiza o PRGU	42
5.1.2	Casos reais	44
5.2	Aplicação dos momentos do PRGW	48
5.2.1	Dados simulados	48
5.3	Aplicação dos intervalos de confiança assintóticos do PRGW	52
5.3.1	Dados simulados para os intervalos de confiança assintóticos do PRGW	53
5.3.2	Simulações para os casos particulares do PRGW	54
5.3.3	Aplicação a casos reais	56
6	Considerações finais	58
	Referências Bibliográficas	60
	Apêndices	67
APÊNDICE A	Demonstração dos valores esperados das páginas 30 e 31	68
APÊNDICE B	Demonstração das matrizes de informação de Fisher e de covariância da subseção 4.2.3.4	77
APÊNDICE C	Análise gráfica para as fórmulas fechadas das matrizes de informação de Fisher e de covariância	82
APÊNDICE D	Teste de derivada segunda para máximo e mínimo local da função de log-verossimilhança	85

1 Introdução

Uma das características desejáveis de um sistema é que ele apresente vida útil de duração elevada e que neste período ele esteja isento de falhas. É claro que isso dificilmente será alcançado, pois as limitações de ordem biológica, física, econômica e social impõem restrições à vida útil de sistemas, possibilitando falhas, mesmo depois de intervenções de reparo ou de manutenções.

Por isso, as organizações foram convidadas a ser protagonistas do desenvolvimento sustentável através da otimização de seus sistemas de produção no que diz respeito às questões sociais, ambientais e econômicas. Assim, a minimização dos custos de produção e a probabilidade de ocorrência de eventos indesejáveis, como resíduos e emissão de substâncias, têm sido tão importante como se prevenir contra perdas e acidentes, enquanto maximiza os níveis de produção e a longevidade dos equipamentos e máquinas. Tal eficiência e controle de qualidade são inevitavelmente influenciadas por aspectos ambientais, bem como operacionais, geralmente envolvendo elementos estocásticos.

A modelagem dos processos estocásticos subjacentes a esses sistemas é fundamental para a prevenção de eventos indesejáveis e a realização do controle de qualidade. Como ilustração, a natureza estocástica da precipitação domina o balanço hídrico de sistemas de aproveitamento de águas pluviais (UNAMI *et al.*, 2015); as flutuações estocásticas de variáveis relevantes têm sido uma das principais problemáticas para a correta gestão das condições de funcionamento em reatores químicos (REVERBERI *et al.*, 2008); as incertezas inerentes aos processos de geração de energia eólica têm impedido sua expansão (WU *et al.*, 2016); a eletricidade gerada a partir de biomassa florestal também é dependente do tempo de variação na sua qualidade e disponibilidade (SHABANI; SOWLATI, 2016). Além disso, a incerteza intrínseca à operação, à deterioração, à restauração e à substituição de equipamentos também tem sido fundamental para uma produção mais limpa (UNAMI *et al.*, 2015).

Processos pontuais estão entre os formalismos estatísticos mais adotados para modelar tipos de intervenção por processos estocásticos, onde o tempo de parada associado às intervenções é insignificante em relação ao tempo total operacional. Sob esta perspectiva, o processo estocástico em relação aos instantes das intervenções do sistema pode ser expresso em termos da função de contagem (isto é, o número de intervenções conforme a evolução do tempo t), N_t (MODARRES; KAMINSKIY; KRIVTSOV, 2009), dos tempos

entre as intervenções $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$ ou dos tempos até a intervenção $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_i, \dots, T_n)$, por exemplo. O termo *tempo* pode representar genericamente qualquer unidade de medida sobre a qual as intervenções são observadas (por exemplo, metros, segundos, quilogramas, metros cúbicos, e assim por diante). Sob este ponto de vista, cada ação de intervenção normalmente visa à melhoria ou à recuperação do sistema, de acordo com uma determinada métrica de desempenho.

O Processo de Renovação Generalizado (PRG) tem estado na vanguarda dos processos pontuais. Essa modelagem é tradicionalmente feita acrescentando-se um parâmetro de rejuvenescimento q no conjunto de parâmetros da distribuição de probabilidades subjacente ao processo estocástico. Essa ideia foi primeiramente apresentada por [Kijima e Sumita \(1986\)](#) que introduziu o conceito de idade virtual, uma função que opera sobre a idade real do sistema via q .

Especificamente, se $q = 0$ o PRG representa um Processo de Renovação (PR), onde cada intervenção leva o sistema a uma condição de “tão bom quanto novo”; agora, $q = 1$ representa um Processo Não-Homogêneo de Poisson (PNHP), onde cada intervenção leva o sistema a uma condição de “tão ruim quanto velho”. Uma vez que o processo estocástico foi modelado através de um PRG, de acordo com um dado método de estimação (por exemplo, via máxima verossimilhança ou inferência Bayesiana), ações de intervenção otimizadas podem ser planejadas ([STADJE; ZUCKERMAN, 1992; MAKIS; JARDINE, 1993; KOBACY; JEON, 2002](#)), assim como métricas quantitativas para avaliação do sistema são fornecidas ([KAMINSKIY; KRIVTSOV, 2000; KIJIMA; MORIMURA; SUZUKI, 1988; FERREIRA; FIRMINO; CRISTINO, 2015](#)). Neste contexto, a aderência do modelo PRG ao conjunto de dados de desempenho disponíveis (uma realização de \mathbf{X}) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, desempenha um papel fundamental para a decisão.

Uma série de testes de aderência foram desenvolvidos para os modelos particulares do PRG, isto é, PR e PNHP ([KLEFSJÖ; KUMAR, 1992; LAWLESS; THIAGARAJAH, 1996; GAUDOIN; YANG; XIE, 2003; MURTHY; XIE; JIANG, 2004; EBELING, 2004](#)). Por outro lado, parece não existir um teste de aderência para o PRG generalizado (isto é, para qualquer valor de q).

Assim como uma série de ferramentas matemáticas foram desenvolvidas para as análises estatísticas dos casos particulares dos PRG, isto é, PR e PNHP, tais como: intervalos de confiança assintóticos ([YAGOUTI et al., 2001; METTAS; ZHAO, 2005; GAUDOIN; YANG; XIE, 2006; GUO et al., 2007; PANAH; ASADI, 2011](#)) e uma fórmula fechada para cálculo do primeiro momento ([FERREIRA; FIRMINO; CRISTINO, 2015](#)). Porém, não foram encontrados na literatura trabalhos que obtivessem intervalos de confiança assintóticos e nem fórmula fechada para os k momentos centrais para o modelo PRGW.

A fim de resolver esse problema, o presente trabalho propõe um teste de aderência para o PRG baseado na distribuição Weibull (PRGW), uma fórmula fechada para os k momentos (centrais) e intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do PRGW. Todos esses resultados são baseados numa transformação da variável que representa o tempo entre intervenções, através de uma função lei de potência generalizada, proposta no trabalho.

O PRGW tem sido o principal modelo PRG adotado pela literatura. Nesse caso, o conjunto de parâmetros do modelo PRGW (α, β, q) representa medidas de escala, forma e rejuvenescimento, respectivamente. Até o momento, vários autores vêm trabalhando em ajustar e aplicar o modelo PRGW (KRIVTSOV, 2000; YAÑEZ; JOGLAR; MODARRES, 2002; METTAS; ZHAO, 2005). A pesquisa de Tanwar, Rai e Bolia (2014) traz outras referências para este tema. Devido à falta de um teste de aderência para o PRGW, estes autores vem inadvertidamente assumido que a distribuição Weibull como subjacente ao processo estocástico sob estudo. Na verdade, poucos estudos foram desenvolvidos para avaliar efetivamente um teste de aderência do PRGW para os dados de desempenho do sistema. Em alguns casos onde o problema é abordado, os pesquisadores recorreram a testes de aderência bastante sofisticados, como aproximações de *bootstrap* (LANGSETH; LINDQVIST, 2006), ou até mesmo processos pontuais alternativos envolvendo tendências intrínsecas ao sistema (tais como o crescimento da confiabilidade ou deterioração) e efeito das intervenções (GUO et al., 2007).

O teste de aderência para o PRGW proposto se baseia principalmente em uma transformação por lei de potência generalizada dos intervalos entre as intervenções e as respectivas idades virtuais (OLIVEIRA; CRISTINO; FIRMINO, 2016). Especificamente a transformação sugerida generaliza a relação bem conhecida entre as variáveis Weibull com os parâmetros de escala α e forma β (WEIBULL, 1951) e a variável exponencial (com média θ), onde $\theta = \alpha^\beta$. Após a transformação o teste de aderência simples para a distribuição Exponencial é aplicado.

Se considerar o caso particular $q = 0$ para o PRGW (ou seja, o PR que segue uma distribuição Weibull de dois parâmetros), as condições para construção dos intervalos de confiança assintóticos são satisfeitas (KOTZ; JOHNSON; READ, 1988, p. 551). De acordo com Johnson, Kotz e Balakrishnan (1994, p. 659), essas condições também são satisfeitas para a distribuição Weibull com três parâmetros, sendo satisfeita apenas quando o parâmetro de forma é maior do que 2. Outros autores como Cohen e Whitten (1988, p. 48) computaram os elementos da matriz de covariância; Balakrishnan e Cohen (1991, p. 125) também trabalharam com intervalos de confiança assintóticos para o parâmetro de forma com valores maiores do que 2; Harter (1970, p. 104) apresentou expressões

semelhantes para o caso onde a amostra disponível apresenta dados com censura Tipo II. Resultado semelhante também se encontra em [Balakrishnan \(1995, Subseção 24.3\)](#) e em [Lockhart e Stephens \(1994\)](#).

A afirmação feita no final do paragrafo anterior é semelhante ao resultado obtido para os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do modelo PRGW. Ou seja, aqui são propostos intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros (α, β, q) com a restrição de que β deve ser maior do que 2. Tanto os intervalos de confiança assintóticos, como os k momentos são calculados por meio de uma transformação (lei de potência generalizada) do modelo PRGW para uma distribuição Exponencial.

1.1 Motivação

Durante toda revisão de literatura foram reconhecidas a sofisticação e as dificuldades de tratar matematicamente os modelos probabilísticos que envolvem o PRG a partir da distribuição Weibull (PRGW). Até o presente momento, os trabalhos nesta área precisam de elevado suporte computacional para resolver problemas elementares. Por isso, surge a necessidade de desenvolver métodos alternativos e fórmulas fechadas para PRGW que tornem a abordagem do problema mais simples. Daí, surgiu a ideia de construir uma transformação que possibilite estudar o ajuste do modelo PRGW a um certo conjunto de dados; calcular os seus k momentos centrais; construir intervalos assintóticos e várias outras possibilidades para trabalhos futuros.

1.2 Organização da tese

Esta tese está dividida da seguinte forma. O próximo capítulo traz uma revisão de literatura sobre o modelo PRG seguindo uma distribuição Weibull (PRGW), e na [seção 2.1](#) descreve o modelo PRG e suas derivadas; na [seção 2.2](#) descreve o modelo PRGW e seus resultados mais importantes; enquanto na [seção 2.3](#) são descritos as condições para uma distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. No [Capítulo 3](#) são citados os objetivos gerais e específicos que deram origem ao dois capítulos seguintes. No [Capítulo 4](#) são apresentadas todas as ferramentas matemáticas para análise proposta, onde a [seção 4.1](#) propõe uma transformação por lei de potência generalizada que possibilita encontrar um teste de aderência para o PRGW na [subseção 4.2.1](#); os k momentos centrais na [subseção 4.2.2](#) e intervalos de confiança assintóticos na [subseção 4.2.3](#). No [Capítulo 5](#) estão as análises numéricas das ferramentas obtidas no [Capítulo 4](#). Finalmente, o [Capítulo 6](#) traz algumas considerações finais.

2 Fundamentação Teórica

Neste [Capítulo](#), serão abordados conceitos fundamentais para o entendimento dos próximos capítulos apresentados neste trabalho. Serão introduzidos conceitos relacionados ao PRG e suas derivadas, à distribuição Weibull, o PRG seguindo uma distribuição Weibull e a distribuição assintótica para os estimadores de máxima verossimilhança.

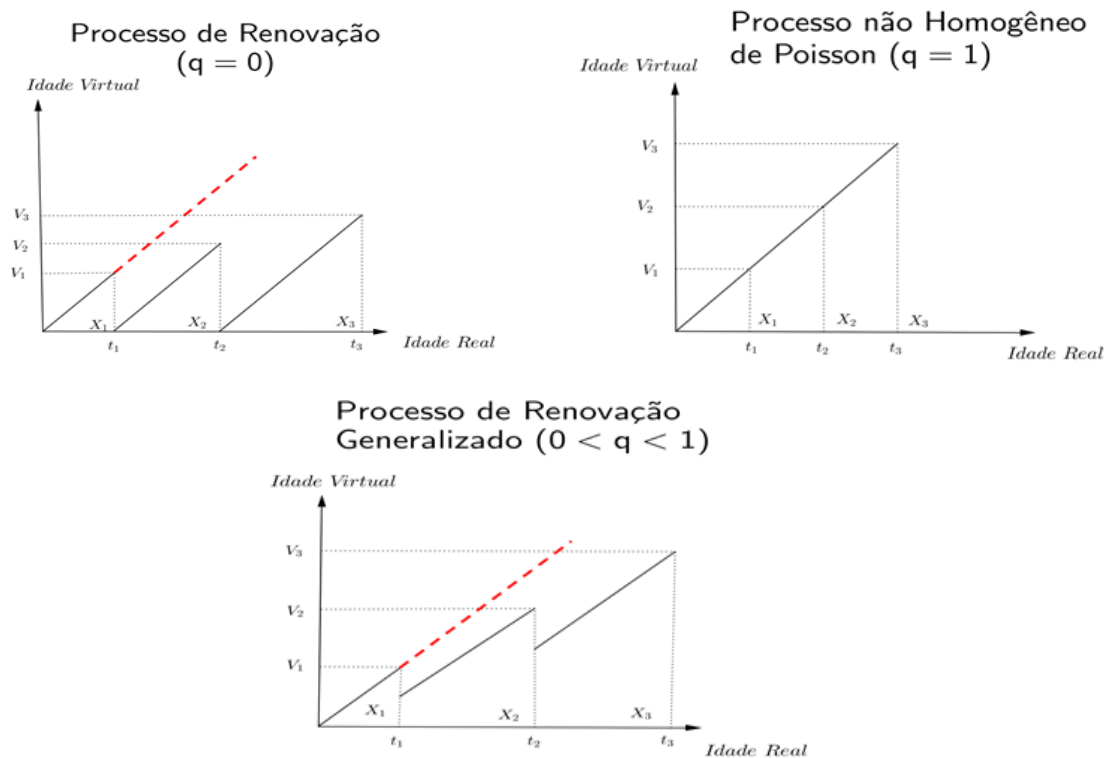
2.1 Processo de Renovação Generalizado

Neste trabalho serão usados sistemas reparáveis, no qual suas análises ocorrerão através de modelos probabilísticos baseados em processos estocásticos. Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto de índices, que representa, por exemplo, a evolução temporal de um sistema. Por algum tempo, sistemas reparáveis foram modelados a partir dos seus tempos entre falhas, utilizando-se a teoria de processos pontuais como a principal ferramenta. Os modelos mais usados para processos de contagem de falhas ao longo do tempo de operação de sistemas reparáveis são PR, incluindo o Processo Homogêneo de Poisson (PHP), e o PNHP. Tais modelos não são mais suficientes, pois na maioria das vezes não satisfazem algumas características, que demandam modelos mais sofisticados ([LINDQVIST, 2006](#)).

Geralmente, a qualidade do reparo ocorre com maior frequência entre dois casos extremos: o reparo mínimo e o reparo perfeito. Este caso intermediário é conhecido como o reparo imperfeito. Muitos modelos de reparação imperfeita têm sido propostos, mas os usuais são modelos que envolvem *idades virtuais* citado inicialmente por [Kijima e Sumita \(1986\)](#) e [Kijima \(1989\)](#), em que a reparação é considerada como fator de rejuvenescimento do sistema. Tais modelos são conhecidos como PRG. Assim como o reparo imperfeito pode ser considerado uma generalização do reparo perfeito e do reparo mínimo, o PRG é uma generalização de outros modelos probabilísticos, como o modelo PR e o modelo PNHP. Além disso, o PRG permite tratar situações que excedem o conjunto de soluções compreendidas entre o PR e o PNHP, possibilitando representar também a condição “melhor do que novo” e o reparo “pior do que antes”. Para medir estas situações, um parâmetro de rejuvenescimento, denotado por q , toma valores geralmente entre 0 e 1, porém ele pode exceder este intervalo. Assim, [Kijima, Morimura e Suzuki \(1988\)](#) apresentam cinco situações citadas a seguir para um sistema sob deterioração após intervenções para os modelos Kijima:

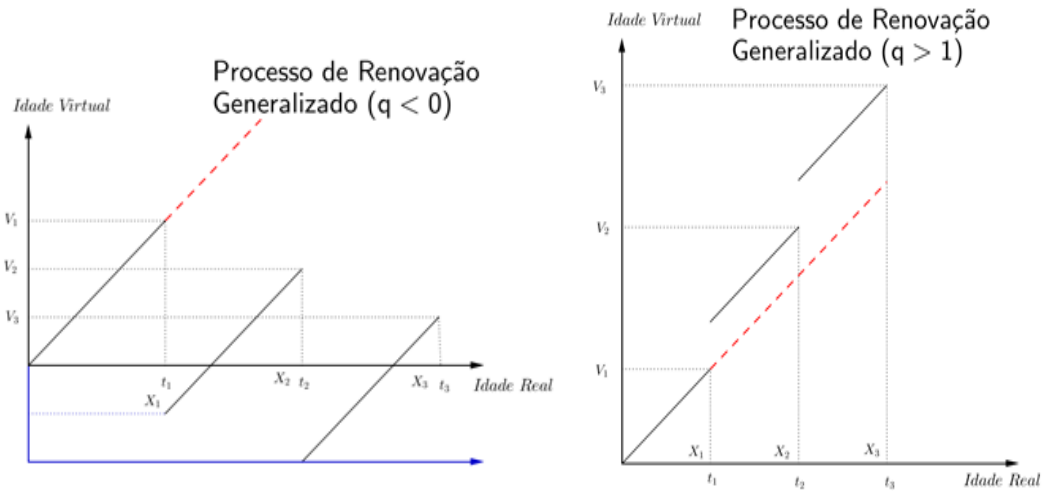
- $q < 0$: corresponde a uma intervenção que leva à condição de melhor do que novo, já que a idade virtual é menor que a idade real do sistema.
- $q = 0$: corresponde a uma intervenção perfeita, já que a idade virtual é sempre anulada após a i -ésima intervenção. Em outros termos, as intervenções levam o sistema a uma condição "tão bom quanto novo", caracterizando o PR;
- $0 < q < 1$: corresponde a uma intervenção imperfeita, em que a idade virtual é uma fração da idade real. Em outros termos, as intervenções levam o sistema a uma condição intermediária de restauração;
- $q = 1$: corresponde a uma intervenção mínima, já que a idade virtual é exatamente igual à idade real. Em outros termos, a restauração é mínima se leva o sistema a uma condição "tão ruim quanto antes da intervenção", caracterizando um PNHP;
- $q > 1$: corresponde a uma intervenção que leva a uma condição de "pior do que antes", já que a idade virtual é maior que a idade real do sistema. Em outros termos, as intervenções trazem o sistema para uma condição "pior do que antes da intervenção".

Figura 1 – Três situações de intervenções de acordo com o valor de q .



Fonte: Adaptação de [Ferreira \(2016\)](#)

Figura 2 – Duas situações extremas, com valores de q .



Fonte: Adaptação de [Ferreira \(2016\)](#)

As três situações intermediárias podem ser ilustradas como na [Figura 1](#), em que pode ser vista a relação entre as idades virtual e real. A idade real não pode ser interrompida, mas a idade virtual sofre algum tipo de modificação de acordo com o valor de q (o efeito das intervenções). Também, as outras duas situações são ilustradas na [Figura 2](#).

Uma estrutura matemática para representar a ação do valor de q sobre a idade virtual foi inicialmente desenvolvida por [Kijima, Morimura e Suzuki \(1988\)](#), como dois modelos para idade virtual v_i . Estes dois modelos são amplamente conhecidos na literatura do PRG como os modelos Kijima tipo I e Kijima tipo II, e definidos por:

$$\textbf{Kijima tipo I:} \quad V_i = v(X_i|q, V_{i-1}) = V_{i-1} + qX_i \quad (2.1)$$

$$\textbf{Kijima tipo II:} \quad V_i = v(X_i|q, V_{i-1}) = q(V_{i-1} + X_i) \quad (2.2)$$

em que X_i é tempo entre a $(i-1)$ -ésima e a i -ésima intervenção e $v(\cdot|\cdot)$ é a função idade virtual.

No modelo correspondente à Eq. (2.1) considera-se que a i -ésima reparação pode remover apenas os danos sofridos entre os tempos da $(i-1)$ -ésima e i -ésima intervenção. O modelo correspondente à Eq. (2.2) considera-se que a i -ésima reparação pode diminuir todos os danos acumulados até i -ésima intervenção. Por isso, é importante distinguir, em cada problema estudado, o comportamento do impacto das intervenções feitas no sistema reparável. De acordo com as pesquisas feitas por [Jacopino, Groen e Mosleh \(2004\)](#), a escolha do modelo Kijima tipo I ou Kijima tipo II está diretamente relacionada à abrangência de atuação da intervenção. Ou seja,

- para componentes individuais o modelo mais apropriado é o Kijima tipo I e
- para sistemas complexos (por exemplo, aviões, carros, entre outros) o modelo mais apropriado é o Kijima tipo II.

2.2 A Modelagem do PRGW

2.2.1 A distribuição Weibull

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ um vetor aleatório, onde cada X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) segue uma distribuição Weibull (WEIBULL, 1951) com parâmetros (α, β) , ou seja, $X_i \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$, então a função distribuição acumulada (FDA) do X_i é dada por:

$$F_{X_i}(x_i | \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right], & x_i \geq 0, \\ 0, & x_i < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

em que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são os parâmetros de escala e de forma, respectivamente. Em particular, o k -ésimo momento de X_i é dado por:

$$\mathbb{E}(X_i^k) = \alpha^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{\beta} \right).$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt; \quad z > 0.$$

Sua propriedade mais importante é dada por $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

A distribuição em (2.3) pode ser escrita na forma paramétrica alternativa, fazendo $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, obtendo-se:

$$F_{X_i}(x_i | \lambda, \beta) = \begin{cases} 1 - \exp \left[-(\lambda x_i)^\beta \right], & x_i \geq 0, \\ 0, & x_i < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Sabe-se que as funções (2.3) e (2.4) são equivalentes, mas dependendo do contexto, uma representação paramétrica particular pode ser mais apropriada do que a outra. Por isso, neste trabalho será adotada a distribuição (2.3) como padrão para Weibull.

De acordo com Ebeling (2004, p. 59), a função densidade de probabilidade (FDP) da distribuição Weibull apresenta alguns comportamentos para diferentes valores do parâmetro de forma β . Por exemplo, para $\beta < 1$ a FDP é semelhante em forma a distribuição Exponencial; para valores grandes de β (a partir de $\beta \geq 3$) a FDP se aproxima de uma distribuição Normal; para $1 < \beta < 3$ a FDP é um pouco distorcida; para $\beta = 1$ a FDP é igual a distribuição Exponencial.

2.2.2 O modelo PRGW

Inicialmente, [Smith e Leadbetter \(1963\)](#) propuseram uma solução iterativa para a equação de renovação nos casos em que os tempos entre as intervenções seguem uma distribuição Weibull. A partir daí, a distribuição Weibull em (2.3) tem sido determinante para modelar os tempos entre intervenções via o formalismo do processo pontual. Por exemplo:

- (i) $\alpha > 0$, $\beta = 1$, e variáveis independentes em \mathbf{X} levam a um PHP baseado numa distribuição Exponencial;
- (ii) $\alpha > 0$, $\beta > 0 (\neq 1)$ e $q = 1$ (intervenção mínima) reflete o sistema a uma condição “tão ruim quanto velho” e assim, variáveis dependentes em \mathbf{X} conduzem a um PNHP baseado em uma distribuição Weibull;
- (iii) $\alpha > 0$, $\beta > 0 (\neq 1)$ e $q = 0$ (intervenção perfeita) reflete o sistema a uma condição “tão bom quanto novo” e assim, variáveis independentes e identicamente distribuídas em \mathbf{X} conduzem a um PR baseado em uma distribuição Weibull;
- (iv) $\alpha > 0$, $\beta > 0 (\neq 1)$ e $\{q \in \mathbb{R} \mid q \neq \{0, 1\}\}$ (intervensões genéricas) reflete o sistema a condições diferentes de “tão ruim quanto velho” e “tão bom quanto novo” e assim, variáveis dependentes em \mathbf{X} , conduzem a um PRGW, que envolvem as *idades virtuais*, propostas inicialmente por [Kijima e Sumita \(1986\)](#) e [Kijima \(1989\)](#).

Portanto, o PRGW envolve os modelos PHP, PNHP e PR, e desta forma, está na vanguarda dos processos pontuais. Na literatura, vem sendo usual ajustar o PRGW para a análise de sistemas reparáveis, pois os seus parâmetros são muito flexíveis. Ver por exemplo, [Yañez, Joglar e Modarres \(2002\)](#), [Jain e Maheshwari \(2006\)](#), [Jiménez e Villalón \(2006\)](#), [Moura et al. \(2007\)](#), [Wang e Yang \(2012\)](#), [Ferreira, Firmino e Cristino \(2015\)](#), entre outros.

Em um PRGW, cada tempo entre intervenções, X_i , segue uma distribuição Weibull (2.3) condicionada à idade virtual correspondente, v_{i-1} , e o conjunto de parâmetros (α, β, q) representa as características de escala, forma e rejuvenescimento do processo, nesta ordem. Inspirado por autores como [Yañez, Joglar e Modarres \(2002\)](#), pode-se definir a FDA do modelo PRGW, em termos de T_i no ponto $(x + v_{i-1})$, como segue:

$$\begin{aligned}
F_{T_i}(x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta) &= \frac{F_{T_1}(x + v_{i-1}) - F_{T_1}(v_{i-1})}{1 - F_{T_1}(v_{i-1})} \\
&= \frac{1 - \exp\left[-\left(\frac{x+v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right] - 1 + \exp\left[-\left(\frac{v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right]}{1 - 1 + \exp\left[-\left(\frac{v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right]} \\
&= \frac{-\exp\left[-\left(\frac{x+v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right] + \exp\left[-\left(\frac{v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\exp\left[-\left(\frac{v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right]} \\
&= \begin{cases} 1 - \exp\left[\left(\frac{v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{x+v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right], & (x + v_{i-1}) \geq 0, \\ 0, & (x + v_{i-1}) < 0, \end{cases} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

em que $v_i = v_i(q, x_1, x_2, \dots, x_n)$ e T_i é o instante que ocorre a i -ésima intervenção.

A FDP de T_i no ponto $(x + v_{i-1})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
f_{T_i}(x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta) &= \\
&= \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x + v_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[\left(\frac{v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{x + v_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right], & (x + v_{i-1}) \geq 0 \\ 0, & (x + v_{i-1}) < 0, \end{cases} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

em que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q \in (-\infty, +\infty)$, e $x > 0$. A respectiva *hazard function* é dada por:

$$\begin{aligned}
h_{T_i}(x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta) &= \frac{f_{T_1}(x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta)}{1 - F_{T_1}(x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta)} \\
&= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x + v_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta-1} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Vale a pena mencionar que, em termos da *hazard function* (2.7), $\beta < 1$ ($\beta > 1$) reflete um sistema em melhoria (em deterioração), enquanto que $\beta = 1$ representa um sistema estável. Além disso, para $\beta > 1$ ($\beta < 1$), quanto menor (maior) o valor de q melhores serão as intervenções (FERREIRA; FIRMINO; CRISTINO, 2015), uma vez que v_{i-1} é diretamente proporcional a q .

Por sua vez, v_{i-1} pode ser também definido como uma função do conjunto de dados de desempenho do sistema em termos de ambos os tempos entre intervenções $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{i-1})$ e a respectiva natureza de tais intervenções $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{i-1})$ (por exemplo, se planejada ou não), além do parâmetro já conhecido q . Assim, $v_{i-1} =$

$v((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{i-1}, y_{i-1}) \mid q)$ Em resumo, [Ferreira, Firmino e Cristino \(2015\)](#) sugerem que o nível de restauração imposta ao sistema por cada intervenção depende fortemente do respectivo tipo de intervenção, o que resulta no modelo de idade virtual baseado em Kijima generalizado ([KIJIMA; MORIMURA; SUZUKI, 1988](#); [KIJIMA, 1989](#)):

$$v_i = c_{y_i}(v_{i-1} + qx_i) + (1 - c_{y_i})q(v_{i-1} + x_i), \quad (2.8)$$

em que $c_{y_i} \in [0, 1]$ e $q \in (-\infty, +\infty)$. Assim, (2.8) é uma combinação linear convexa, de tal forma que $c_{y_i} = 1$ leva ao modelo Kijima tipo I, $c_{y_i} = 0$ leva ao modelo Kijima tipo II e $c_{y_i} \in (0, 1)$ leva a mistura entre os Kijimas. Neste trabalho, serão analisados apenas os modelos Kijimas tipo I e tipo II.

Dentre os métodos estatísticos de inferência clássica, o método de máxima verossimilhança é preferível devido às suas propriedades assintóticas. No método de máxima verossimilhança as estimativas são obtidas a partir da maximização da função de verossimilhança ([CASELLA; BERGER, 2002](#)).

Assim, usando o conceito de função de verossimilhança, o processo de estimação de máxima verossimilhança é baseado na FDP conjunta de (2.6) e suas derivadas, que é dado por [Yañez, Joglar e Modarres \(2002\)](#). Então, de acordo com o teorema do produto, a FDP conjunta de (2.6) é dada por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} \mid \alpha, \beta, q) &= f(x_1 + v_0 \mid v_0, \alpha, \beta) \cdot f(x_2 + v_1 \mid v_1, \alpha, \beta) \cdots f(x_n + v_{n-1} \mid v_{n-1}, \alpha, \beta) \\ &= f(x_1 \mid \alpha, \beta) \cdot f(x_2 + v_1 \mid (q, x_1), \alpha, \beta) \cdots f(x_n + v_{n-1} \mid (q, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \alpha, \beta) \\ &= \frac{\beta^n}{\alpha^{n\beta}} \left[\prod_{i=1}^n (x_i + v_{i-1})^{\beta-1} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left((x_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ são tempos entre intervenções.

Seja $\ell = \ln(f(\mathbf{x} \mid \alpha, \beta, q))$ a função de log-verossimilhança do PRGW. Então,

$$\ell = n [\ln(\beta) - \beta \ln(\alpha)] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i + v_{i-1}) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left((x_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta \right) \quad (2.10)$$

Derivando a função (2.10) em relação a cada parâmetro do PRGW, e depois igualando a zero, obtêm-se as estimativas de Máxima Verossimilhança (MV) $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} &= -\frac{n\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}^{\hat{\beta}+1}} \sum_{i=1}^n \left((x_i + \hat{v}_{i-1})^{\hat{\beta}} - \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}} \right) = 0 \\ \implies \hat{\alpha} &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i + \hat{v}_{i-1})^{\hat{\beta}} - \sum_{i=1}^n \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}}}{n} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= n \left(\frac{1}{\beta} - \ln(\alpha) \right) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + v_{i-1}) + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left((x_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta \right) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left((x_i + v_{i-1})^\beta \ln(x_i + v_{i-1}) - v_{i-1}^\beta \ln(v_{i-1}) \right) \implies \\ \hat{\alpha}^{\hat{\beta}} \left(\frac{n}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + \hat{v}_{i-1}) \right) &- \sum_{i=1}^n \left((x_i + \hat{v}_{i-1})^{\hat{\beta}} \ln(x_i + \hat{v}_{i-1}) - \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}} \ln(\hat{v}_{i-1}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial q} &= (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{v'_{i-1}}{x_i + v_{i-1}} \right) - \frac{\beta}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left(v'_{i-1} (x_i + v_{i-1})^{\beta-1} - v'_{i-1} v_{i-1}^{\beta-1} \right) \\ \implies \hat{\alpha}^{\hat{\beta}} \left(1 - \frac{1}{\hat{\beta}} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{v}'_{i-1}}{x_i + \hat{v}_{i-1}} \right) &- \sum_{i=1}^n \left(\hat{v}'_{i-1} (x_i + \hat{v}_{i-1})^{\hat{\beta}-1} - \hat{v}'_{i-1} \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}-1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

São os mesmos resultados obtidos em [Ferreira, Firmino e Cristino \(2015\)](#), só que uma simplificação mais rigorosa foi feita. Apesar do parâmetro q não estar explicitamente mostrado nas derivadas, é intuitivo notar que \hat{v}_{i-1} é uma função do q em (2.8). Assim, tem-se:

$$\hat{v}_{i-1} = c_{y_i}(\hat{v}_{i-2} + \hat{q}x_{i-1}) + (1 - c_{y_i})\hat{q}(\hat{v}_{i-2} + x_{i-1}) \quad (2.14)$$

$$\hat{v}'_{i-1} = c_{y_i}(\hat{v}'_{i-2} + x_{i-1}) + (1 - c_{y_i})(\hat{v}_{i-2} + x_{i-1} + \hat{q}\hat{v}'_{i-2}) \quad (2.15)$$

onde \hat{v}'_{i-1} é a derivada de primeira ordem de \hat{v}_{i-1} em relação ao parâmetro q .

2.3 Distribuição Assintótica dos Estimadores de MV

2.3.1 Matriz de informação de Fisher

Seja $\ell(\boldsymbol{\vartheta})$ a função de log-verossimilhança para um modelo específico em um conjunto de dados composto de n observações independentes, mas não necessariamente

identicamente distribuídas. Sabe-se que $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ é uma solução consistente (veja as condições de regularidade em [subseção 2.3.2](#)) da derivada de primeira ordem da equação de máxima verossimilhança $\frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} = 0$. Denota-se por $\mathcal{I}(\boldsymbol{\vartheta})$, a quantidade de informação esperada por variáveis aleatórias realizadas em grandes amostras. Então, em geral

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\vartheta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \begin{bmatrix} E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_1^2} \right) & E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_1 \partial \vartheta_2} \right) & \cdots & E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_1 \partial \vartheta_p} \right) \\ E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_2 \partial \vartheta_1} \right) & E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_2^2} \right) & \cdots & E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_2 \partial \vartheta_p} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_p \partial \vartheta_1} \right) & E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_{p-1} \partial \vartheta_2} \right) & \cdots & E \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_p^2} \right), \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

em que $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p)$ é um vetor p -dimensional. A matriz $I(\boldsymbol{\vartheta}) = n\mathcal{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ é conhecida como matriz de informação de Fisher ou matriz de informação Esperada ([MEEKER; ESCOBAR, 1998](#)). A definição em (2.16) só é verdadeira se a seguinte identidade for válida:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\vartheta}} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \ell}{\partial \vartheta_j} \right) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\vartheta}} \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

2.3.2 Condições de regularidade

De acordo com os autores [Cramér \(1946, Seção 33\)](#), [Meeker e Escobar \(1998, Apêndice B\)](#) e [Cordeiro \(1999, Subseção 4.1.3\)](#) algumas condições de regularidade são necessárias para provar as propriedades assintóticas dos estimadores de MV de consistência, unicidade, normalidade, eficiência e suficiência.

Suponha que w_1, w_2, \dots, w_n são realizações i.i.d. de uma variável aleatória W_i caracterizada pela família paramétrica de distribuições $F_{\boldsymbol{\vartheta}}$ pertencentes a uma certa classe \mathcal{F} , que dependem de um vetor $\boldsymbol{\vartheta}$ p -dimensional ($p = 1, 2, \dots$), $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$. Sejam $f(w_i | \boldsymbol{\vartheta})$ e $\ell(\boldsymbol{\vartheta}) = \ln \left(\prod_{i=1}^n f(w_i | \boldsymbol{\vartheta}) \right)$ a função densidade de probabilidade e a função de log-verossimilhança.

As seguintes suposições serão necessárias no decorrer deste trabalho:

- (i) as distribuições $F_{\boldsymbol{\vartheta}}$ são identificáveis, isto é, $\boldsymbol{\vartheta} \neq \boldsymbol{\vartheta}'$ implica $F_{\boldsymbol{\vartheta}} \neq F_{\boldsymbol{\vartheta}'}$;
- (ii) as distribuições $F_{\boldsymbol{\vartheta}}$ têm o mesmo suporte para todo $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$, ou seja, o conjunto $A = \{w; f(w | \boldsymbol{\vartheta}) > 0\}$ não depende de $\boldsymbol{\vartheta}$;

- (iii) existe um conjunto aberto Θ_1 em Θ contendo ϑ_0 tal que a função de densidade $f(w; \vartheta)$, para quase todo w , admite todas as derivadas até a terceira ordem em relação a ϑ , para todo $\vartheta \in \Theta_1$;
- (iv) para $\mathbb{E}_{\vartheta} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \vartheta} \right) = 0$ a matriz de informação de Fisher $I(\vartheta)$ é finita e positiva para todo $\vartheta \in \Theta_1$;
- (v) as terceiras derivadas da função log-verossimilhança são limitadas por uma função integrável de W cujo valor esperado é finito. Ou seja, existem uma função $M_{ijk}(w)$ independente de ϑ tais que, para $i, j, k = 1, \dots, p$,

$$\left| \frac{\partial^3 \ln f(w | \vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} \right| < M_{ijk}(w)$$

para todo $\vartheta \in \Theta_1$, onde $\mathbb{E}_{\vartheta_0} \{M_{ijk}(w)\} < \infty$

2.3.3 Intervalos assintóticos

De acordo com as condições de regularidade citadas na [subseção 2.3.2](#), e considerando as observações i.i.d., e se $\hat{\vartheta}$ é uma solução consistente da derivada de primeira ordem da equação do log de máxima verossimilhança $\frac{\partial \ell(\vartheta)}{\partial \vartheta} = 0$, então ocorre a seguinte convergência em distribuição ([CORDEIRO, 1999](#)):

$$\sqrt{n} (\hat{\vartheta} - \vartheta_0) \xrightarrow{D} N_p(\mathbf{0}, \mathcal{I}^{-1}(\vartheta_0)),$$

ou seja, em grandes amostras, a distribuição de $\hat{\vartheta}$ é aproximadamente normal p -dimensional com vetor média ϑ_0 e matriz de covariância (variância/covariância) $I^{-1}(\vartheta_0) = n^{-1} \mathcal{I}^{-1}(\vartheta_0)$, em que $I(\vartheta_0) = n \mathcal{I}(\vartheta_0)$ é matrix de informação de Fisher, e sendo que $\mathcal{I}(\vartheta_0)$ está definida na [subseção 2.3.1](#).

Quando o tamanho amostral é grande, a distribuição assintótica $N(\vartheta, I^{-1}(\vartheta))$ do estimador MV $\hat{\vartheta}$ do escalar ϑ possibilita construir um intervalo aproximado para este parâmetro, supondo que $(\hat{\vartheta} - \vartheta) I(\vartheta)^{-1/2}$ tem distribuição $N(0, 1)$, aproximadamente. Logo, $\hat{\vartheta} \pm z I(\hat{\vartheta})^{1/2}$ corresponde a um intervalo aproximado de $100(1 - \eta)\%$ de confiança para ϑ , em que z é tal que $\Phi(z) = 1 - \frac{\eta}{2}$, sendo $\Phi(\cdot)$ a FDA da Normal reduzida e η o nível de significância ([CORDEIRO, 1999](#)).

Se considerar o caso particular $q = 0$ para o PRGW (ou seja, PR que segue uma Weibull de dois parâmetros), estas condições são satisfeitas ([KOTZ; JOHNSON; READ, 1988](#), p. 551). Será mostrado neste trabalho que esta condição também é válido para $q \neq 0$ com algumas restrições.

3 Objetivos

3.1 Objetivo Geral

Propor um modelo matemático que possibilite testar a aderência do modelo PRGW a um conjunto de dados, bem como a construção de intervalos de confiança para os parâmetros do modelo PRGW e outros desdobramentos estatísticos.

3.2 Objetivos Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre a modelagem, por processos de contagem, de Sistemas Reparáveis e aprofundar a discussão mais especificamente nos modelos do PRG;
- Estudar alternativas que viabilizem a álgebra subjacente aos desdobramentos matemáticos do modelo PRGW;
- Propor um teste de aderência para verificar se o modelo PRGW se ajusta ao conjunto de dados;
- Construir uma fórmula fechada para os k -ésimos momentos (e os k -ésimos momentos centrais) do modelo PRGW;
- Verificar em que situação o modelo PRGW se aproxima de uma distribuição Normal, a partir dos coeficientes de assimetria e curtose e do terceiro momento central;
- Calcular os intervalos de confiança assintóticos para o PRGW e seus casos particulares.

4 Metodologia Proposta

Neste [Capítulo](#), é apresentado o desenvolvimento de resultados que ainda não foram abordados na literatura de Processos Renováveis. Estes resultados são indispensáveis para a evolução dos resultados do PRG seguindo uma distribuição Weibull, tais como:

- A possibilidade de uma transformação por lei de potência para o modelo PRGW;
- A proposta de um teste de aderência que verifica se a distribuição PRGW é ajustável ao conjunto de dados;
- Os k momentos, que tornaram possível comparar o modelo PRGW com a distribuição Normal, por exemplo;
- Os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do modelo PRGW com algumas restrições e seus desdobramentos.

4.1 Comportamento do PRGW após transformação por lei de potência

Na literatura encontram-se vários trabalhos que relacionam a distribuição Weibull padrão e a distribuição Exponencial por meio de um transformação por lei de potência, por exemplo, [Marshall e Olkin \(1967\)](#), [Sarkar \(1987\)](#), [Johnson, Kotz e Balakrishnan \(2000\)](#), [Murthy, Xie e Jiang \(2004\)](#). Mas, na literatura não foi encontrado nenhum trabalho que converta o PRGW a uma distribuição Exponencial.

4.1.1 A transformação por lei de potência simples

Várias distribuições foram derivadas a partir da distribuição em (2.3) tais como: distribuição Weibull Exponenciada, distribuição Weibull Modificada, distribuição Weibull Inversa, distribuições do Processo Pontual estocástico seguindo uma Weibull ([LAI; MURTHY; XIE, 2006](#)). Especificamente, uma destas distribuições advém da transformação por lei de potência, como segue:

$$W_i = X_i^{\beta_i}. \quad (4.1)$$

A FDA de W_i é dada por:

$$F_{W_i}(w_i) = P(W_i \leq w_i) = P(X_i^{\beta_i} \leq w_i) = P(X_i \leq w_i^{1/\beta_i}) \implies$$

$$F_{W_i}(w_i | \alpha_i^{\beta_i}) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{w_i}{\alpha_i^{\beta_i}}\right), & w_i \geq 0, \\ 0, & w_i < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $\alpha_i, \beta_i > 0$. Assim, a partir de (4.2) os W_i 's seguem uma distribuição Exponencial, ou seja, $W_i \sim \text{Exponencial}(\alpha_i^{\beta_i})$, implicando em $X_i^{\beta_i} \sim \text{Exponencial}(\alpha_i^{\beta_i})$ (ZHANG; MEEKER, 2005).

Da mesma maneira, pode-se obter uma distribuição Weibull multivariada a partir de uma distribuição Exponencial multivariada, isto é, se $W_i = X_i^{\beta_i} \sim \text{Exponencial}(\alpha_i^{\beta_i})$, então $X_i = W_i^{1/\beta_i} \sim \text{Weibull}(\alpha_i, \beta_i)$. Este resultado pode ser encontrado em Marshall e Olkin (1967), Johnson, Kotz e Balakrishnan (2000, p. 407), e para o caso univariado é encontrado em Johnson, Kotz e Balakrishnan (1994, Cap. 21).

4.1.2 Propondo uma transformação por lei de potência para o PRGW

Agora, seja W_i a variável obtida pela transformação por lei de potência generalizada do PRGW, que é definida por (OLIVEIRA; CRISTINO; FIRMINO, 2016):

$$W_i = (X_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta, \quad (4.3)$$

Pode ser observado que (2.5) e (4.3) são generalizações de (2.3) e (4.1), respectivamente. Ou seja, quando ocorre $\alpha_i = \alpha$ e $\beta_i = \beta$ de tal maneira que, em (2.3) e (4.1) tem $v_{i-1} = 0$, caracterizando assim o PR.

Por definição, se $X_i + v_{i-1}$ é uma variável aleatória contínua com FDP $f_{T_i}(x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta)$ e $W_i = \varphi(X_i + v_{i-1})$, em que $\varphi(\cdot)$ é uma função estritamente monótona e diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

Assim, a FDP para cada variável W_i é definida como:

$$f_{W_i}(w | v_{i-1}, \alpha, \beta) = f_{T_i}(x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta) \cdot \left| \frac{dx}{dw} \right| \quad (4.4)$$

com $x = \varphi^{-1}(w)$. Como $X_i + v_{i-1} = (W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, tem-se que $\frac{dx}{dw} = \frac{1}{\beta} (w + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1}$.

Por sua vez, $X_i \geq 0$ leva a $(W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \geq v_{i-1} \Rightarrow W_i \geq 0$. Então, a partir de (4.4):

$$\begin{aligned} f_{W_i}(w | v_{i-1}, \alpha, \beta) &= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \cdot (w + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}} \cdot \exp\left[-\frac{w}{\alpha^\beta}\right] \cdot \frac{1}{\beta} \cdot (w + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1} \\ &= \frac{1}{\alpha^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{w}{\alpha^\beta}\right] \end{aligned}$$

Considerando que $\theta = \alpha^\beta$, tem-se

$$f_{W_i}(w | \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot \exp\left[-\frac{w}{\theta}\right], & w \geq 0, \\ 0 & w < 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

com $\theta > 0$.

Assim como antes (subseção 4.1.1), $W_i \sim \text{Exponencial}(\theta = \alpha^\beta)$. Portanto, a novidade da transformação por lei de potência generalizada do PRGW (4.3) proposta aqui, denominada a seguir por PRGWT, leva o modelo PRGW à condição de uma distribuição Exponencial de variáveis independentes e identicamente distribuídas modeladas por (4.5) (isto é, um PHP: o mais simples dos processos pontuais alternativos). Tal conquista permite realizar, por exemplo, um simples teste de aderência para o PRGW(subseção 4.2.1). Este resultado se encontra no artigo de [Oliveira, Cristino e Firmino \(2016\)](#).

A partir deste resultado, será construído o seguinte teorema:

Teorema 1 (Transformação por lei de potência generalizada). *Seja n um inteiro positivo. Seja (W_1, W_2, \dots, W_n) um vetor aleatório tal que $W_i = (X_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta$, em que X_i condicionada a $(i-1)$ -ésima idade virtual, v_{i-1} , segue um PRGW(α, β, q). Então, pode-se afirmar que:*

- (a) *os W_i 's seguem um distribuição Exponencial de parâmetro $\theta = \alpha^\beta > 0$, isto é, $W_i \sim \text{Exponencial}(\theta)$. Sendo $\mathbb{E}(W_i) = \theta$ e $\text{Var}(W_i) = \theta^2$;*
- (b) *W_1, W_2, \dots, W_n são identicamente distribuídas e são mutuamente independentes;*

Prova:

(a) Apesar deste item já ter sido provado anteriormente, a seguir será proposta outra prova que fortalece ainda mais a ideia da subseção 4.1.2.

Sabe-se que (2.5) foi desenvolvida a partir de um modelo de reparação imperfeita usando o princípio do processo de idade virtual para sistemas reparáveis [(KIJIMA; SUMITA, 1986) e (KIJIMA, 1989)]. Então, se um sistema tem a idade virtual v_{i-1} imediatamente após a $(i-1)$ -ésima intervenção, então o i -ésimo tempo entre as intervenções X_i condicionado à idade virtual anterior no ponto $(x_i + v_{i-1})$ tem a seguinte função de distribuição condicional:

$$P(X_i + v_{i-1} \leq x + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta) = \frac{F_{T_1}(x + v_{i-1}) - F_{T_1}(v_{i-1})}{1 - F_{T_1}(v_{i-1})}, \quad (4.6)$$

sendo que X_i segue uma distribuição Weibull(α, β). Fazendo $W_i = (X_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta$ em (2.5), implica em substituir $X_i + v_{i-1} = (W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ em (4.6), então:

$$\begin{aligned} P(W_i \leq w | v_{i-1}, \theta) &= P\left(X_i + v_{i-1} \leq (w + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \mid v_{i-1}, \alpha, \beta\right) \\ &= \frac{F_{T_1}\left((w + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right) - F_{T_1}(v_{i-1})}{1 - F_{T_1}(v_{i-1})} \\ &= \frac{1 - \exp\left[-\frac{(w + v_{i-1}^\beta)}{\alpha^\beta}\right] - 1 + \exp\left[-\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right]}{1 - 1 + \exp\left[-\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right]} \end{aligned}$$

Assim,

$$F_{W_i}(w | v_{i-1}, \theta) = 1 - \exp\left[-\frac{w}{\theta}\right], \quad \text{para } \theta = \alpha^\beta > 0. \quad (4.7)$$

Facilmente pode ser verificado que a Eq. (4.7) não depende de v_{i-1} e pode ser escrita simplesmente como $F_{W_i}(w | \theta)$, caracterizando assim a falta de memória da distribuição.

A FDP pode ser obtida pela diferenciação em (4.7). Ou seja,

$$\begin{aligned} f_{W_i}(w | \theta) &= \frac{d}{dw} F_{W_i}(w | \theta) \\ &= \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{w}{\theta}\right\}, \quad w \geq 0 \end{aligned}$$

A partir deste resultado, pode-se afirmar que

$$\mathbb{E}(W_i) = \alpha^\beta = \theta \quad \text{e} \quad \text{Var}(W_i) = \alpha^{2\beta} = \theta^2$$

(b) A função de verossimilhança é dada pela Eq. (2.9):

$$f(\mathbf{x} | \alpha, \beta, q) = \prod_{i=1}^n f_{T_i}(x_i + v_{i-1} | v_{i-1}, \alpha, \beta) \quad (4.8)$$

Agora, para mostrar que as variáveis W_1, W_2, \dots, W_n são independentes entre si, precisa-se provar que (4.8) implica em

$$f(\mathbf{w} | \theta) = \prod_{i=1}^n f_{W_i}(w_i | \theta) \quad (4.9)$$

Pelo **item (a)**, o lado direito de (4.8) implica no lado direito de (4.9). Agora, será provado que o lado esquerdo de (4.8) implica no lado esquerdo de (4.9).

Fazendo uma mudança de variável em (2.9), isto é, $W_i = (X_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta$ e depois resolvendo $(X_i + v_{i-1})$'s em termos de W_i 's, obtém-se $X_i + v_{i-1} = (W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$. A FDP conjunta dos W_1, W_2, \dots, W_n , assim como em (4.4), é dada por:

$$f_{W_i}(w_1, \dots, w_n | v_{i-1}, \alpha, \beta) = f\left((w_1 + v_0^\beta)^{\frac{1}{\beta}}, \dots, (w_n + v_{n-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} | \alpha, \beta, q\right) |J|, \quad (4.10)$$

em que J , chamado Jacobiano, é igual ao determinante da matriz diagonal $n \times n$ dada por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{(w_1 + v_0^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(w_2 + v_1^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(w_n + v_{n-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \frac{(w_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta}$$

Assim, de acordo com (4.10), tem-se que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n f_{W_i}(w_i | \alpha, \beta) &= \frac{\beta^n}{\alpha^{n\beta}} \left[\prod_{i=1}^n (w_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] \exp\left\{-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n w_i\right\} \left| \prod_{i=1}^n \frac{(w_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta} \right| \\ &= \frac{1}{\alpha^{n\beta}} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n w_i\right\} \\ &= \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n w_i\right\} \end{aligned}$$

Portanto, os W_1, W_2, \dots, W_n são independentes e identicamente distribuídas. □

4.2 Algumas contribuições da transformação por lei de potência

Nesta subseção, serão apresentadas algumas contribuições deste trabalho para teoria em questão. Tais contribuições foram possíveis graças ao Teorema 1, como: teste de aderência, os k momentos centrais e os intervalos de confiança assintóticos para o PRGW.

4.2.1 A proposta do teste de aderência para o PRGW

A proposta do teste de aderência para o PRGW envolve as hipóteses a seguir, que são baseadas no conjunto de dados de desempenho $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$:

H_0 : A amostra \mathbf{x} vem de um PRGW;

H_1 : A amostra \mathbf{x} não vem de um PRGW.

A partir da ideia da transformação por lei de potência generalizada proposta em (4.3), o modelo PRGWT é obtido e uma abordagem do teste de aderência para o PRGW pode ser facilmente projetada. No [Algoritmo 1](#) apresenta-se uma visão geral do teste proposto. De acordo com o conjunto de dados de desempenho \mathbf{x} , a função `bestWgrpParametersEstimates`, na linha 2, pode envolver por exemplo, o método de estimação de máxima verossimilhança, para definir o conjunto de parâmetros (α, β, q) . Autores como [Ferreira, Firmino e Cristino \(2015\)](#) recorrem a métodos de otimização probabilísticos para estimar estes parâmetros. Em seguida, na linha 9, pode-se fazer o uso de testes de aderência adequados para a distribuição Exponencial na função `ExponentialPValue`. Por exemplo, o teste pode ser baseado nos testes de Bartlett e de Kolmogorov-Smirnov ([MASSEY, 1951](#)).

Em resumo, argumenta-se que a amostra \mathbf{x} possivelmente viria de um PRGW se sua respectiva transformada do PRGW (\mathbf{w}) vem de uma distribuição Exponencial; caso contrário \mathbf{x} viria de outro processo estocástico. Obviamente, este teste de aderência para a distribuição Exponencial poderia ser substituído por um teste de aderência para o PHP. Na presente tese, os testes estatísticos: Kolmogorov-Smirnov (K-S), Bartlett (B), Cramér-von Mises (C-M), e Anderson-Darling (A-D) são adequados para o teste proposto:

1. Estatística de teste K-S ([EVANS; DREW; LEEMIS, 2008](#))

$$\mathbb{D}^+ = \max_{1 \leq i \leq n} [z_i - \hat{z}_i] \quad \text{and} \quad \mathbb{D}^- = \max_{1 \leq i \leq n} [\hat{z}_{i-1} - z_i] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \max(\mathbb{D}^+, \mathbb{D}^-)$$

em que $z_i = 1 - \exp\left(-\frac{w_i}{\bar{w}}\right)$, $\hat{z}_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ é a frequência relativa acumulada empírica de w_i ($i = 1, 2, \dots, n$), e $\bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{n}$.

2. Estatística de teste B ([YAGOUTI et al., 2001](#))

$$I = \frac{2n \left(\log(\bar{w}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(w_i) \right)}{1 + \frac{n+1}{6n}}$$

3. Estatística de teste C-M ([CSORGO; FARAWAY, 1996](#))

$$C^2 = \sum_{i=1}^n \left(z_{(i)} - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n}$$

em que o conjunto $(z_{(1)}, \dots, z_{(n)})$ é o conjunto (z_1, \dots, z_n) colocado em ordem crescente.

Algoritmo 1: Uma perspectiva geral da proposta do teste de aderência para o PRGW.

Entrada: – Amostra de tempos realizados entre as intervenções (\mathbf{x}), de tamanho n
 – O tipo de Kijima para cada intervenção ($c_{y_i} \in \{0, 1\}$)
 – O nível de significância do teste de aderência para o PRGW (η)
Saída : – O resultado do teste de aderência para o PRGW

```

1 WgrpGoft( $\mathbf{x}$ ):
  /* O melhor modelo PRGW ajustado para ( $\mathbf{x}$ ) baseado em determinado
  Método de Estimação é tomado */
2 ( $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q}$ ) ← bestWgrpParametersEstimates( $\mathbf{x}$ )
  /* O vetor de transformação por potência do PRGW
   $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_n)$  é tomado */
3  $v_0 = 0$ 
4 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
5    $v_i = c_{y_i}(v_{i-1} + \hat{q}x_i) + (1 - c_{y_i})\hat{q}(v_{i-1} + x_i)$  // Veja o modelo Kijima em
   (2.8)
6    $w_i = (x_i + v_{i-1})^{\hat{\beta}} - v_{i-1}^{\hat{\beta}}$  // Veja a proposta de transformação por
   potência da PRGW em (4.3)
7 end
  /* O p-valor,  $p^*$ , do teste de aderência de  $\mathbf{w}$  para a distribuição
  Exponencial é tomado */
8  $\hat{\theta} = \hat{\alpha}^{\hat{\beta}}$ 
9  $p^* \leftarrow$  ExponentialPValue( $\mathbf{w}, \hat{\theta}$ ) // O nível de significância de  $\mathbf{w}$  para
  a distribuição Exponencial com média  $\hat{\theta}$ 
10 if  $p^* \geq \eta$  then
11   Existem evidências de que  $\mathbf{x}$  vem de uma PRGW com parâmetros
   ( $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q}, \hat{c}_{s_1}, \dots, \hat{c}_{s_k}$ )
12 else
13   Existem evidências de que  $\mathbf{x}$  não vem de uma PRGW com parâmetros
   ( $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q}, \hat{c}_{s_1}, \dots, \hat{c}_{s_k}$ )
14 end

```

4. Estatística de teste A-D (ANDERSON; DARLING, 1954)

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (2i-1) [\ln(z_{(i)}) + \ln(1 - z_{(n+1-i)})] \right\}$$

Considere D a representação genérica de qualquer uma das estatísticas citadas acima e d um certo valor de D . O teste de hipótese é, portanto, baseado em $p^* = P(D \geq d | H_0)$, que é a probabilidade de observar uma estatística tão ou mais extrema do que d , partindo-se do pressuposto que a hipótese H_0 é verdadeira. A probabilidade p^* é também denominada de *p-valor*. Assim, quanto menor o *p-valor*, menor será a probabilidade de que \mathbf{x} venha

de um PRGW. Desta forma, a hipótese H_0 será rejeitada ao nível de significância de $(\eta = \eta_0)$ se $p^* < \eta_0$ (vejam as linhas 10 - 14 do [Algoritmo 1](#)).

Em [Murthy, Xie e Jiang \(2004, p. 89\)](#), usa-se um teste de aderência semelhante a proposta apresentada neste trabalho. Ou seja, utiliza-se uma mudança de variável usando uma transformação por lei de potência simples (de acordo com a [subseção 4.1.1](#)), em seguida realiza um dos testes citados anteriormente para verificar se os dados transformados se ajustam ou não a uma distribuição Weibull ([2.3](#)).

Alguns autores discutem as limitações dos testes de aderência, como por exemplo: [Law e Kelton \(2000, p. 356\)](#) e [Kuhl et al. \(2008\)](#). Quando o tamanho da amostra é pequeno, os testes possuem baixa capacidade de detecção da falta de aderência entre os dados e as distribuições teóricas. Acabando por não rejeitar qualquer alternativa de distribuição. Por outro lado, quando o tamanho da amostra é muito grande, uma discrepância insignificante dos dados em relação às distribuições teóricas faz com que os testes rejeitem todas as alternativas de distribuições. Por isso, o teste de aderência que está sendo proposto será analisado na [seção 5.1](#) para vários tamanhos amostrais.

4.2.2 Momentos do modelo PRGW

O conhecimento dos momentos de uma distribuição, quando todos eles existem, é em geral equivalente ao conhecimento da distribuição, no sentido de que é possível expressar todas as propriedades da distribuição em termos dos momentos ([CRAMÉR, 1946](#); [CORDEIRO, 1999](#)). Pensando nisso, tem-se a necessidade de encontrar os momentos de ordem k (os momentos centrais de ordem k) do PRGW. Então, com auxílio do [Teorema 1](#) foi obtido o seguinte resultado:

Teorema 2. *Para todo número inteiro k , o k -ésimo momento de $X + v$, μ'_k é*

$$\mu'_k = E[(X + v)^k | \alpha, \beta, v] = \alpha^k \cdot \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \quad (4.11)$$

O k -ésimo momento central de $X + v$, μ_k é

$$\begin{aligned} \mu_k &= E\left([(X + v) - \mu]^k | \alpha, \beta, v\right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} \cdot \mu'_{k-j} \cdot [-\mu]^j \\ &= \binom{k}{k} \cdot \mu'_k - \binom{k}{k-1} \cdot \mu'_{k-1} \cdot \mu + \binom{k}{k-2} \cdot \mu'_{k-2} \cdot \mu^2 - \dots (-1)^k \mu^k \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que $\mu = \mu'_1 = \mathbb{E}[(X + v) | \alpha, \beta, v]$.

Prova: Primeiro será demonstrada a Eq. (4.11).

Sabendo que $W = (X + v)^\beta - v^\beta$, implica em $X + v = (W + v^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$. Então, de acordo com o item (a) do Teorema 1 e considerando $k = 1, 2, \dots$, o k -ésimo momento da variável $X + v$, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X + v)^k | \alpha, \beta, v] &= \mathbb{E}[(W + v^\beta)^{\frac{k}{\beta}}] = \int_0^\infty (w + v^\beta)^{\frac{k}{\beta}} \cdot \frac{1}{\alpha^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{w}{\alpha^\beta}\right) dw \\ &= \int_0^\infty \frac{(w + v^\beta)^{\frac{k}{\beta}}}{(\alpha^\beta)^{\frac{k}{\beta}}} \cdot \frac{(\alpha^\beta)^{\frac{k}{\beta}}}{\alpha^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{w}{\alpha^\beta}\right) dw\end{aligned}$$

Agora, fazendo $t = \frac{w + v^\beta}{\alpha^\beta}$ tem-se que $-\frac{w}{\alpha^\beta} = -t + \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}$ o que implica em $dw = \alpha^\beta dt$. Quando $w \downarrow 0$ tem-se que $t \downarrow \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}$ e $w \uparrow \infty$ implica que $t \uparrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X + v)^k | \alpha, \beta, v] &= \int_{\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}}^\infty t^{\frac{k}{\beta}} \cdot \frac{\alpha^k}{\alpha^\beta} \cdot \exp\left(-t + \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \alpha^\beta dt \\ &= \alpha^k \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \cdot \int_{\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}}^\infty t^{\frac{k}{\beta}+1-1} \cdot \exp(-t) dt\end{aligned}$$

Sabendo que a função Gama Incompleta é definida por (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964):

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} \cdot e^{-t} dt \quad \text{para } a > 0 \text{ e } z > 0.$$

Por exemplo, no software livre R Core Team (2015), a Gama Incompleta é calculada usando a função `Igamma()` do pacote `zipfR` (EVERT; BARONI, 2007).

Portanto, a forma fechada para o k -ésimo momento do PRGW é dado por:

$$\mathbb{E}[(X + v)^k | \alpha, \beta, v] = \alpha^k \cdot \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right)$$

A demonstração da Eq. (4.12) é feita aplicando diretamente o Teorema Binomial, ou seja, desenvolvendo-se o binômio em $[(X + v) - \mu]^k$ e depois aplica o valor esperado. Neste momento utiliza o resultado obtido em (4.11). \square

Facilmente, observa-se que para $q = 0$, ou seja, para o PR, tem-se o momento da distribuição $Weibul(\alpha, \beta)$.

A partir do Teorema 2 foram obtidos os seguintes resultados:

1 - Média do PRGW

$$\mu = \mathbb{E}[(X + v) | \alpha, \beta, v] = \alpha \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right)$$

Esse resultado é equivalente ao resultado do artigo de Ferreira, Firmino e Cristino (2015). Esses autores encontraram uma forma fechada apenas para o primeiro momento.

2 - Variância da PRGW

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[(X + v) | \alpha, \beta, v] &= \mu_2 = \mu'_2 - [\mu'_1]^2 \\
 &= \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) - 2\alpha\mu \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) + \mu^2 \\
 &= \alpha^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right)^2 \cdot \exp\left(\frac{2v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \right]
 \end{aligned}$$

3 - Coeficiente de variação

$$\xi_2 = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\mu}$$

4 - Coeficiente de assimetria (ξ_3)

$$\xi_3 = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3}$$

5 - Coeficiente de curtose (ξ_4)

$$\xi_4 = \frac{\mu_4}{(\sqrt{\mu_2})^4}$$

em que μ_2 , μ_3 e μ_4 são calculados pela Eq. (4.12).

4.2.3 Intervalos de confiança assintóticos para o modelo PRGW

Nesta subseção será verificado que não existe perda de informação quando ocorre a mudança das variáveis $(X_i + v_{i-1})$'s para as variáveis W_i 's na Eq. (2.10). A partir deste resultado é possível calcular as matrizes de informação de Fisher e de covariância (2.16), e consequentemente os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do PRGW e seus desdobramentos. Lembrado que os W_i 's são i.i.d. de acordo com o Teorema 1.

4.2.3.1 Estimador de máxima verossimilhança de α , β e q

Sem perda de informação para o PRGW, será feita uma substituição da (4.3) em (2.10). Ou seja, fazendo $X_i + v_{i-1} = (W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, em que $W_i = (X_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta$ na função de log-verossimilhança em (2.10), obtém-se uma nova representação para a função de log-verossimilhança para o PRGW:

$$\ell_1 = n [\ln(\beta) - \beta \ln(\alpha)] + \frac{(\beta - 1)}{\beta} \sum_{i=1}^n \ln(w_i + v_{i-1}^\beta) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n w_i \quad (4.13)$$

Pode-se observar que ℓ e ℓ_1 são equivalentes, pois geram as mesmas estimativas para os parâmetros (α, β, q) . Veja a seguir:

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \alpha} = -\frac{n\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}^{\hat{\beta}+1}} \sum_{i=1}^n \hat{w}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\alpha}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{w}_i \quad \Rightarrow \quad \hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{w}_i \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_1}{\partial \beta} &= n \left(\frac{1}{\beta} - \ln(\alpha) \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \ln(w_i + v_{i-1}^\beta) + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (v_{i-1}^\beta \ln(v_{i-1})) \\ &\quad - \frac{1}{\beta \alpha^\beta} \sum_{i=1}^n ((w_i + v_{i-1}^\beta) \ln(w_i + v_{i-1}^\beta)) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha}^{\hat{\beta}} \left(n + \sum_{i=1}^n \ln(\hat{w}_i + \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}}) \right) - \sum_{i=1}^n \left((\hat{w}_i + \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}}) \ln(\hat{w}_i + \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}}) \right) + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n \left(\hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}} \ln(\hat{v}_{i-1}) \right) = 0 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_1}{\partial q} &= (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{v'_{i-1}}{(w_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} \right) - \frac{\beta}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left(v'_{i-1} (w_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}} \right) + \frac{\beta}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n \left(v'_{i-1} v_{i-1}^{\beta-1} \right) \\ \Rightarrow \quad \hat{\alpha}^{\hat{\beta}} \left(1 - \frac{1}{\hat{\beta}} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{v}'_{i-1}}{(\hat{w}_i + \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}})^{\frac{1}{\hat{\beta}}}} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\hat{v}'_{i-1} (\hat{w}_i + \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}})^{1-\frac{1}{\hat{\beta}}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\hat{v}'_{i-1} \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}-1} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sabe-se que $\hat{w}_i = (x_i + \hat{v}_{i-1})^{\hat{\beta}} - \hat{v}_{i-1}^{\hat{\beta}}$ e as expressões \hat{v}_{i-1} e \hat{v}'_{i-1} são dadas por (2.14) e (2.15) respectivamente.

Além de observar que ℓ e ℓ_1 têm a mesma estimativa $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$, também foi feito o teste de derivada de segunda ordem para verificar se o ponto $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$ é de fato um máximo local para ℓ_1 (veja a Tabela 12 do Apêndice D).

De acordo com o teste de derivada de segunda ordem para máximo local realizado na Tabela 12, observa-se que todos os pontos acima são máximos locais para ℓ , também são máximos locais para ℓ_1 . Portanto, pode-se utilizar as Eq. (4.14), (4.15) e (4.16) para estimar o ponto (α, β, q) . Consequentemente, também utiliza-se ℓ_1 para encontrar os intervalos de confiança assintóticos para o PRGW.

A diferença entre as Eq. (2.11) e (4.14), assim como as Eq. (2.12) e (4.15), (2.13) e (4.16), está na precisão quando forem gerados os valores de W_i 's. Ou seja, quanto mais

precisos forem os valores de W_i 's, mais próximas as equações comparadas estão uma da outra. Assim, pode-se concluir que as equações depois da transformação tendem a ser mais precisas, e conseqüentemente serão mais precisas para estimar os parâmetros $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$. Não foi utilizado esse processo para estimar os parâmetros do PRGW, mas fica a indicação para trabalho futuro.

4.2.3.2 Matriz de informação de Fisher

A matriz de informação de Fisher para o PRGW, denotada por $I(\alpha, \beta, q)$, é definida como os valores esperados das derivadas parciais negativas de segunda ordem da função de log-verossimilhança em relação a cada parâmetro do PRGW, ou seja, de acordo com a [subseção 2.3.1](#). Então,

$$I(\alpha, \beta, q) = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha^2} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial \beta} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial q} \right) \\ \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta \partial \alpha} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta^2} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta \partial q} \right) \\ \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q \partial \alpha} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q \partial \beta} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q^2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A partir da matriz em (4.17), sabe-se que:

- os estimadores $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e \hat{q} são os pontos de máximo local das Eq. (4.14), (4.15) e (4.16), respectivamente de acordo com [subseção 4.2.3.1](#). Assim, os valores correspondentes à diagonal principal da matriz (4.17) são negativos;
- é simétrica em torno da diagonal principal, isto é, o elemento I_{12} (elemento da posição 1ª linha e 2ª coluna da matriz (4.17)) é igual ao elemento I_{21} , assim como os elementos I_{13} e I_{31} , I_{23} e I_{32} ;
- sua inversa $I^{-1}(\alpha, \beta, q)$ é igual a matriz de covariância (matriz de variância/covariância) que conseqüentemente é simétrica em torno da diagonal principal (diagonal das variâncias).

Os valores esperados das segundas derivadas parciais negativas da matriz (4.17) são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha^2} &= \frac{n\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^{\beta+2}} \sum_{i=1}^n w_i - \frac{\beta}{\alpha^{\beta+2}} \sum_{i=1}^n w_i \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha^2} \right] &= -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^{\beta+2}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right] + \frac{\beta}{\alpha^{\beta+2}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{n}{\alpha} - \frac{\beta \ln(\alpha)}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{1}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n w_i \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial \beta} \right] &= \frac{n}{\alpha} + \frac{\beta \ln(\alpha)}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right] - \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^n W_i \right] - \frac{1}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial q} &= \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^n w_i \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial q} \right] &= -\frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^n W_i \right] \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta \partial \alpha} \right] &= \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta^2} &= -\frac{n}{\beta^2} - \frac{\ln(\alpha)^2}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{2 \ln(\alpha)}{\alpha^\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^n w_i - \frac{1}{\alpha^\beta} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_{i=1}^n w_i \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta^2} \right] &= \frac{n}{\beta^2} + \frac{\ln(\alpha)^2}{\alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right] - \frac{2 \ln(\alpha)}{\alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^n W_i \right] + \frac{1}{\alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_{i=1}^n W_i \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta \partial q} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{v'_{i-1}}{(w_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} \right) + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^\beta} \frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^n w_i - \frac{1}{\alpha^\beta} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial q} \sum_{i=1}^n w_i \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta \partial q} \right] &= -\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{v'_{i-1}}{(W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} \right) \right] - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^n W_i \right] + \frac{1}{\alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial q} \sum_{i=1}^n W_i \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q \partial \alpha} \right] = \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial q} \right]$$

$$\mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q \partial \beta} \right] = \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta \partial q} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q^2} &= (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{v''_{i-1} (w_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} - [v'_{i-1}]^2}{(w_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{2}{\beta}}} \right) - \frac{1}{\alpha^\beta} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{i=1}^n w_i \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q^2} \right] &= (1 - \beta) \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{v''_{i-1}}{(W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{[v'_{i-1}]^2}{(W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{2}{\beta}}} \right] \right\} + \frac{1}{\alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{i=1}^n W_i \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nos somatórios acima, o v_0 assumirá valores que tende a zero.

Os valores esperados das derivadas parciais de segunda ordem que estão no lado direito das Eq. (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) e (4.23) são calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^n W_i \right] &= \frac{1}{\beta} \mathbb{E} [W_1 \log(W_1)] + \frac{1}{\beta} \sum_{i=2}^n \mathbb{E} [(W_i + v_{i-1}^\beta) \log(W_i + v_{i-1}^\beta)] \\ &\quad - \underbrace{\sum_{i=1}^n (v_{i-1}^\beta \log(v_{i-1}))}_{A_1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_{i=1}^n W_i \right] &= \frac{1}{\beta^2} \mathbb{E} [W_1 \log(W_1)^2] + \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=2}^n \mathbb{E} [(W_i + v_{i-1}^\beta) \log(W_i + v_{i-1}^\beta)^2] \\ &\quad - \underbrace{\sum_{i=1}^n (v_{i-1}^\beta \log(v_{i-1})^2)}_{A_2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^n W_i \right] = \beta \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[v'_{i-1} (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] - \beta \underbrace{\sum_{i=1}^n (v'_{i-1} v_{i-1}^{\beta-1})}_{A_3} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial q} \sum_{i=1}^n W_i \right] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[v'_{i-1} (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}} \ln(W_i + v_{i-1}^\beta) \right] - \underbrace{\sum_{i=1}^n (v'_{i-1} v_{i-1}^{\beta-1})}_{A_3} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[v'_{i-1} (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] - \beta \underbrace{\sum_{i=1}^n (v'_{i-1} v_{i-1}^{\beta-1} \ln(v_{i-1}))}_{A_4} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{i=1}^n W_i \right] &= \beta(\beta-1) \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[[v'_{i-1}]^2 (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{2}{\beta}} \right] - \underbrace{\beta \sum_{i=1}^n (v''_{i-1} v_{i-1}^{\beta-1})}_{A_5} \\
&\quad + \beta \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[v''_{i-1} (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] - \underbrace{\beta(\beta-1) \sum_{i=1}^n ([v'_{i-1}]^2 v_{i-1}^{\beta-2})}_{A_6} \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Os valores esperados para cada termo dos somatórios que estão no lado direito das Eq. (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) e (4.28) são calculados da seguinte maneira:

$$\mathbb{E} [W_1 \log(W_1)] = \alpha^\beta (\beta \log(\alpha) + 1 - \gamma) \quad (4.29)$$

$$\mathbb{E} [W_1 \log(W_1)^2] = \alpha^\beta \left(\beta^2 \log(\alpha)^2 - 2\beta\gamma \log(\alpha) + 2\beta \log(\alpha) + \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 - 2\gamma \right) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(W_i + v_{i-1}^\beta) \log(W_i + v_{i-1}^\beta)] &= \alpha^\beta \Gamma \left(0, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) + \beta \alpha^\beta \log(v_{i-1}) \\
&\quad + \beta v_{i-1}^\beta \log(v_{i-1}) + \alpha^\beta \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E} [v'_{i-1} (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}}] = \alpha^{\beta-1} v'_{i-1} \Gamma \left(2 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right), \text{ para } \beta > \frac{1}{2} \quad (4.32)$$

$$\mathbb{E} [v''_{i-1} (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{1}{\beta}}] = \alpha^{\beta-1} v''_{i-1} \Gamma \left(2 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \text{ para } \beta > \frac{1}{2} \quad (4.33)$$

$$\mathbb{E} [[v'_{i-1}]^2 (W_i + v_{i-1}^\beta)^{1-\frac{2}{\beta}}] = \alpha^{\beta-2} [v'_{i-1}]^2 \Gamma \left(2 - \frac{2}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \text{ para } \beta > 1 \quad (4.34)$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{v'_{i-1}}{(W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} \right] = \frac{1}{\alpha} v'_{i-1} \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \text{ para } \beta > 1 \quad (4.35)$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{v''_{i-1}}{(W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} \right] = \frac{1}{\alpha} v''_{i-1} \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \text{ para } \beta > 1 \quad (4.36)$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{[v'_{i-1}]^2}{(W_i + v_{i-1}^\beta)^{\frac{2}{\beta}}} \right] = \frac{1}{\alpha^2} [v'_{i-1}]^2 \Gamma \left(1 - \frac{2}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \text{ para } \beta > 2 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(W_i + v_{i-1}^\beta \right) \ln \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^2 \right] &= \left(v_{i-1}^\beta + \alpha^\beta \right) \ln(v_{i-1})^2 + 2\alpha^\beta \ln(v_{i-1}) + 2\alpha^\beta \left[1 + \ln(v_{i-1}) \right] \cdot \\
&\cdot \Gamma \left(0, \frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) + \alpha^\beta \exp \left(\frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \left[\left(\gamma + \ln \left(\frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \right)^2 \right. \\
&\left. + \frac{\pi^2}{6} - \frac{2v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} {}_3F_3 \left([2, 2, 2], [3, 3, 3], -\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \right] \quad (4.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[v'_{i-1} \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \ln \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right) \right] &= v'_{i-1} \left(v_{i-1}^{\beta-1} \ln(v_{i-1}) + \frac{\alpha^\beta}{\alpha} \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \right. \\
&+ \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \cdot \exp \left(\frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \left[\frac{\alpha^\beta}{\alpha} \cdot \ln(v_{i-1}) \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \right. \\
&+ \frac{\alpha^\beta \pi}{\alpha \Gamma(\beta-1)} \left(\Psi(\beta-1) - \pi \cot \left(\frac{\pi(\beta-1)}{\beta} \right) - \ln \left(\frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta} \right) \right) \cdot \\
&\cdot \csc \left(\frac{\pi(\beta-1)}{\beta} \right) + \frac{\beta^2 v_{i-1}^{\beta-1}}{(\beta-1)^2} \cdot {}_2F_2 \left(\left[1 - \frac{1}{\beta}, 1 - \frac{1}{\beta} \right], \right. \\
&\left. \left. \left[2 - \frac{1}{\beta}, 2 - \frac{1}{\beta} \right], -\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \right] \quad (4.39)
\end{aligned}$$

A constante de Euler γ foi introduzida pela primeira vez por Leonhard Euler (1707-1783) em 1734 como (SWEENEY, 1963):

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} - \log(k) \right) \\
&= 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992 \dots
\end{aligned}$$

A função Hipergeométrica Generalizada ${}_pF_q$ é dada por uma série hipergeométrica e definida por (OWA; SRIVASTAVA, 1987):

$${}_pF_q \left([a_1, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_q], z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n n!} \quad (4.40)$$

em que a_j ($j = 1, 2, \dots, p$) e b_j ($j = 1, 2, \dots, q$) são números complexos positivos, e $(\lambda)_n$ é o símbolo Pochhammer ou fatorial ascendente com:

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) \cdots (\lambda + k - 1) & \text{se } n \in (1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

A função Hipergeométrica Generalizada em (4.40) pode ser calculada por vários softwares: Maple, Mathematica, Matlab, R, etc. Por exemplo, no software livre R é calculada usando a função `genhypergeo_series()` do pacote `hypergeo` (HANKIN, 2015), isto é,

$${}_3F_3 \left([2, 2, 2], [3, 3, 3], -\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) = \text{genhypergeo_series} \left(U = c(2, 2, 2), L = c(3, 3, 3), z = -\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right)$$

$${}_2F_2 \left(\left[1 - \frac{1}{\beta}, 1 - \frac{1}{\beta} \right], \left[2 - \frac{1}{\beta}, 2 - \frac{1}{\beta} \right], -\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) = \text{genhypergeo_series} \left(U = c \left(1 - \frac{1}{\beta}, 1 - \frac{1}{\beta} \right), \right. \\ \left. L = c \left(2 - \frac{1}{\beta}, 2 - \frac{1}{\beta} \right), z = -\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right)$$

As expressões \hat{v}_{i-1} e \hat{v}'_{i-1} são dadas por (2.14) e (2.15), respectivamente e

$$v''_{i-1} = c_{y_{i-1}} v''_{i-2} + (1 - c_{y_{i-1}}) (2v'_{i-2} + qv''_{i-2})$$

em que v''_{i-1} é a derivada de segunda ordem de v_{i-1} em relação ao parâmetro q .

Os resultados obtidos nas Eq. (4.29), (4.30), (4.31), (4.32), (4.33), (4.34), (4.35), (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39) são demonstrados no Apêndice A.

Portanto, organizando os resultados obtidos nas equações acima se obtém a matriz de informação de Fisher (4.17) de forma fechada para todo valor de $\beta > 2$. Esta forma fechada será organizada da seguinte maneira:

- (1) os primeiros elementos dos somatórios A_1 e A_2 em (4.24) e (4.25), respectivamente, tendem a zero quando $v_0 \rightarrow 0$. Agora, os primeiros elementos dos somatórios A_3 , A_4 , A_5 e A_6 nas Eq. (4.26), (4.27) e (4.28) são iguais a zero quando $\beta > 2$;
- (2) as Eq. (4.29) e (4.30) serão representadas por E_1 e E_2 , respectivamente;
- (3) os somatórios dos n termos das Eq. (4.31), (4.32), (4.33), (4.34), (4.35), (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39), serão representadas por E_3 , E_4 , E_5 , E_6 , E_7 , E_8 , E_9 , E_{10} , E_{11} , respectivamente. Para totalizar os n termos nos somatórios E_3 e E_{10} foi acrescentado o valor zero, com isso a soma não altera o resultado;
- (4) agora, serão multiplicados e divididos por n nos somatórios A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 , E_7 , E_8 , E_9 , E_{10} e E_{11} .

Substituindo os resultados obtidos no item (4) em (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) e (4.28), obtém-se respectivamente:

$$D_\beta = \frac{n}{\beta} \underbrace{\left(\frac{E_1}{n} + \bar{E}_3 - \beta \bar{A}_1 \right)}_{D_\beta^*} = \frac{n}{\beta} \cdot D_\beta^*$$

$$D_{\beta\beta} = \frac{n}{\beta^2} \underbrace{\left(\frac{E_2}{n} + \bar{E}_{10} - \beta^2 \bar{A}_2 \right)}_{D_{\beta\beta}^*} = \frac{n}{\beta^2} \cdot D_{\beta\beta}^*$$

$$D_q = n\beta \underbrace{\left(\bar{E}_4 - \bar{A}_3 \right)}_{D_q^*} = n\beta \cdot D_q^*$$

$$D_{\beta q} = n \underbrace{\left(\bar{E}_{11} - \bar{A}_3 + \bar{E}_4 - \beta \bar{A}_4 \right)}_{D_{\beta q}^*} = n \cdot D_{\beta q}^*$$

$$D_{qq} = n \underbrace{\left[\beta(\beta - 1) \left(\bar{E}_6 - \bar{A}_6 \right) + \beta \left(\bar{E}_5 - \bar{A}_5 \right) \right]}_{D_{qq}^*} = n \cdot D_{qq}^*$$

em que a barra sobre os somatórios acima representam a média dos somatórios, por exemplo, \bar{A}_1 é a média obtida a partir de A_1 dividido por n .

Logo, os elementos da matriz (4.17) são representados por:

$$\mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha^2} \right) = n \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$\mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial \beta} \right) = \frac{n}{\alpha^{\beta+1}} \left[\beta \alpha^\beta \log(\alpha) - D_\beta^* \right]$$

$$\mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \alpha \partial q} \right) = -\frac{n\beta^2}{\alpha^{\beta+1}} \cdot D_q^*$$

$$\mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta^2} \right) = \frac{n}{\beta^2 \alpha^\beta} \left[\alpha^\beta + \alpha^\beta \beta^2 \log(\alpha)^2 - 2\beta \log(\alpha) D_\beta^* + D_{\beta\beta}^* \right]$$

$$\mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial \beta \partial q} \right) = \frac{n}{\alpha^\beta} \left[-\alpha^\beta \bar{E}_7 - \beta \log(\alpha) D_q^* + D_{\beta q}^* \right]$$

$$\mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial q^2} \right) = \frac{n}{\alpha^\beta} \left[(1 - \beta) \left(\bar{E}_8 - \bar{E}_9 \right) \alpha^\beta + D_{qq}^* \right]$$

Assim, tem-se que $I(\alpha, \beta, q) = n\mathcal{I}(\alpha, \beta, q)$ o que implica $I^{-1}(\alpha, \beta, q) = n^{-1}\mathcal{I}^{-1}(\alpha, \beta, q)$ de acordo com a [subseção 2.3.3](#).

A análise matemática para a forma fechada das matrizes em $I(\alpha, \beta, q)$ e $I^{-1}(\alpha, \beta, q)$ em relação aos tipos de Kijima e os valores do parâmetro q é feita a seguir.

No Kijima tipo I e o valor de q tendendo a zero, o comprimento dos intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros apresentam uma precisão dentro do esperado para Teoria Assintótica. Agora, quando o valor de $q \in (0, 1)$ e não é muito próximo de zero, ocorrem os seguintes fatos:

- (i) se n crescer ou q começar a se distanciar de zero, o valor da função $\exp\left(\frac{v_{i-1}}{\alpha^\beta}\right)$ (veja a [Figura 13](#) no [Apêndice C](#)) cresce rapidamente;
- (ii) este crescimento faz com que os elementos das posições I_{22} , I_{23} e I_{32} da matriz $I(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$ tendam a valores muito grandes em relação aos outros elementos;
- (iii) com isso, os elementos das posições I_{22}^{-1} e I_{33}^{-1} da matriz $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$ tendem a zero, e conseqüentemente, os comprimentos dos intervalos em relação a β e q tendam também a zero;
- (iv) por exemplo, este resultado com valores grandes leva o software livre ([R Core Team, 2015](#)) a informar que o sistema é computacionalmente singular

No Kijima tipo II e q próximo de 1, ocorrem os mesmos fatos que os itens (i) (veja [Figura 14](#) no [Apêndice C](#)), (ii), (iii) e (iv). Agora, para $q \in (0, 1)$ e não muito próximo de 1, o comprimento dos intervalos assintóticos para os parâmetros apresentam uma precisão dentro do esperado para Teoria Assintótica.

Agora, considerando as Eq. (4.31), (4.32), (4.33), (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) e (4.38) onde aparece o produto:

$$\Gamma\left(a, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right) \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right), \quad (4.41)$$

em que a são todos os primeiros elementos da Gama Incompleta que aparecem nas equações citadas acima. Observa-se que a medida que o primeiro elemento decresce (cresce), o segundo cresce (decrece) em proporção semelhante para qualquer tipo de Kijima. Com isso, o produto tende a valores pequenos e conseqüentemente as equações que dependem dele também (veja as [Figuras 15](#) e [16](#) no [Apêndice C](#)). Esta afirmação é válida para qualquer valor de a presente nas funções Gama Incompleta acima.

Daí, pode-se observar que os intervalos de confiança assintóticos para o PRGW se adaptam apenas aos modelos PR e Kijima tipo II.

4.2.3.3 Intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do PRGW

Segundo a Teoria Assintótica, para n suficientemente grande é possível estimar os intervalos de confiança para os parâmetros do PRGW considerando a aproximação Normal multivariada assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Assim, os estimadores de máxima verossimilhança $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$ de (α, β, q) tem distribuição Normal multivariada assintótica com média (α, β, q) e matriz de covariância $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$ que é a inversa da matriz de informação de Fisher (veja a [seção 2.3](#)). Ou seja,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q}) \sim N [(\alpha, \beta, q), I^{-1}(\alpha, \beta, q)]$$

A partir daí, os intervalos de confiança com nível de $100 \cdot (1 - \eta)\%$ para o parâmetros são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\pm z_{\eta/2} \sqrt{I_{11}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})} \\ \hat{\beta} &\pm z_{\eta/2} \sqrt{I_{22}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})} \\ \hat{q} &\pm z_{\eta/2} \sqrt{I_{33}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})} \end{aligned} \quad (4.42)$$

em que $z_{\eta/2}$ é o quantil da ordem $1 - \frac{\eta}{2}$ da distribuição Normal padrão.

De acordo com o resultado obtido na [subseção 4.2.3.2](#), a matriz de covariância tem forma fechada apenas para $\beta > 2$. Além disso, os intervalos assintóticos se adaptam apenas para o Kijima tipo II não muito próximo de 1, Kijima tipo I próximo de zero e o PR.

Este resultado fica mais consistente quando se observam os coeficientes de assimetria e curtose e terceiro momento central nas [Figuras 4, 5, 6, 7 e 8](#) da [subseção 5.2.1](#). De acordo com estas figuras, quando $\beta > 2$, o Kijima tipo II com q não muito próximo de 1 e o Kijima tipo I com q próximo de zero, o modelo PRGW se aproxima de uma distribuição Normal.

4.2.3.4 Casos particulares do PRGW

Nesta subseção serão estudado os intervalos de confiança assintóticos para os casos particulares do PRGW, ou seja, os modelos PR e PNHP.

Processo de Renovação

Fazendo $q = 0$ na Eq. (4.13), obtém-se uma representação para a função de log-verossimilhança do PR:

$$\ell_2 = n [\log(\beta) - \beta \log(\alpha)] + \frac{(\beta - 1)}{\beta} \sum_{i=1}^n \log(w_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n w_i \quad (4.43)$$

em que $W_i = X_i^\beta$.

Daí, tem-se a matriz de informação de Fisher que é calculada da seguinte forma:

$$I(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_2}{\partial \alpha^2} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_2}{\partial \beta \partial \alpha} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_2}{\partial \beta^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n\beta^2}{\alpha^2} & \frac{n(\gamma-1)}{\alpha} \\ \frac{n(\gamma-1)}{\alpha} & \frac{n(\frac{1}{6}\pi^2 + (\gamma-1)^2)}{\beta^2} \end{bmatrix} = n\mathcal{I}(\alpha, \beta)$$

Assim, os estimadores de máxima verossimilhança $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ de (α, β) tem distribuição Normal multivariada assintótica com média (α, β) e matriz de covariância

$$I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\alpha}^2 [\pi^2 + 6(\gamma-1)^2]}{n\hat{\beta}^2 \pi^2} & -\frac{6\hat{\alpha}(\gamma-1)}{n\pi^2} \\ -\frac{6\hat{\alpha}(\gamma-1)}{n\pi^2} & \frac{6\hat{\beta}^2}{n\pi^2} \end{bmatrix} = n^{-1}\mathcal{I}^{-1}(\alpha, \beta)$$

em que os intervalos de confiança com nível de $100 \cdot (1 - \eta)\%$ para o parâmetros são dados por:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\eta/2} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi^2 + 6(\gamma-1)^2}{\pi^2}} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} \pm z_{\eta/2} \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{6}{\pi^2}}$$

em que $z_{\eta/2}$ é o quantil da ordem $1 - \frac{\eta}{2}$ da distribuição Normal padrão.

Processo Não-Homogêneo de Poisson

Fazendo $q = 1$ na Eq. (4.13), obtém-se uma representação para a função de log-verossimilhança do PNHP:

$$\ell_3(\alpha, \beta) = n [\ln(\beta) - \beta \ln(\alpha)] + \frac{(\beta-1)}{\beta} \sum_{i=1}^n \ln(w_i + v_{i-1}^\beta) - \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{i=1}^n w_i \quad (4.44)$$

em que $v_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} X_k$, $\sum_{i=1}^n W_i = \left[\sum_{i=1}^n X_i \right]^\beta$ e $\sum_{i=1}^n \ln(W_i + v_{i-1}^\beta) = \beta \sum_{i=1}^n \ln(X_i + v_{i-1})$.

Daí, tem-se a matriz de informação de Fisher que é calculada da seguinte forma:

$$I(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha^2} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \beta \partial \alpha} \right) & \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \beta^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n\beta^2}{\alpha^2} & -\frac{n\Psi(n+1)}{\alpha} \\ -\frac{n\Psi(n+1)}{\alpha} & \frac{n(\Psi(n+1)^2 + \Psi(1, n+1) + 1)}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

Assim, os estimadores de máxima verossimilhança $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ de (α, β) tem distribuição Normal multivariada assintótica com média (α, β) e matriz de covariância

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2 (\Psi(n+1)^2 + \Psi(1, n+1) + 1)}{n\beta^2 (\Psi(1, n+1) + 1)} & \frac{\alpha \Psi(n+1)}{n(\Psi(1, n+1) + 1)} \\ \frac{\alpha \Psi(n+1)}{n(\Psi(1, n+1) + 1)} & \frac{\beta^2}{n(\Psi(1, n+1) + 1)} \end{bmatrix} = n^{-1}\mathcal{I}^{-1}(\alpha, \beta)$$

Resultado semelhante a este é encontrado em [Gaudoin, Yang e Xie \(2006\)](#), usando processo de lei de potência.

Os intervalos de confiança com nível de $100 \cdot (1 - \eta)\%$ para os parâmetros é dado por:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\eta/2} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\Psi(n+1)^2 + \Psi(1, n+1) + 1}{\Psi(1, n+1) + 1}}$$

$$\hat{\beta} \pm z_{\eta/2} \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{\Psi(1, n+1) + 1}}$$

em que $z_{\eta/2}$ é o quantil da ordem $1 - \frac{\eta}{2}$ da distribuição Normal padrão.

A função Digama $\Psi(z)$ é definida como a derivada logarítmica de $\Gamma(z)$ e a função Poligama é definida como m-ésima derivada da função Digama, ou seja, $\frac{\partial^m}{\partial z^m} \Psi(z) = \Psi(m, z)$.

Sabe-se que as funções Gama, Gama Incompleta, Digama, Poligama, Logarítmica e Exponencial podem ser descritas por uma expansão assintótica precisa, ou seja, essas funções podem ser expressas por uma série matemática que garante a precisão adequada quando n cresce ([BLEISTEIN; HANDELSMAN, 1975](#)). Com isso, facilita através de programação o cálculo dos resultados obtidos anteriormente.

5 Resultados

Neste [Capítulo](#), serão avaliados alguns experimentos numéricos com o intuito de validar as ferramentas propostas no [Capítulo 4](#). Ou seja, através de simulações e de casos reais da literatura serão analisados os comportamentos:

- do teste de aderência para o modelo PRGW;
- dos coeficientes de assimetria e curtose, e terceiro momento para diferentes valores de β e q ;
- dos modelos PRGW em relação à distribuição Normal;
- dos intervalos de confiança assintóticos dos parâmetros do modelo PRGW para diferentes valores de β e q .

Previamente, os modelos PR, PNHP, Kijima tipo I, Kijima tipo II, e os modelos propostos foram ajustados para cada conjunto de dados através das estimativas de máxima verossimilhança, onde a função de log-verossimilhança para o PRGW (2.10) foi otimizada de acordo com as simulações iterativas usando o algoritmo fornecido pelo pacote `GenSA` do *software* livre ([R Core Team, 2015](#)) apresentado no artigo de [Xiang et al. \(2013\)](#).

5.1 Aplicando o teste de aderência para o PRGW

Considerando o modelo PRGWT em (4.3) ou do artigo de [Oliveira, Cristino e Firmino \(2016\)](#), esta seção apresenta a aplicação do [Algoritmo 1](#), customizando para os casos envolvendo o estimador de máxima verossimilhança ([FERREIRA; FIRMINO; CRISTINO, 2015](#)) para a função `bestWgrpParametersEstimates`. Além disso, os testes K-S, B, C-M e A-D foram considerados para a função `ExponentialPValue`. Casos simulados e casos reais da literatura foram levados em conta. Especificamente, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do PRGW foram baseados no pacote `GenSA`. Para calcular o teste K-S, foi usada a função `ks.test` do pacote básico `stats`. Por sua vez, a função `gofExp.test` do pacote `Renext` ([DEVILLE; IRSN, 2015](#)) foi adotada para o teste B, enquanto as funções `cvm.test` e `ad.test` do pacote `gofTest` ([FARAWAY et al., 2015](#)) foram assumidas para a realização dos testes C-M e A-D, respectivamente.

5.1.1 Casos simulados

Nesta subseção, a qualidade do teste de aderência para o modelo PRGW é estudada por meio de dois conjuntos de dados simulados. Em primeiro lugar, a taxa de erro do tipo I (a probabilidade de rejeitar H_0 , dado que é verdadeira) é inferida e, em seguida, a taxa de erro do tipo II (a probabilidade de não rejeitar H_0 , dado que é falsa) é levada em consideração.

As taxas do erro tipo I e erro II têm sido fundamentais no teste de hipóteses em geral e em particular para os testes de aderência. Como ilustração, o controle de qualidade estatístico envolve uma coleção de ferramentas, dedicadas à eliminação de desperdícios (MONTGOMERY; RUNGER, 2003), que geralmente são expostas a esses erros. De fato, essas ferramentas são geralmente baseados em dados amostrais, coletados com o objetivo de investigar se o sistema de produção está sob controle (H_0) ou está fora de controle (H_1). Neste cenário, os erros do tipo I (tipo II) representam os eventos de equivocadamente assumir que o sistema está fora de controle (sob controle), considerando os dados. De acordo com Montgomery e Runger (2003), é essencial que os engenheiros, os cientistas e os gestores tenham uma compreensão profunda destas ferramentas estatísticas. Por sua vez, as principais ferramentas estatísticas adotadas para práticas de controle de qualidade (tais como gráficos de controle e planejamento de experimentos) são baseadas na suposição de que as variáveis de interesse seguem alguma distribuição de probabilidades (por exemplo, normal, qui-quadrado, t-Student, F-Snedecor) que exige um teste de aderência para aplicação adequada. De qualquer forma, o melhor teste de hipótese é o que tem menor taxa de erro tipo I e erro tipo II.

5.1.1.1 Taxa de erro tipo I: teste de aderência para o PRGW quando realiza o PRGW

Aqui, será estudado o desempenho do teste de aderência proposto para o modelo PRGW em termos tanto da taxa de erro do tipo I, assim como a eficácia da (4.3) em transformar o PRGW (por mudança de variável) em uma distribuição Exponencial. Assim, as variáveis $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ e $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)$ que seguem PRGW e PRGWT, respectivamente, são instanciadas e, em seguida, testadas via Algoritmo 1. Em primeiro lugar, o conjunto de parâmetros do PRGW foi fixado. Ou seja, foram assumidos diferentes valores para β , refletindo sistemas em melhoria, estáveis e em deterioração (0,5; 1,0 e 3,0, respectivamente). Os parâmetro de escala e de rejuvenescimento foram fixados em $\alpha = 3,5$ e $q = 0,5$, respectivamente. Os dois tipos de intervenções foram levados em consideração ($c_{y_1} = 0,0$ e $c_{y_1} = 1,0$), ou seja, foram utilizados os modelos de idade virtual correspondentes ao Kijima tipo I e ao Kijima tipo II. Diferentes tamanhos amostrais foram considerados ($n = 20, 50, 100, 1000$). Para cada configuração fixada (β, n), foram simuladas

Tabela 4 – A distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com β e n para simulação com 100 iterações para cada amostra do modelo PRGWT, com respeito ao teste de aderência A-D para a distribuição Exponencial.

Kijima tipo I	$\beta = 0,5$				$\beta = 1,0$				$\beta = 3,0$			
$p^* \Rightarrow$ p-valor	Tamanho da amostra				Tamanho da amostra				Tamanho da amostra			
	20	50	100	1000	20	50	100	1000	20	50	100	1000
$p^* \leq 0,01$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0,01 < p^* \leq 0,03$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0,03 < p^* \leq 0,05$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p^* \leq 0,05$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Kijima tipo II	$\beta = 0,5$				$\beta = 1,0$				$\beta = 3,0$			
$p^* \Rightarrow$ p-valor	Tamanho da amostra				Tamanho da amostra				Tamanho da amostra			
	20	50	100	1000	20	50	100	1000	20	50	100	1000
$p^* \leq 0,01$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0,01 < p^* \leq 0,03$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0,03 < p^* \leq 0,05$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p^* \leq 0,05$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A próxima seção ilustra a aderência da distribuição Exponencial para o conjunto de dados do PRG que não é modelado pela distribuição Weibull, via [Algoritmo 1](#), fornecendo uma base para avaliar o teste de aderência para o PRGW em termos da taxa de erro de tipo II. Para este propósito será apresentado o PRG baseado numa distribuição Uniforme (PRGU).

5.1.1.2 Taxa de erro tipo II: teste de aderência para o PRGW quando realiza o PRGU

Seja X_i uma variável aleatória seguindo uma distribuição Uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, $a < b$. Considerando agora que o modelo PRG é modelado pela distribuição Uniforme, talvez não publicada até agora, pode ser calculado por [veja em (4.6)]:

$$\begin{aligned}
 F_{X_i}(x_i + v_{i-1} \mid v_{i-1}, a, b) &= \frac{F_{X_i}(x_i + v_{i-1}) - F_{X_i}(v_{i-1})}{1 - F_{X_i}(v_{i-1})} \\
 &= \frac{\frac{x_i + v_{i-1} - a}{b - a} - \frac{v_{i-1} - a}{b - a}}{1 - \frac{v_{i-1} - a}{b - a}} \\
 &= \begin{cases} 1, & x_i + v_{i-1} > b, \\ \frac{x_i}{b - v_{i-1}}, & a \leq x_i + v_{i-1} \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Assim, através do método da transformação inversa, têm-se as amostras do modelo PRGU (da mesma forma que (5.1) para os instantes do PRGW)

$$x_i = u_i(b - v_{i-1}); b > a \text{ and } v_{i-1} \in [a, b](v_0 = a) \quad (5.2)$$

onde u_i é um número aleatório no intervalo $[0,1]$.

Da mesma forma que a subseção anterior, as variáveis do PRGU e do PRGWT (aqui, calculadas pela aplicação (4.3) para gerar as amostras do PRGU usando (5.2)), são respectivamente $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ e $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)$. Estas são instanciadas e em seguida testadas pelo Algoritmo 1. Os parâmetros são fixados: $(a, b) = (0; 1)$ com q fixado em 0,5 ($q = 0, 5$) Apenas um tipo de intervenção foi levado em conta com $c_{s1} = 1, 0$. Novamente, diferentes tamanhos amostrais foram considerados ($n = 10, 50, 100, 500, 1000$). Para cada n , foram simulados 100 iterações para cada tamanho de amostra para o modelo PRGU (e, conseqüentemente, 100 iterações para o modelo PRGWT). Sendo que α , β e q foram estimados a partir das amostra gerada pelo modelo PRGU.

Tabela 5 – A distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com n e $q = 0, 5$ para o teste de aderência do modelo PRGW através do Algoritmo 1, envolvendo 100 iterações para cada tamanho de amostra para o modelo PRGU.

$p^* \Rightarrow p$ -valores	Teste K-S					Teste B				
	Tamanho amostral					Tamanho amostral				
	10	50	100	500	1000	10	50	100	500	1000
$p^* \leq 0,01$	0	22	49	100	99	5	23	49	83	95
$0,01 < p^* \leq 0,03$	2	0	1	0	1	5	2	3	2	1
$0,03 < p^* \leq 0,05$	3	2	1	0	0	1	1	1	2	0
$p^* \leq 0,05$	5	24	51	100	100	11	26	53	87	96
$p^* \Rightarrow p$ -valores	Teste C-M					Teste A-D				
	Tamanho amostral					Tamanho amostral				
	10	50	100	500	1000	10	50	100	500	1000
$p^* \leq 0,01$	0	21	47	56	48	2	23	48	100	100
$0,01 < p^* \leq 0,03$	3	2	2	44	52	5	0	2	0	0
$0,03 < p^* \leq 0,05$	1	0	1	0	0	2	0	0	0	0
$p^* \leq 0,05$	4	23	50	100	100	9	23	50	100	100

A discrepância entre PGRU (PRGWT) e as variáveis exponenciais é evidenciada na [Tabela 5](#). Essa tabela apresenta uma distribuição de frequências dos p -valores (p^*) de acordo com n para os modelos PRGU e PRGWT, com respeito aos testes de aderência: K-S, B, C-M e A-D para a distribuição Exponencial. Pode-se ver que, quanto maior o tamanho da amostra, menor é o número de aderência da distribuição Exponencial para o conjunto de dados de PRGWT (quando PRGU são considerados).

Aqui, fornecem-se evidências de que, em termos da taxa de erro tipo II, o [Algoritmo 1](#) (baseando-se em (4.3)) é tão eficaz quanto o teste assumido para a distribuição Exponencial (por exemplo K-S e B).

Deve ser enfatizado que os testes K-S, B, C-M, e A-D possuem as desvantagens dos testes de aderência alternativos em geral, de conduzir o decisor a não rejeitar a distribuição proposta para pequenas amostras ([LAW; KELTON, 2000](#); [KUHL et al., 2008](#); [RAZALI; WAH, 2011](#)).

5.1.2 Casos reais

Nesta subseção serão apresentados alguns resultados que envolvem os ajustes dos modelos do PRGW para três casos reais encontrados na literatura. Para isso, será usado o teste de aderência proposto anteriormente para o PRGW. Os modelos PR, PNHP, Kijima tipo I, e Kijima tipo II foram ajustados para cada conjunto de dados, via máxima verossimilhança, onde a função log-verossimilhança foi otimizada de acordo com o algoritmo construído a partir do pacote [GenSA](#) do software livre ([R Core Team, 2015](#)). Os conjuntos de dados encontrados na literatura são descritos da seguinte forma:

- (a) O primeiro conjunto envolve 84 tempos de paradas para manutenção de um sistema de compressão instalação em alto mar ([LANGSETH; LINDQVIST, 2006](#)).
- (b) O segundo conjunto de dados envolve 80 tempos de parada para ações de intervenção em um sistema de pára-brisas de aeronaves ([MURTHY; XIE; JIANG, 2004](#)).
- (c) O terceiro conjunto de dados envolve os tempos entre manutenções de 61 transformadores do sistema CHESF (Companhia Hidro Elétrica do São Francisco) ([CRISTINO, 2008](#)).

Estes conjuntos de dados refletem situações em que a falha poderia levar a perdas financeiras, sociais e ambientais. Por exemplo, o sistema de compressão apresentado em (a) é responsável pela industrialização de óleo & gás (exploração & produção). Falhas tais como vazamento ([OREDA, 2002](#)) poderiam resultar em desperdício, explosão e poluição ambiental. Em relação ao sistema de manutenção de pára-brisas de aeronaves apresentado

em (b), podem ocorrer danos potenciais decorrentes de colisões entre aves e aeronaves que aumentaram significativamente, por causa da alta velocidade na decolagem e voos de baixa altitude (WEST, 1984). Estes danos poderiam provocar: missão abortada da aeronave, perda da aeronave, de vidas e de recursos financeiros. Da mesma forma, as falhas dos transformadores poderiam danificar diretamente linhas de transmissão e geração de energia e, conseqüentemente, componentes, equipamentos e sistemas de produção em geral (por exemplo, aparelhos elétricos). Tais danos geralmente causam sanções financeiras às companhias de distribuição de energia. Assim, é fundamental modelar adequadamente os tempos entre as intervenções destes sistemas, a fim de promover políticas de intervenção otimizadas e controle de qualidade. Deste modo, as Tabelas 6, 7 e 8 trazem o teste de aderência proposto para diferentes modelos originados do PRGW, levando em consideração os conjuntos de dados citados nos itens (a), (b) e (c).

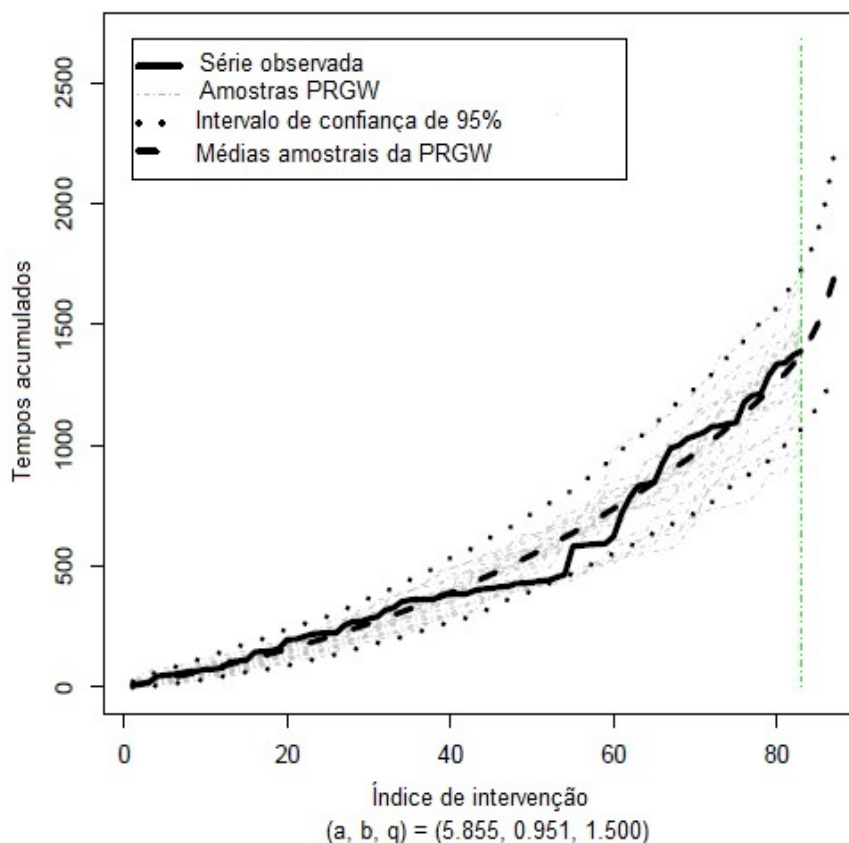
Tabela 6 – Teste de aderência proposto via Algoritmo 1 para os modelos PRGW ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de compressão (LANGSETH; LINDQVIST, 2006).

Modelos	Parâmetros			PRGWT				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{q}	$\hat{\theta} (\hat{\alpha}\hat{\beta})$	p_{K-S}^*	p_{C-M}^*	p_{A-D}^*	p_B^*
PR	14,394	0,791	0	8,247	0,229	0,326	0,241	0,594
PNHP	2,392	0,694	1	1,832	0,107	0,044	0,034	0,110
Kijima I	3,299	0,517	0,024	1,853	0,568	0,812	0,638	0,500
Kijima II	5,855	0,951	1,500	5,374	0,104	0,080	0,054	0,207

$p_{K-S}^* \equiv$ p.valor do teste de Kolmogorov-Smirnov, $p_{C-M}^* \equiv$ p.valor do teste de Cramér-von Mises, $p_{A-D}^* \equiv$ p.valor do teste de Anderson-Darling, e $p_B^* \equiv$ p.valor do teste de Bartlett's

Na Tabela 6 observa-se que, a partir do p^* do teste K-S (p_{K-S}^*) nas colunas do PRGWT, cada modelo proposto do PRGW (isto é, RP, PNHP, Kijima tipo I, ou Kijima tipo II) se ajusta adequadamente aos dados citados em (a) com níveis de significância (η) menores que 10,40% (como é feito geralmente em testes de hipótese). A Figura 3 exibe os tempos acumulados observados, os respectivos pontos amostrais e estimadores intervalares ao nível de confiança de 95% para o PRGW, bem como algumas séries simuladas a partir do melhor modelo, que de acordo com Ferreira, Firmino e Cristino (2015) é o Kijima tipo II. Estes autores consideram as métricas Erro Quadrado Médio (EQM) e Log-Verossimilhança (LV), em vez dos p -valores estudados aqui. Por outro lado, de acordo com os p -valores p_{C-M}^* e p_{A-D}^* , para $\eta > 4,4\%$ se pode concluir que o modelo PNHP não se ajusta adequadamente

Figura 3 – Ajuste do modelo PRGW ao conjunto de dados referente ao sistema de compressão (LANGSETH; LINDQVIST, 2006)], de acordo com Ferreira, Firmino e Cristino (2015)



ao conjunto de dados em (a), ou seja, o sistema não retornaria das intervenções na condição de “tão ruim quanto velho”. Com base na *hazard function* em (2.7), como $\hat{\beta} < 1$ para cada modelo do PRGW, parece evidente que o sistema está em melhoria. Assim, as intervenções podem estar levando o sistema a uma condição “melhor do que novo”, gerando tempos entre intervenções diretamente proporcionais ao número de intervenções (como pode ser visto na Figura 3).

Além disso, os valores de p em PRGWT também poderiam ser adequados para avaliar a qualidade do ajuste dos modelos, uma vez que há semelhanças com EQM, pois p é inversamente proporcional à discrepância observada entre os dados empíricos e modelo ajustado. Nestes termos, tem-se evidência de que o melhor modelo a se ajustar ao conjunto de dados em (a), é o Kijima tipo I, pois p_{k-s}^* assume o valor 0,568, por exemplo. Deve-se ressaltar que os autores Ferreira, Firmino e Cristino (2015) sugerem o modelo Kijima tipo

II como um dos melhores, principalmente em termos de EQM, mas pelo LV o Kijima tipo I só é levemente superado. Portanto, o teste de aderência para o modelo PRGW proposto pode também ser aplicado para a comparação de modelos baseados no PRGW, além de LV e EQM. Da mesma maneira, autores como [Moura et al. \(2014\)](#) também têm recorrido a testes de hipóteses para comparar modelos PRGW.

Tabela 7 – Teste de aderência proposto via [Algoritmo 1](#) para os modelos PRGW ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de pará-brisas de aeronave ([MURTHY; XIE; JIANG, 2004](#)).

Modelos	Parâmetros			PRGWT				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{q}	$\hat{\theta}$ ($\hat{\alpha}^{\hat{\beta}}$)	p_{K-S}^*	p_{C-M}^*	p_{A-D}^*	p_B^*
PR	0,028	0,897	0	0,0406	0,938	0,948	0,915	0,708
PNHP	0,120	1,465	1	0,0447	0,541	0,818	0,806	0,687
Kijima I	0,111	1,489	0,662	0,0377	0,540	0,800	0,789	0,653
Kijima II	0,060	1,045	1,496	0,0531	0,874	0,922	0,926	0,971

$p_{K-S}^* \equiv$ p.valor do teste de Kolmogorov-Smirnov, $p_{C-M}^* \equiv$ p.valor do teste de Cramér-von Mises, $p_{A-D}^* \equiv$ p.valor do teste de Anderson-Darling, e $p_B^* \equiv$ p.valor do teste de Bartlett's

Considerando o conjunto de dados correspondente a (b) (testado na [Tabela 7](#)), observa-se que a aderência do PRGW será confirmada para qualquer $\eta < 54\%$ (veja os valores de p das colunas PRGWT). Por sua vez, assumindo p como uma métrica de comparação, pode-se ver que a partir dos testes p_{K-S}^* e p_{C-M}^* (p_{A-D}^* e p_B^*), o modelo PR (Kijima tipo II) é o de melhor ajuste. Para este caso, [Ferreira, Firmino e Cristino \(2015\)](#) sugerem que o modelo Kijima tipo II é de melhor ajuste, com base em EQM e LV, concordando assim, com os p -valores p_{A-D}^* e p_B^* . Segundo o modelo de melhor ajuste, ou seja, Kijima tipo II, pode-se concluir que o sistema está deteriorando ($\hat{\beta} > 1$). Neste caso, não há consenso sobre a fase confrontada pelo sistema (deteriorando, melhorando ou estável), uma vez que $\hat{\beta} < 1$ para PR.

Por outro lado, para os dados correspondes a (c) (testados na [Tabela 8](#)), o teste de aderência para o PRGW sugere a aderência de qualquer modelo do PRGW somente se $\eta < 0,08\%$. De fato, para $\eta > 1,6\%$, o [Algoritmo 1](#) indica que o modelo PNHP não é adequado para os dados correspondentes a (c), independentemente do uso dos testes p_{A-D}^* , p_{K-S}^* , p_{C-M}^* ou p_B^* . Considerando p como uma métrica de qualidade, pode-se assumir também que o modelo Kijima tipo II tem o melhor ajuste, com base em qualquer um dos p -valores

Tabela 8 – Teste de aderência proposto via [Algoritmo 1](#) para os modelos PRGW ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de transformadores da CHESF ([CRISTINO, 2008](#)).

Modelos	Parâmetros			PRGWT				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{q}	$\hat{\theta}$ ($\hat{\alpha}\hat{\beta}$)	p_{K-S}^*	p_{C-M}^*	p_{A-D}^*	p_B^*
PR	179,770	1,589	0	3816,2	0,651	0,602	0,529	0,647
PNHP	227,142	1,089	1	368,07	0,002	0,013	0,016	0,0008
Kijima I	210,343	1,910	0,006	27369	0,497	0,438	0,462	0,724
Kijima II	273,109	2,336	0,381	492524	0,756	0,727	0,789	0,966

$p_{K-S}^* \equiv$ p.valor do teste de Kolmogorov-Smirnov, $p_{C-M}^* \equiv$ p.valor do teste de Cramér-von Mises, $p_{A-D}^* \equiv$ p.valor do teste de Anderson-Darling, e $p_B^* \equiv$ p.valor do teste de Bartlett's

calculados, e de acordo com métrica LV [Ferreira, Firmino e Cristino \(2015\)](#). Neste caso, cada modelo PRGW sugere que o sistema está se deteriorando ($\hat{\beta} > 1$).

5.2 Aplicação dos momentos do PRGW

Nesta subseção, serão avaliados o comportamento dos momentos do PRGW através de simulações e aplicação em casos reais que foram citados na [subseção 5.1.2](#). Esta avaliação se dará pela comparação das medidas descritivas geradas a partir dos k momentos do PRGW com situações que ocorrem na literatura para facilitar a análise dos dados. Por exemplo: verificar a dispersão dos dados, ajustar os dados a uma distribuição Normal, entre outros.

5.2.1 Dados simulados

Nas [Figuras 4, 5 e 8](#), os coeficientes de assimetria e curtose e o terceiro momento foram simulados em função de 301 valores de β no intervalo $[0.1, 10]$. Sendo que, para cada β estimado neste mesmo intervalo foram realizados 100 simulações. Enquanto, nas [Figuras 6 e 7](#), os coeficientes de assimetria e curtose foram simulados em função de 301 valores de q no intervalo $[0, 1]$. E, para cada q estimado neste mesmo intervalo foram realizados 100 simulações.

Figura 4 – Comportamento do coeficiente de assimetria em relação ao valor de β , quando $n = 100$.

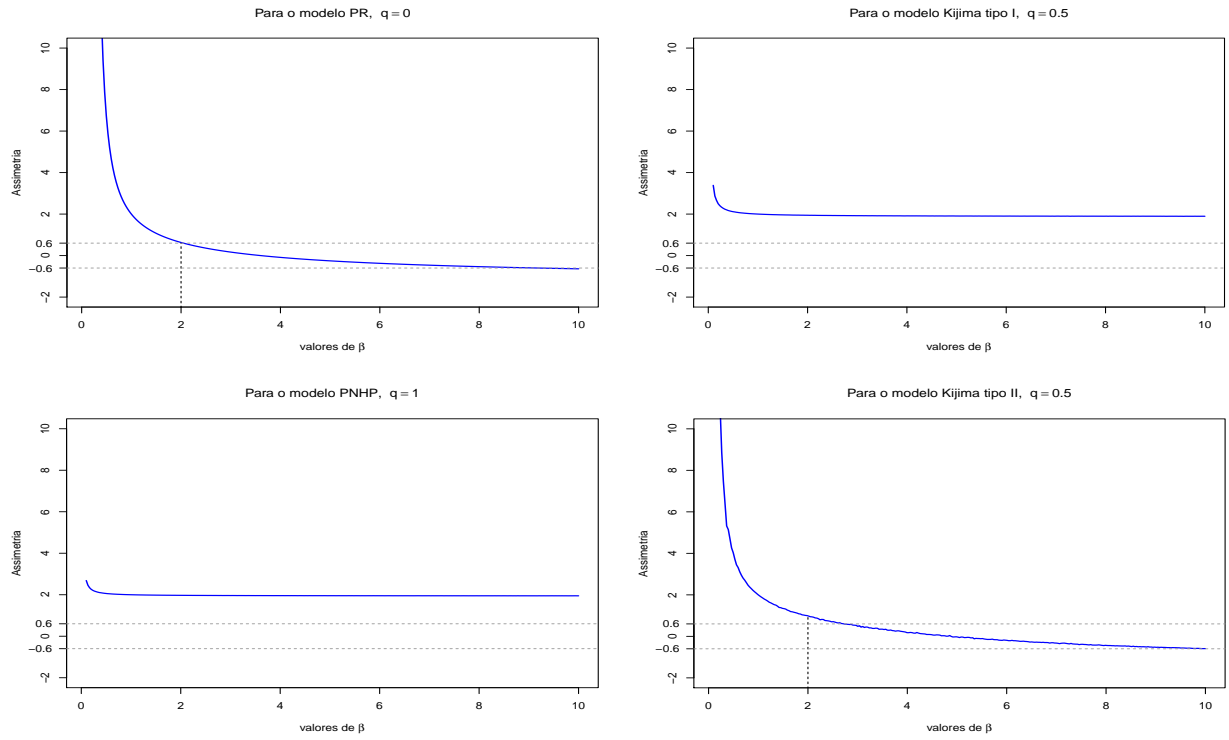


Figura 5 – Comportamento do coeficiente de curtose em relação ao valor de β , quando $n = 100$.

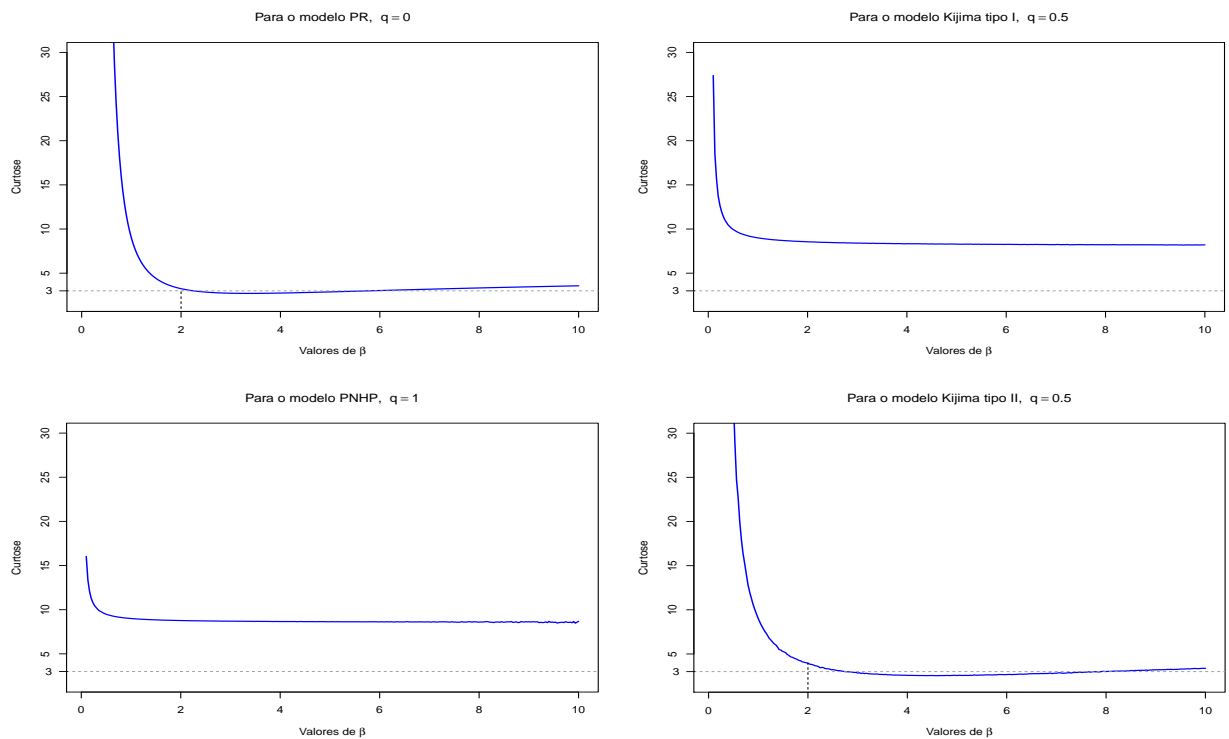
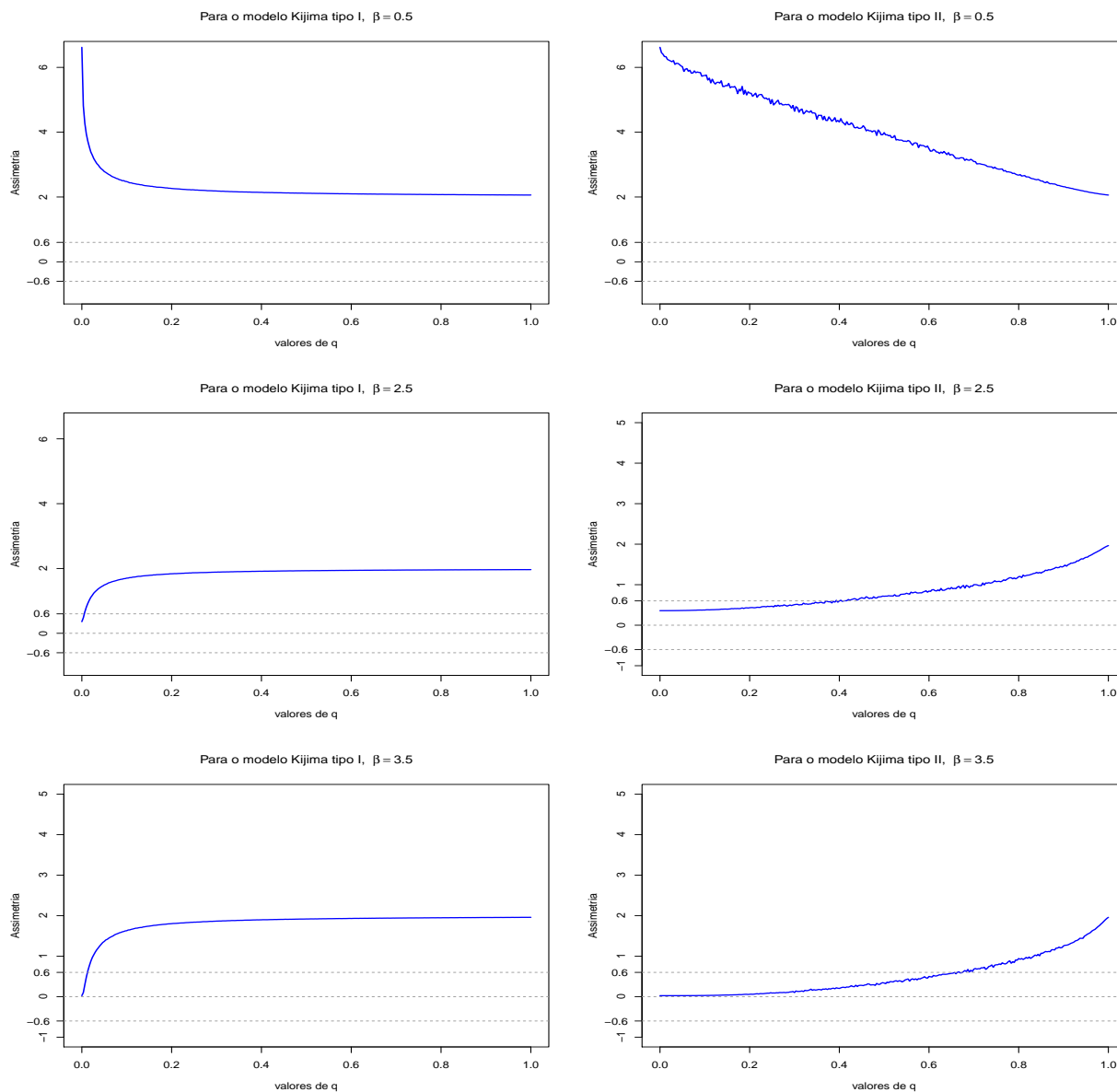


Figura 6 – Comportamento do coeficiente de assimetria em relação ao valor de q , quando $n = 100$.

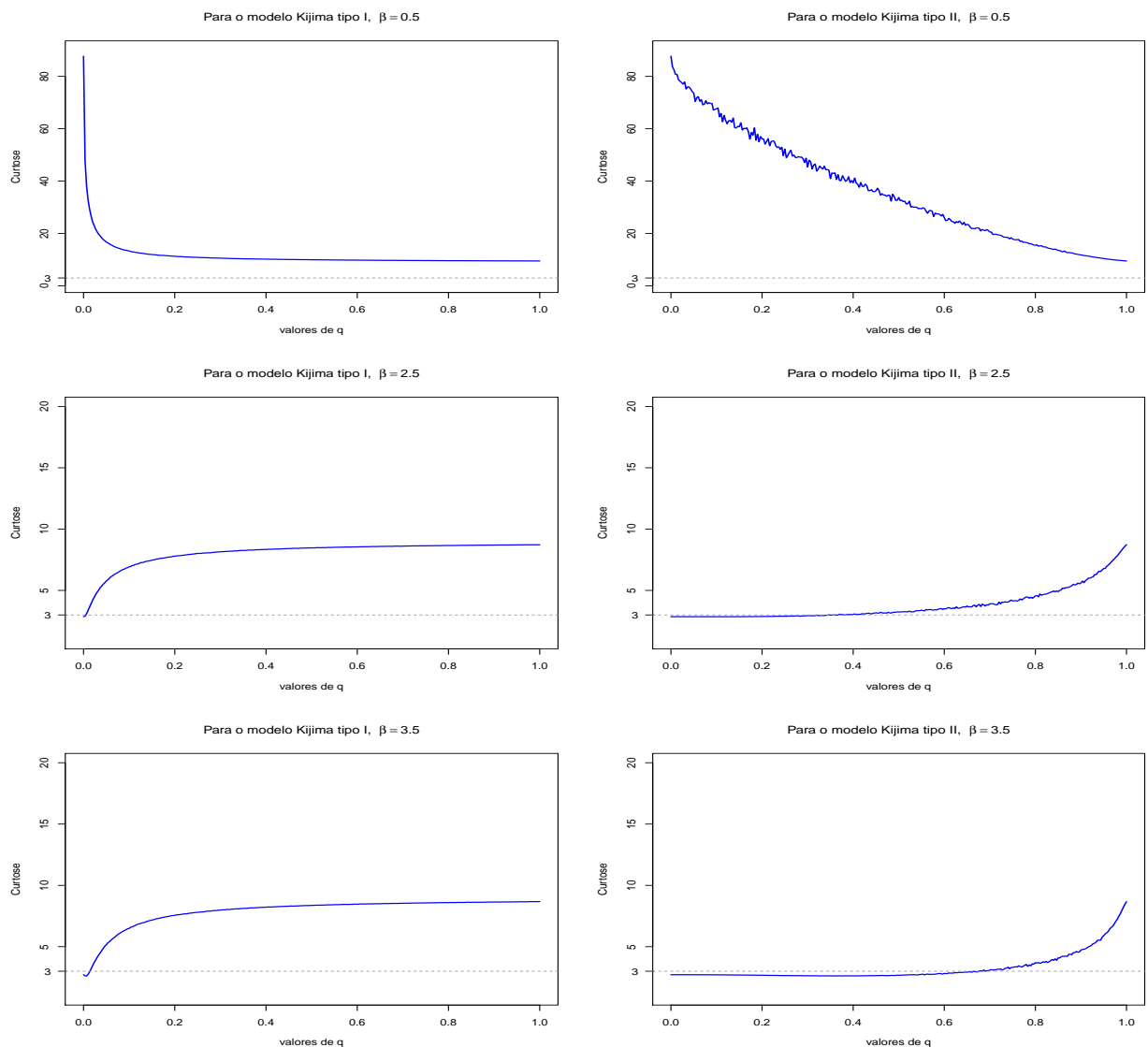


Os coeficientes de assimetria e curtose podem ser utilizados para verificar se um conjunto de dados pode ter sido gerado a partir de uma distribuição Normal. Sabe-se que o terceiro momento central desta distribuição é zero, de modo que seu coeficiente de assimetria é nulo; sabe-se também que seu coeficiente de curtose é igual a 3, independentemente de seu valor esperado e da sua variância. Devido à importância da distribuição Normal, podem ser observados algumas relações com o modelo PRGW, as quais são citadas a seguir.

Relações entre os coeficientes de assimetria e curtose e o valor de β :

- para os modelos PR e Kijima tipo II, ξ_3 e $\beta \in [2, 10]$, ocorre uma variação entre simetria e assimetria moderada, considerando que $\xi_3 \in [-0.6, 0.6]$ (veja a Figura 4). Para β se aproximando de zero, há uma alta concentração de dados nos valores mais baixos, ou seja, a cauda mais longa da distribuição fica à direita, indicando a ocorrência de valores altos com baixa frequência.
- para os modelos RP e Kijima II, ξ_4 e $\beta > 2$, ocorre uma boa aproximação do coeficiente de curtose da distribuição Normal, enquanto para valores de β se aproximando do zero, ocorre alta concentração de valores no centro e nas caudas, o que provoca um pico maior que o da distribuição Normal (veja a Figura 5).

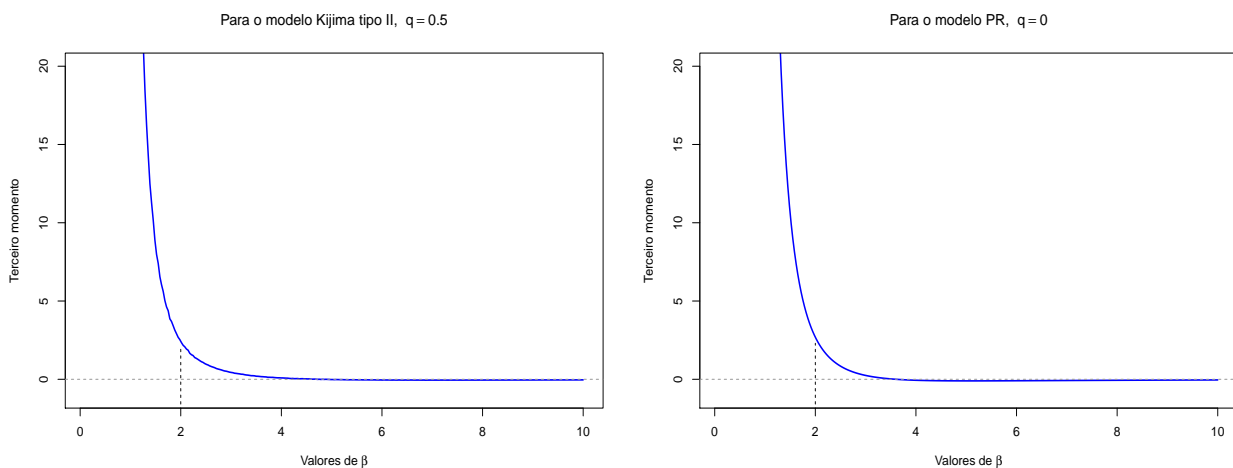
Figura 7 – Comportamento do coeficiente de curtose em relação ao valor de q , quando $n = 100$.



Relações entre os coeficientes de assimetria e curtose e o valor de q :

- para o modelo Kijima tipo I, $\beta > 2$ e $q \rightarrow 0$, ocorre uma variação entre simetria e assimetria moderada, considerando que $\xi_3 \in [-0.6, 0.6]$ (veja a [Figura 6](#)).
- para o modelo Kijima tipo II, $\beta > 2$ e $q < 1$, ocorre uma variação entre simetria e assimetria moderada, considerando que $\xi_3 \in [-0.6, 0.6]$ (veja a [Figura 6](#)).
- para o modelo Kijima tipo II, $\beta > 2$ e $q < 1$, ocorre uma boa aproximação do coeficiente de curtose da distribuição Normal (veja a [Figura 7](#)).

Figura 8 – Comportamento do terceiro momento em relação aos valores de β , quando $n = 100$.



De acordo com as [Figuras 4, 5, 6, 7 e 8](#), pode-se concluir que os modelos Kijima tipo II e PR se aproximam de uma distribuição Normal quando $\beta > 2$ e $q < 1$. Daí, pode-se observar que o modelo PR obteve resultado semelhante a [Ebeling \(2004, p. 59\)](#) (Ele compara a distribuição Weibull padrão com a distribuição Normal). Esse mesmo comportamento ocorre para o Kijima tipo II, com um pouco menos de precisão quando o q tende a 1. Pode-se também observar que os modelos Kijima tipo I e o NHPP apresentam medidas de assimetria e curtose semelhantes.

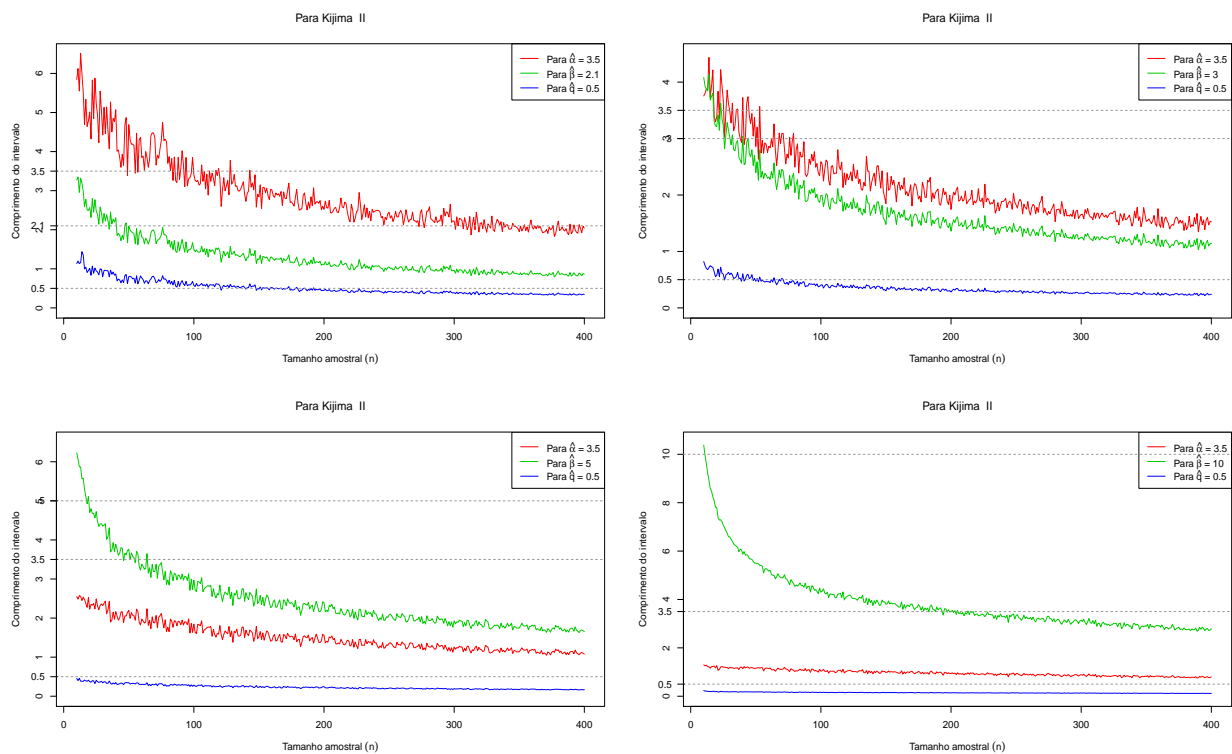
5.3 Aplicação dos intervalos de confiança assintóticos do PRGW

Nesta subseção, serão avaliados o comportamento dos intervalos de confiança assintóticos do PRGW através de simulações. Além disso, os intervalos assintóticos serão aplicados aos casos reais que foram citados na [subseção 5.1.2](#).

5.3.1 Dados simulados para os intervalos de confiança assintóticos do PRGW

Nas Figuras 9 e 10, foram observados os comprimentos dos intervalos de confiança assintóticos em função do tamanho amostral, sendo que os tamanhos amostrais foram simulados um a um, de 10 a 400. Também foi observada a precisão dos intervalos com a variação dos valores de β e q .

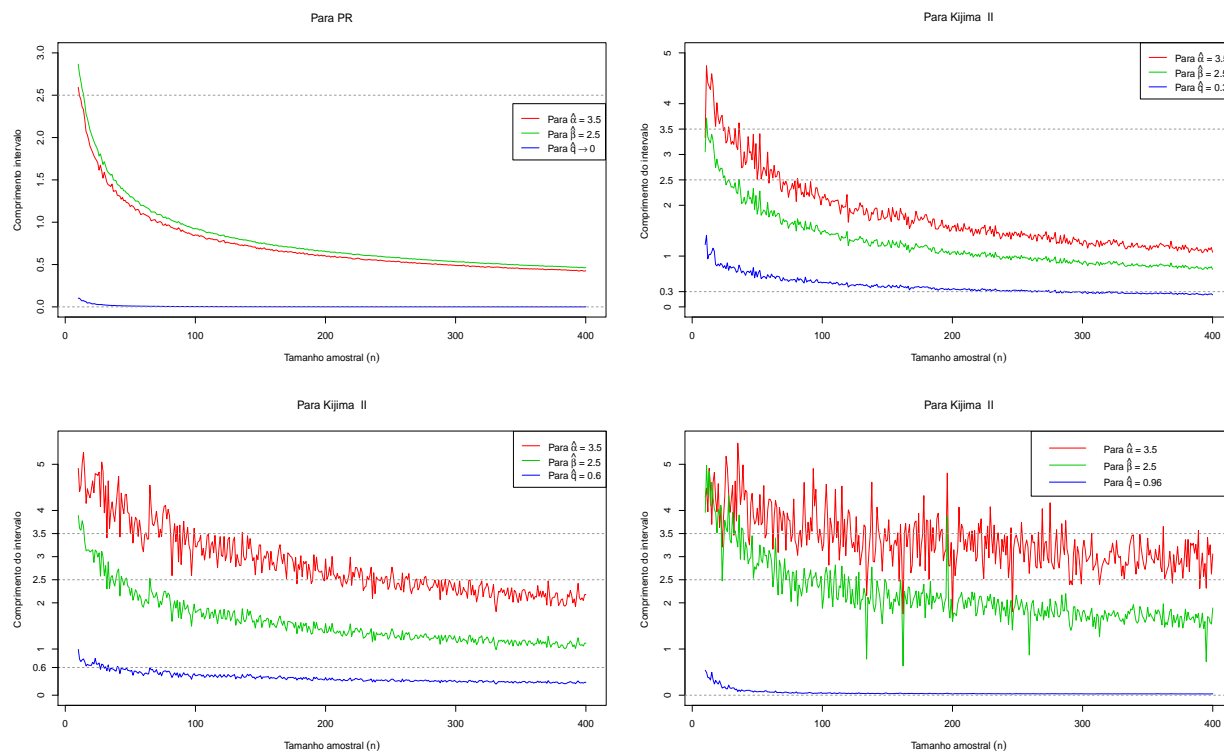
Figura 9 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PRGW em relação ao tamanho amostral e o valor de β , com 95% de confiança.



De acordo com as Figuras 9 e 10, os comprimentos dos intervalos ficam mais precisos à medida que o tamanho amostral cresce, comportamento já esperado pela Teoria Assintótica para construção de intervalos de confiança. Pode-se observar também que à medida que o valor de β cresce, maior é a precisão do comprimento do intervalo para amostras pequenas (veja a Figura 9). O mesmo comportamento ocorre quando o valor de q tende a zero (veja a Figura 10). Como era previsto, os comprimentos dos intervalos apresentam precisão muito boa até para amostras pequenas quando se aproxima de um PR. Para os casos em que se aproxima do PNHP, os comprimentos dos intervalos em relação ao parâmetro α são inadequados até para amostras grandes (veja a Figura 10). Como já tinha sido previsto nas análises feitas das matrizes de informação de Fisher e de covariância na subseção 4.2.3.2, os intervalos de confiança assintóticos são adequados para o Kijima tipo II e quando se aproxima do modelo PR, e inadequado para o modelo Kijima

tipo I e quando se aproxima do modelo PNHP.

Figura 10 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PRGW em relação ao tamanho amostral e o valor de q , com 95% de confiança.



Abaixo será feita uma análise mais minuciosa para os modelos PR ($q = 0$) e PNHP ($q = 1$) usando a [subseção 4.2.3.4](#).

5.3.2 Simulações para os casos particulares do PRGW

Esta subseção foi construída a partir da [subseção 4.2.3.4](#). Nas [Figuras 11 e 12](#), foram observados os comprimentos dos intervalos de confiança assintóticos em função do tamanho amostral, sendo que os tamanhos amostrais foram simulados um a um, de 5 a 400. Também foi observada a precisão do intervalo assintótico em relação ao valor de β .

Pelas [Figuras 11 e 12](#), observa-se que o comprimento dos intervalos fica menor à medida que o tamanho amostral cresce, comportamento já esperado para intervalos assintóticos. Observando o modelo PR, ou seja, a [Figura 11](#), tem-se que à medida que o valor do β cresce, o comprimento do intervalo do parâmetro α fica mais preciso e também apresenta um comprimento de intervalo aceitável para pequenas amostras. Já para o modelo PNHP, ou seja, a [Figura 12](#), o comprimento do intervalo para o parâmetro α só é satisfatório quando o valor de β é maior do que 2, como foi previsto na [subseção 5.3.1](#).

Figura 11 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PR em relação ao tamanho amostral e o valor de β , com 95% de confiança.

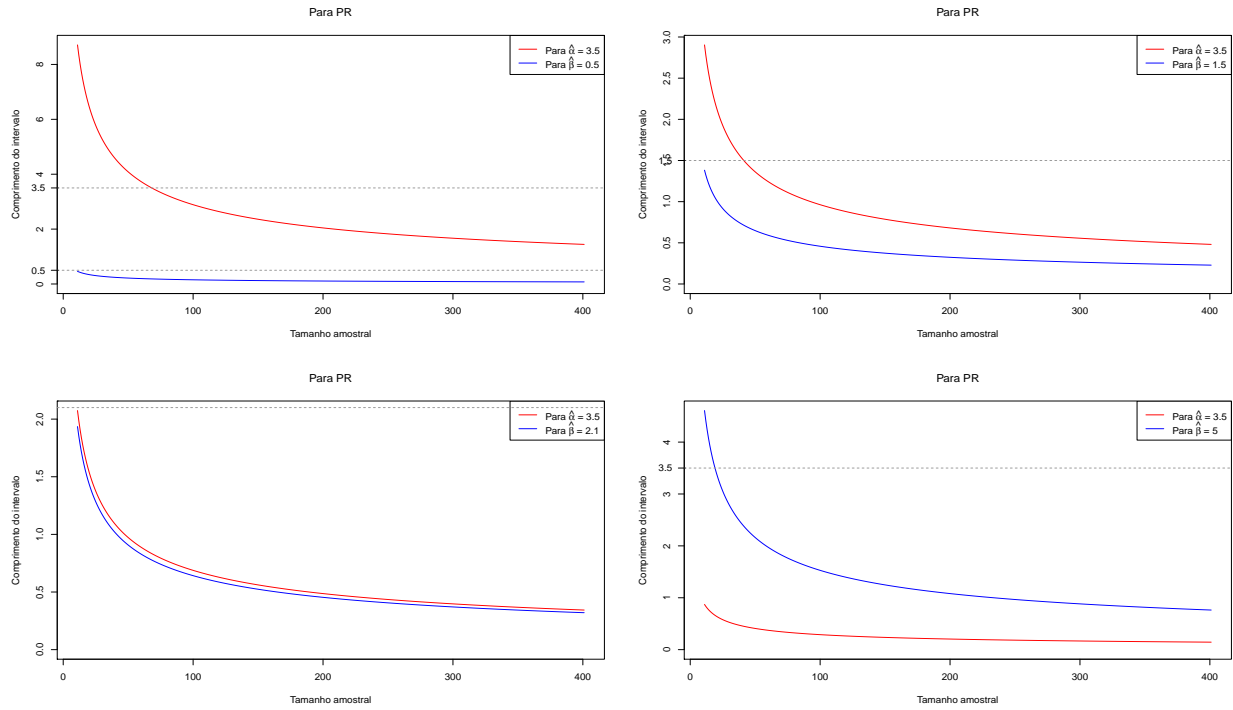
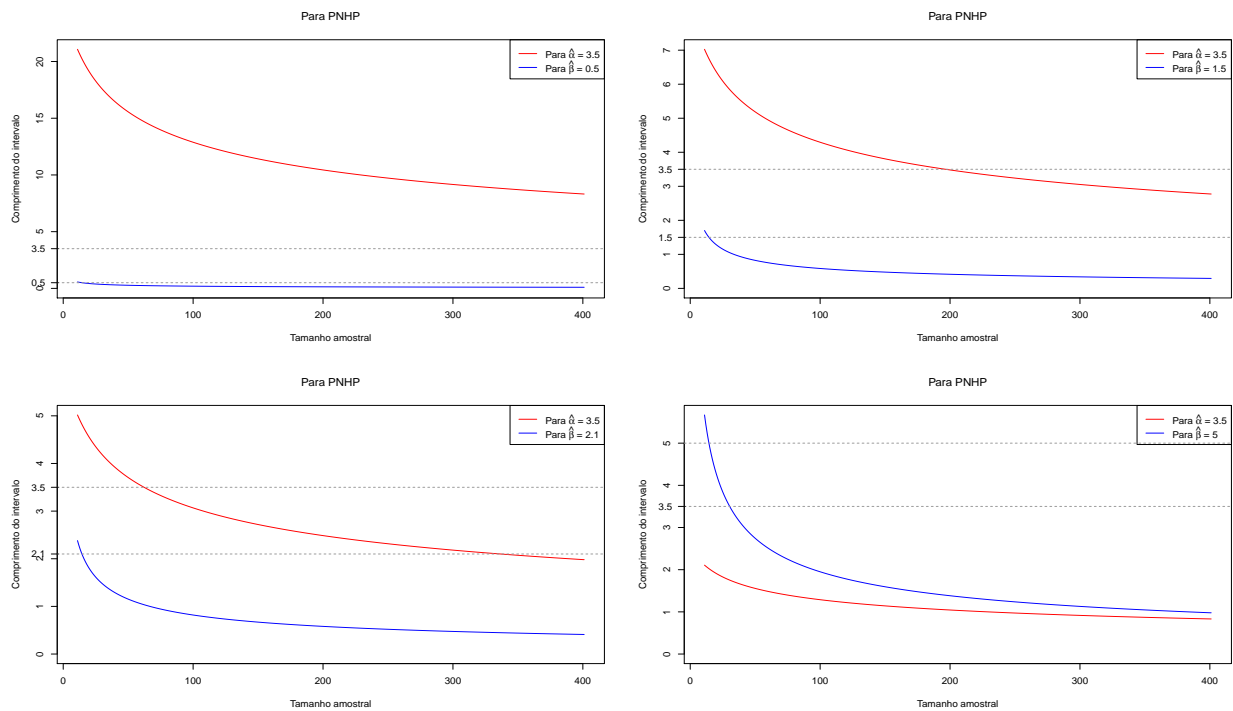


Figura 12 – Comportamento dos intervalos de confiança assintóticos para o modelo PNHP em relação ao tamanho amostral e o valor de β , com 95% de confiança.



5.3.3 Aplicação a casos reais

Nesta subseção serão apresentados os intervalos de confiança assintóticos para os três casos reais citados na subseção 5.1.2. Primeiro serão estimados os parâmetros do PRGW pelo método de máxima verossimilhança, os quais serão calculados pelo algoritmo construído a partir do pacote **GenSA** do *software* livre (R Core Team, 2015), depois serão calculados os intervalos de acordo com a subseção 4.2.3.

Tabela 9 – Intervalos assintóticos para os modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de compressão (LANGSETH; LINDQVIST, 2006).

Modelos	Parâmetros			Intervalos assintóticos					
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{q}	LI_{α}	LS_{α}	LI_{β}	LS_{β}	LI_q	LS_q
PR	14.395	0.791	0	10.273	18.516	0.658	0.924	0	0
PNHP	2.391	0.694	1	-0.951	5.733	0.546	0.842	1	1
Kijima tipo I	3.299	0.517	0.024	-	-	-	-	-	-
Kijima tipo II	5.855	0.951	1.499	-	-	-	-	-	-

LI = Limite Inferior e LS = Limite Superior para intervalos assintóticos com 95% de confiança

Tabela 10 – Intervalos assintóticos para os modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de pára-brisa de aeronave (MURTHY; XIE; JIANG, 2004).

Modelos	Parâmetros			Intervalos assintóticos					
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{q}	LI_{α}	LS_{α}	LI_{β}	LS_{β}	LI_q	LS_q
PR	0.028	0.897	0	0.021	0.035	0.744	1.050	0	0
PNHP	0.120	1.465	1	0.040	0.200	1.146	1.784	1	1
Kijima tipo I	0.111	1.489	0.662	-	-	-	-	-	-
Kijima tipo II	5.855	0.951	1.499	-	-	-	-	-	-

LI = Limite Inferior e LS = Limite Superior para intervalos assintóticos com 95% de confiança

Tabela 11 – Intervalos assintóticos para os modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de transformadores (CRISTINO, 2008).

Modelos	Parâmetros			Intervalos assintóticos					
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{q}	LI_{α}	LS_{α}	LI_{β}	LS_{β}	LI_q	LS_q
PR	179.770	1.588	0	149.867	209.673	1.277	1.899	0	0
PNHP	227.142	1.089	1	6.955	447.329	0.818	1.360	1	1
Kijima tipo I	210.343	1.910	0.006	-	-	-	-	-	-
Kijima tipo II	273.109	2.336	0.381	151.037	395.181	1.420	3.253	0.058	0.703

LI = Limite Inferior e LS = Limite Superior para intervalos assintóticos com 95% de confiança

Como era previsto pela [subseção 5.3.2](#), os intervalos assintóticos para o modelo PR, apresentam uma boa precisão, sendo que para β grande melhora a precisão (veja as [Tabelas 9, 10 e 11](#)); agora para o modelo PNHP, a precisão dos intervalos não é boa para o parâmetro de escala, pois os valores de β são menores do que 2 e o tamanho amostral é menor do que 100 (veja as [Tabelas 9, 10 e 11](#)).

Pela [Tabela 11](#), observa-se que os comprimentos dos intervalos de confiança assintóticos são grandes. Isto ocorre pela fato do valor de β estar próximo de 2 e o tamanho amostral ser menor do que 100 (veja as [Figuras 9 e 10](#)).

6 Considerações finais

Em princípio, os objetivos desta tese foram alcançados a partir de uma transformação por lei de potência generalizado que converte o modelo PRG baseado numa Weibull (PRGW) em um modelo PHP, que envolve uma distribuição Exponencial. Ou seja, este fato ocorre por uma simples mudança da variável $X_i + v_{i-1}$ para a variável $W_i = (X_i + v_{i-1})^\beta - v_{i-1}^\beta$, onde a primeira segue o modelo PRGW de parâmetros (α, β, q) e a segunda uma distribuição Exponencial de parâmetro $\theta = \alpha^\beta$. Com este resultado foi construído o [Teorema 1](#) (Transformação por lei de potência generalizada) que possibilitou alguns desdobramentos do PRGW, tais como: as variáveis obtidas são independentes entre si, teste de aderência, fórmula fechada para os k momentos (k momentos centrais) e os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros (α, β, q) . Esta descoberta permite a generalização que existe entre as variáveis Weibull e Exponencial (onde $v_0 = 0$) e tem sido o núcleo das pesquisas em andamento por parte dos autores.

O teste de aderência apresentado é baseado numa conversão do modelo PRGW em um modelo PHP pelo uso do [Teorema 1](#). Após a transformação, um teste de aderência simples para a distribuição Exponencial é aplicado (por exemplo, os testes de Kolmogorov-Smirnov (K-S), de Bartlett (B), de Cramér-von Mises (C-M), de Anderson-Darling (A-D), entre outros) ou para o PHP, pois é suficiente para avaliar o desempenho do ajuste do PRGW ao conjunto de dados estabelecidos em estudo.

O método proposto tenta superar o desafio, ainda imposto aos pesquisadores e profissionais de processos estocásticos, de testar a qualidade do ajuste de modelos baseados na distribuição Weibull para sistemas reparáveis. O trabalho destaca a importância do teste de aderência para inferência estatística em geral, em particular para o controle de qualidade e como inferir, através do teste de aderência para o PRGW: (i) o estágio confrontado pelo sistema reparável (seja de melhoramento, de estabilidade ou de deterioração), (ii) a qualidade das intervenções, assim como (iii) o tempo para intervir contra eventos indesejáveis subjacentes ao sistema (por exemplo, resíduos, poluição ambiental, explosão e danos). Estas características mostram claramente que as ferramentas do PRGW são essenciais para o controle de qualidade de sistemas complexos, tais como usinas de energia, reatores químicos, instalações marítimas, transportes alternativos, máquinas e assim por diante.

O desempenho do teste de aderência proposto para o modelo PRGW foi ilustrado

por meio de um certo número de casos simulados. Especificamente, a fim de inferir sobre a taxa do erro tipo I do teste de aderência proposto, realizações do PRGW foram simuladas para diferentes valores de q e tamanhos amostrais n , fornecendo resultados satisfatórios. Por sua vez, para estudar a taxa de erro tipo II, o Processo de Renovação Generalizado baseado na distribuição Uniforme (UGRP) (talvez não publicado até agora) foi levado em conta. Em resumo, o teste de aderência proposto para o PRGW parece possuir um desempenho semelhante ao teste de aderência para a distribuição Exponencial adotada.

A partir do Teorema 1 foi possível construir uma fórmula fechada para os k momentos (k momentos centrais) do PRGW e conseqüentemente foram obtidas as medidas descritivas: média, variância, coeficiente de variação, coeficiente de assimetria e curtose. Daí, se tornou possível comparar o comportamento do modelo PRGW em relação à distribuição Normal. Ou seja, quando o valor de β é maior do que 2 nos modelos PR e Kijima tipo II não muito próximo de 1, observa-se uma boa aproximação da distribuição Normal. Estes resultados foram verificados através de simulações para diferentes valores de q , de β e do tamanho amostral n .

De acordo com o Teorema 1, as variáveis W_i 's são i.i.d. e com isso foi possível calcular os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros (α, β, q) . Para este resultado, foi concluído que os intervalos de confiança assintóticos são adequados apenas para os modelos dos tipos PR e o Kijima tipo II não muito próximo de 1, e valores de β maior do que 2. Também foram construídos intervalos assintóticos independentes para os casos particulares do PRGW (PR e PNHP) sem restrições nos valores dos parâmetros. Daí, foi concluído que os intervalos em relação aos parâmetros são adequados apenas quando o valor de β for maior do que 2, e observou também uma precisão muito boa até para pequenas amostras quando realizado o PR. Concordando assim, com a ideia dos intervalos assintóticos obtidos para o PRGW. Esta ideia fica mais forte quando observados os pontos onde o PRGW se aproxima da distribuição Normal. Estes resultados também foram verificados através de simulações para diferentes valores de q , de β e de tamanho amostral n .

Para ilustrar a utilidade das ferramentas propostas acima para o PRGW, foram considerados três casos reais da literatura: conjunto de dados referente a sistema de compressão de instalações marítimas, sistema de pára-brisas de aeronaves e sistema de transformadores. Por exemplo, o ajuste aos modelos derivados do PRGW (isto é, modelos PR, PNHP, Kijima tipo I e Kijima tipo II) para cada conjunto de dados foi estudada, levando a resultados interessantes. Agora, para os intervalos assintóticos, só foram satisfatórios os casos que se adequaram às condições estabelecidas anteriormente.

Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. Dover Publications, 1964. (Applied mathematics series). ISBN 9780486612720. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XqtsrgEACAAJ>>.

ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A. A test of goodness of fit. **Journal of the American Statistical Association**, v. 49, n. 268, p. 765–769, 1954.

BALAKRISHNAN, N. **Recent advances in life-testing and reliability**. [S.l.]: CRC press, 1995.

BALAKRISHNAN, N.; COHEN, A. C. **Order Statistics and Inference: Estimation Methods**. Academic Press, 1991. (Statistical modeling and decision science). ISBN 9780120769483. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=chvvAAAAMAAJ>>.

BLEISTEIN, N.; HANDELSMAN, R. A. **Asymptotic expansions of integrals**. Courier Corporation, 1975. (Dover Books on Mathematics Series). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3GZf-bCLFxcC>>.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. [S.l.]: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002. v. 2.

COHEN, A. C.; WHITTEN, B. J. **Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models**. Taylor & Francis, 1988. (Statistics: A Series of Textbooks and Monographs). ISBN 9780824779801. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cMIBqiz2xEEC>>.

CORDEIRO, G. M. **Introdução á Teoria Assintótica**. Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999. Rio de Janeiro. ISBN 9788524401503. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=m7EeGQAACAAJ>>.

CRAMÉR, H. Mathematical methods of statistics (princeton. **Press, Princeton, NJ**, p. 367–369, 1946.

CRISTINO, C. T. **Risco e Confiabilidade sobre Estruturas Combinatórias: Uma Modelagem para Redes Elétricas**. Tese (Doutorado) — Mathematics Department of Universidade Federal de Pernambuco, 2008.

CSORGO, S.; FARAWAY, J. J. The exact and asymptotic distributions of Cramér – Von Mises statistics. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 58, n. 1, p. 221–234, 1996.

DEVILLE, Y.; IRSN. **Renext: Renewal Method for Extreme Values Extrapolation**. [S.l.], 2015. R package version 3.0-0. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=Renext>>.

EBELING, C. **An introduction to reliability and maintainability engineering**. McGraw-Hill, 2004. (Electrical engineering series). ISBN 9780070421387. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iFumyeVLIAC>>.

EVANS, D. L.; DREW, J. H.; LEEMIS, L. M. The distribution of the Kolmogorov - Smirnov, Cramer - Von Mises, and Anderson - Darling test statistics for Exponential populations with estimated parameters. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**®, Taylor & Francis, v. 37, n. 7, p. 1396–1421, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/03610910801983160>>.

EVERT, S.; BARONI, M. *zipfR*: Word frequency distributions in R. In: **Proceedings of the 45th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, Posters and Demonstrations Sessions**. Prague, Czech Republic: [s.n.], 2007. p. 29–32. (R package version 0.6-6 of 2012-04-03).

FARAWAY, J. et al. **gofstest: Classical Goodness-of-Fit Tests for Univariate Distributions**. [S.l.], 2015. R package version 1.0-3. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=gofstest>>.

FERREIRA, R. J. **Development of a mixed model using Generalized Renewal Processes and the Weibull Distribution**. Tese (Doutorado) — Graduate Biometry and Applied Statistics of Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2016.

FERREIRA, R. J.; FIRMINO, P. R. A.; CRISTINO, C. T. A mixed kijima model using the weibull-based generalized renewal processes. **PLoS ONE**, v. 10, n. 7, p. e0133772, 2015.

GAUDOIN, O.; YANG, B.; XIE, M. A simple goodness-of-fit test for the power-law process, based on the Duane plot. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 52, n. 1, p. 69–74, 2003.

GAUDOIN, O.; YANG, B.; XIE, M. Confidence intervals for the scale parameter of the power-law process. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 35, n. 8, p. 1525–1538, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/03610920600637412>>.

GUO, H. R. et al. A new stochastic model for systems under general repairs. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 56, n. 1, p. 40–49, 2007.

HANKIN, R. K. S. **hypergeo: The Gauss Hypergeometric Function**. [S.l.], 2015. R package version 1.2-11. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=hypergeo>>.

HARTER, H. L. **Order Statistics and Their Use in Testing and Estimation**. Aerospace Research Laboratories, 1970. (Order Statistics and Their Use in Testing and Estimation, volume 1). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hd6nMgEACAAJ>>.

JACOPINO, A.; GROEN, F.; MOSLEH, A. Behavioural study of the general renewal process. In: IEEE. **Reliability and Maintainability, 2004 Annual Symposium-RAMS**. [S.l.], 2004. p. 237–242.

JAIN, M.; MAHESHWARI, S. Generalized renewal process (grp) for the analysis of software reliability growth model. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, v. 23, n. 02, p. 215–227, 2006. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217595906000917>>.

JIMÉNEZ, P.; VILLALÓN, R. Generalized renewal process as an adaptive probabilistic model. In: IEEE. **Transmission & Distribution Conference and Exposition: Latin America, 2006. TDC'06. IEEE/PES**. 2006. p. 1–6. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=4104552>>.

JOHNSON, N.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous univariate distributions**. second. New York: John Wiley & Sons, 1994. v. 2. (Wiley series in probability and mathematical statistics: Applied probability and statistics, v. 2). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0QzvAAAAMAAJ>>.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous Multivariate Distributions, Models and Applications**. second. [S.l.]: New York: John Wiley & Sons, 2000. v. 1.

KAMINSKIY, M. P.; KRIVTSOV, V. V. G-renewal process as a model for statistical warranty claim prediction. In: IEEE. **Reliability and Maintainability Symposium, 2000. Proceedings. Annual**. [S.l.], 2000. p. 276–280.

KIJIMA, M. Some results for repairable systems with general repair. **Journal of Applied probability**, p. 89–102, 1989.

KIJIMA, M.; MORIMURA, H.; SUZUKI, Y. Periodical replacement problem without assuming minimal repair. **European Journal of Operational Research**, v. 37, n. 2, p. 194–203, 1988.

KIJIMA, M.; SUMITA, U. A useful generalization of renewal theory: counting processes governed by non-negative Markovian increments. **Journal of Applied Probability**, v. 23, n. 1, p. 71–88, 1986.

KLEFSJÖ, B.; KUMAR, U. Goodness-of-fit tests for the power-law process based on the TTT-plot. **IEEE transactions on reliability**, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 41, n. 4, p. 593–598, 1992.

KOBBACY, K. A.; JEON, J. Generalized stationary models for scheduling single and multiple preventive maintenance routines. **IMA Journal of Management Mathematics**, IMA, v. 13, n. 2, p. 81–94, 2002.

KOTZ, S.; JOHNSON, N.; READ, C. **Encyclopedia of statistical sciences**. Wiley, 1988. (Encyclopedia of Statistical Sciences, v. 2). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xdtOAAAAMAAJ>>.

KRIVTISOV, V. **A Monte Carlo approach to modeling and estimation of the generalized renewal process in repairable system reliability analysis.** [S.l.: s.n.], 2000.

KUHL, M. E. et al. Introduction to modeling and generating probabilistic input processes for simulation. In: **Proceedings - Winter Simulation Conference.** [S.l.: s.n.], 2008. p. 48–61.

LAI, C.-D.; MURTHY, D.; XIE, M. Weibull distributions and their applications. In: **Springer Handbook of Engineering Statistics.** [S.l.]: Springer, 2006. p. 63–78.

LANGSETH, H.; LINDQVIST, B. H. Competing risks for repairable systems: a data study. **Journal of statistical planning and inference**, Elsevier, v. 136, n. 5, p. 1687–1700, 2006. ISSN 0378-3758. Competing Risks: Theory and Applications Competing Risks: Theory and Applications. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375805001758>>.

LAW, A. M.; KELTON, W. D. **Simulation modeling and analysis.** [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2000. v. 3.

LAWLESS, J.; THIAGARAJAH, K. A point-process model incorporating renewals and time trends, with application to repairable systems. **Technometrics**, v. 38, n. 2, p. 131–138, 1996.

LINDQVIST, B. H. On the statistical modeling and analysis of repairable systems. **Statist. Sci.**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 21, n. 4, p. 532–551, 11 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1214/088342306000000448>>.

LOCKHART, R. A.; STEPHENS, M. A. Estimation and tests of fit for the three-parameter Weibull distribution. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, p. 491–500, 1994.

MAKIS, V.; JARDINE, A. K. A note on optimal replacement policy under general repair. **European Journal of Operational Research**, v. 69, n. 1, p. 75–82, 1993.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A multivariate Exponential distribution. **Journal of the American Statistical Association**, v. 62, n. 317, p. 30–44, 1967. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2282907>>.

MASSEY, F. J. The Kolmogorov - Smirnov test for goodness of fit. **Journal of the American statistical Association**, v. 46, n. 253, p. 68–78, 1951. Disponível em: <<http://amstat.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1951.10500769>>.

MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A. **Statistical methods for reliability data.** John Wiley & Sons, 1998. (Wiley Series in Probability and Statistics). ISBN 9780471673279. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VQOXGrllkDgC>>.

METTAS, A.; ZHAO, W. Modeling and analysis of repairable systems with general repair. In: IEEE. **Reliability and Maintainability Symposium, 2005. Proceedings. Annual.** [S.l.], 2005. p. 176–182.

- MODARRES, M.; KAMINSKIY, M. P.; KRIVTSOV, V. **Reliability engineering and risk analysis: a practical guide**. [S.l.]: CRC press, 2009.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied statistics and probability for engineers**. 3rd. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Incorporated, 2003.
- MOURA, M. et al. A competing risk model for dependent and imperfect condition-based preventive and corrective maintenances. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability**, SAGE Publications, v. 228, n. 6, p. 590–605, 2014.
- MOURA, M. d. C. et al. Bayesian assessment of maintenance efficiency via generalized renewal process. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 27, n. 3, p. 569–589 (in Portuguese), 2007. ISSN 0101-7438. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-74382007000300009&nrm=iso.
- MURTHY, D.; XIE, M.; JIANG, R. **Weibull models**. John Wiley & Sons, 2004. v. 505. (Wiley Series in Probability and Statistics, v. 505). ISBN 9780471473275. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1c5B6w9RZHYC>.
- OLIVEIRA, C. C. F.; CRISTINO, C. T.; FIRMINO, P. R. A. In the kernel of modelling repairable systems: a goodness of fit test for Weibull-based generalized renewal processes. **Journal of Cleaner Production**, v. 133, p. 358–367, 2016.
- OREDA. **Offshore Reliability Data Handbook**. 4th. ed. [S.l.]: Det Norske Veritas, 2002.
- OWA, S.; SRIVASTAVA, H. Univalent and starlike generalized hypergeometric functions. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 39, n. 5, p. 1057–1077, 1987. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1987-054-3>.
- PANAHI, H.; ASADI, S. Estimation of the Weibull distribution based on type-II censored samples. **Applied Mathematical Sciences**, v. 5, n. 52, p. 2549–2558, 2011.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2015. Disponível em: <http://www.R-project.org/>.
- RAZALI, N. M.; WAH, Y. B. Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov - Smirnov, Lilliefors and Anderson - Darling tests. **Journal of Statistical Modeling and Analytics**, v. 2, n. 1, p. 21–33, 2011.
- REVERBERI, A. P. et al. Fluctuating fast chemical reactions in a batch process modelled by stochastic differential equations. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 192–197, 2008. ISSN 0959-6526. Papers selected from the 7th conference - Process Integration, Modelling and Optimisation for Energy Saving and Pollution Reduction- {PRES} 2004. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652606003398>.
- ROSS, S. M. Simulation, statistical modeling and decision science. **Harcourt Academic Press. Observed and Fitted Distribution of Number of Claims: Poisson-Inverse Gaussian, Maximum Likelihood Method**, v. 1, p. 5, 1997.

SARKAR, S. K. A continuous bivariate Exponential distribution. **Journal of the American Statistical Association**, v. 82, n. 398, p. 667–675, 1987.

SHABANI, N.; SOWLATI, T. A hybrid multi-stage stochastic programming-robust optimization model for maximizing the supply chain of a forest-based biomass power plant considering uncertainties. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 112, Part 4, p. 3285–3293, 2016. ISSN 0959-6526. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095965261501255X>>.

SMITH, W. L.; LEADBETTER, M. R. On the renewal function for the Weibull distribution. **Technometrics**, v. 5, n. 3, p. 393–396, 1963. ISSN 00401706. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1266342>>.

STADJE, W.; ZUCKERMAN, D. Optimal repair policies with general degree of repair in two maintenance models. **Operations Research Letters**, Elsevier, v. 11, n. 2, p. 77–80, 1992.

SWEENEY, D. W. On the computation of Euler's constant. **Mathematics of Computation**, v. 17, n. 82, p. 170–178, 1963.

TANWAR, M.; RAI, R. N.; BOLIA, N. Imperfect repair modeling using Kijima type generalized renewal process. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 124, p. 24–31, 2014.

UNAMI, K. et al. Stochastic modelling and control of rainwater harvesting systems for irrigation during dry spells. **Journal of Cleaner Production**, v. 88, p. 185–195, 2015. ISSN 0959–6526. Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652614004119>>.

WANG, Z.-M.; YANG, J.-G. Numerical method for Weibull generalized renewal process and its applications in reliability analysis of NC machine tools. **Computers & Industrial Engineering**, v. 63, n. 4, p. 1128–1134, 2012. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835212001787>>.

WEIBULL, W. Wide applicability. **Journal of applied mechanics**, v. 51, p. 293–297, 1951.

WEST, B. **Improving the Birdstrike Resistance and Durability of Aircraft Windshield Systems: Program Technical Summary**. [S.l.], 1984.

WU, C. et al. An inexact fixed-mix fuzzy-stochastic programming model for heat supply management in wind power heating system under uncertainty. **Journal of Cleaner Production**, v. 112, p. 1717–1728, 2016. ISSN 0959-6526.

XIANG, Y. et al. Generalized simulated annealing for efficient global optimization: the GenSA package for R. **The R Journal**, v. 5, 2013. Disponível em: <<http://journal.r-project.org/>>.

YAGOUTI, A. et al. Revue de processus ponctuels et synthèse de tests statistiques pour le choix d'un type de processus. **Revue des sciences de l'eau/Journal of Water**

Science, Université du Québec-INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE), v. 14, n. 3, p. 323–361, 2001.

YAÑEZ, M.; JOGLAR, F.; MODARRES, M. Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 77, n. 2, p. 167–180, 2002. ISSN 0951-8320. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832002000443>>.

ZHANG, Y.; MEEKER, Q. W. Bayesian life test planning for the Weibull distribution with given shape parameter. **Metrika**, v. 61, n. 3, p. 237–249, 2005. ISSN 1435-926X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s001840400334>>.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstração dos valores esperados das páginas 30 e 31



Pela Eq. (4.29), sabe-se que

$$\mathbb{E} [W_1 \log(W_1)] = \alpha^\beta (\beta \ln(\alpha) + 1 - \gamma)$$

Prova: Sabe-se que $W_1 \sim \text{Exp}(\theta)$, com $\theta = \alpha^\beta$. Então por definição de valor esperado, tem-se:

$$\mathbb{E} [W_1 \log(W_1)] = \int_0^\infty w_1 \ln(w_1) \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1$$

Fazendo

$$\begin{aligned} u &= w_1 \ln(w_1) & \Rightarrow & \quad du = [\ln(w_1) + 1] dw_1 \quad e \\ dv &= \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 & \Rightarrow & \quad v = -e^{-\frac{w_1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Então, por definição de integração por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [W_1 \log(W_1)] &= -w_1 \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} \Big|_{\rightarrow 0^+}^{\rightarrow \infty} + \int_0^\infty e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 + \int_0^\infty \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 \\ &= -w_1 \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} - \theta e^{-\frac{w_1}{\theta}} \Big|_{\rightarrow 0^+}^{\rightarrow \infty} + \int_0^\infty \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 \\ &= \theta + \int_0^\infty \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 \end{aligned}$$

Fazendo $t = \frac{w_1}{\theta} \Rightarrow w_1 = \theta t \Rightarrow dw_1 = \theta dt$. Quando $w \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$ e $w \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 &= \int_0^\infty \ln(\theta t) \cdot e^{-t} \theta dt = \theta \int_0^\infty [\ln(\theta) + \ln(t)] \cdot e^{-t} dt \\ &= \theta \ln(\theta) \int_0^\infty e^{-t} dt + \theta \int_0^\infty \ln(t) \cdot e^{-t} dt \\ &= \theta \ln(\theta) + \theta \int_0^\infty \ln(t) \cdot e^{-t} dt \end{aligned} \tag{A.1}$$

De acordo com o software MAPLE, tem-se

$$\int_0^{\infty} \ln(t) \cdot e^{-t} dt = -\gamma$$

Portanto,

$$\mathbb{E} [W_1 \log(W_1)] = \theta + \theta \ln(\theta) - \theta\gamma = \theta \left(\ln(\theta) + 1 - \gamma \right)$$

□



Pela Eq. (4.30), sabe-se que

$$\mathbb{E} [W_1 \log(W_1)^2] = \alpha^\beta \left(\beta^2 \log(\alpha)^2 - 2\beta\gamma \log(\alpha) + 2\beta \log(\alpha) + \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 - 2\gamma \right)$$

Prova: Sabe-se que $W_1 \sim Exp(\theta)$, com $\theta = \alpha^\beta$. Então por definição de valor esperado, tem-se:

$$\mathbb{E} [W_1 \log(W_1)^2] = \int_0^{\infty} w_1 \ln(w_1)^2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1$$

Fazendo

$$u = w_1 \ln(w_1)^2 \quad \Rightarrow \quad du = [\ln(w_1)^2 + 2 \ln(w_1)] dw_1 \quad e$$

$$d\nu = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 \quad \Rightarrow \quad \nu = -e^{-\frac{w_1}{\theta}}.$$

Então, por definição de integração por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [W_1 \log(W_1)^2] &= -w_1 \ln(w_1)^2 \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} \Big|_{\rightarrow 0^+}^{\rightarrow \infty} + 2 \int_0^{\infty} \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 + \int_0^{\infty} \ln(w_1)^2 \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 \\ &= 2 \int_0^{\infty} \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 + \int_0^{\infty} \ln(w_1)^2 \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 \end{aligned}$$

De acordo com a Eq. (A.1), tem-se

$$2 \int_0^{\infty} \ln(w_1) \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 = 2\theta \ln(\theta) - 2\gamma\theta$$

Fazendo $t = \frac{w_1}{\theta} \Rightarrow w_1 = \theta t \Rightarrow dw_1 = \theta dt$. Quando $w_1 \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$ e $w_1 \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \ln(w_1)^2 \cdot e^{-\frac{w_1}{\theta}} dw_1 &= \int_0^{\infty} \ln(\theta t)^2 \cdot e^{-t} \theta dt = \theta \int_0^{\infty} [\ln(\theta) + \ln(t)]^2 \cdot e^{-t} dt \\ &= \theta \ln(\theta)^2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt + 2\theta \ln(\theta) \int_0^{\infty} \ln(t) \cdot e^{-t} dt + 2\theta \int_0^{\infty} \ln(t)^2 \cdot e^{-t} dt \end{aligned}$$

De acordo com o software MAPLE, tem-se que:

$$\int_0^{\infty} \ln(t) \cdot e^{-t} dt = -\gamma \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \ln(t)^2 \cdot e^{-t} dt = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2$$

Portanto,

$$\mathbb{E} \left[W_1 \log(W_1)^2 \right] = \theta \left(\ln(\theta)^2 - 2\gamma \ln(\theta) + 2 \ln(\theta) + \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 - 2\gamma \right)$$

□



Pela Eq. (4.31), sabe-se que

$$\mathbb{E} \left[(W_i + v_{i-1}^\beta) \log(W_i + v_{i-1}^\beta) \right] = \alpha^\beta \Gamma \left(0, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) + \alpha^\beta \ln(v_{i-1}^\beta) + v_{i-1}^\beta \ln(v_{i-1}^\beta) + \alpha^\beta$$

Prova: Sabe-se que $W_i \sim Exp(\theta)$, com $\theta = \alpha^\beta$. Então por definição de valor esperado, tem-se:

$$\mathbb{E} \left[(W_i + v_{i-1}^\beta) \ln(W_i + v_{i-1}^\beta) \right] = \int_0^{\infty} (w_i + v_{i-1}^\beta) \ln(w_i + v_{i-1}^\beta) \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i$$

Seja $v_{i-1} = v$ e fazendo

$$\begin{aligned} u &= (w_i + v^\beta) \ln(w_i + v^\beta) \quad \Rightarrow \quad du = [\ln(w_i + v^\beta) + 1] dw_i \quad \text{e} \\ d\nu &= \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i \quad \Rightarrow \quad \nu = -e^{-\frac{w_i}{\theta}}. \end{aligned}$$

Então, por definição de integração por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(W_i + v^\beta) \ln(W_i + v^\beta)] &= - (w_i + v^\beta) \ln(w_i + v^\beta) \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} \Big|_{\rightarrow 0^+}^{\rightarrow \infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i + \\ &+ \int_0^{\infty} \ln(w_i + v^\beta) \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i \end{aligned}$$

Integrando também por partes a ultima integral à direita acima, tem-se

$$\int_0^{\infty} \ln(w_i + v^\beta) \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i = -\theta (w_i + v^\beta) \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} \Big|_{\rightarrow 0^+}^{\rightarrow \infty} + \theta \int_0^{\infty} \frac{1}{w_i + v^\beta} \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i \quad (\text{A.2})$$

De acordo com a ultima integral à direita acima, seja $\mu = w_i + v^\beta \Rightarrow w_i = \mu - v^\beta \Rightarrow dw_i = d\mu$. Quando $w_i \rightarrow 0 \Rightarrow \mu \rightarrow v^\beta$ e $w_i \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow \infty$. Assim,

$$\int_{v^\beta}^{\infty} \mu^{-1} \cdot e^{-\frac{\mu}{\theta}} \cdot e^{\frac{v^\beta}{\theta}} d\mu = e^{\frac{v^\beta}{\theta}} \int_{v^\beta}^{\infty} \mu^{-1} \cdot e^{-\frac{\mu}{\theta}} d\mu$$

Agora, fazendo $t = \frac{\mu}{\theta} \Rightarrow \mu = \theta t \Rightarrow d\mu = \theta dt$. Quando $\mu \rightarrow v^\beta \Rightarrow t \rightarrow \frac{v^\beta}{\theta}$ e $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Então,

$$\int_{v^\beta}^{\infty} \mu^{-1} \cdot e^{-\frac{\mu}{\theta}} d\mu = \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^{\infty} (\theta t)^{-1} \cdot e^{-t} \theta dt = \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^{\infty} t^{-1} \cdot e^{-t} d\mu = \Gamma \left(0, \frac{v^\beta}{\theta} \right)$$

Portanto,

$$\mathbb{E} [(W_i + v^\beta) \ln (W_i + v^\beta)] = \theta \Gamma \left(0, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v^\beta}{\theta} \right) + \theta \ln(v^\beta) + v^\beta \ln(v^\beta) + \theta$$

□

> >

Pela Eq. (4.32), sabe-se que

$$\mathbb{E} \left[v'_{i-1} \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] = \alpha^{\beta-1} v'_{i-1} \Gamma \left(2 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right)$$

Prova: Sabe-se que $W_i \sim \text{Exp}(\theta)$, com $\theta = \alpha^\beta$. Então por definição de valor esperado, tem-se:

$$\mathbb{E} \left[v'_{i-1} \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] = \int_0^\infty v'_{i-1} \left(w_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\theta} \exp \left(-\frac{w_i}{\theta} \right) dw_i$$

Considere $v_{i-1} = v$ e $v'_{i-1} = v'$. Fazendo $u = w_i + v^\beta \Rightarrow w_i = u - v^\beta \Rightarrow dw_i = du$. Quando $w_i \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow v^\beta$ e $w_i \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[v'_{i-1} \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] &= \int_{v^\beta}^\infty v' u^{1-\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\theta} \exp \left(-\frac{u}{\theta} + \frac{v^\beta}{\theta} \right) du \\ &= \frac{v'}{\theta} \cdot \exp \left(\frac{v^\beta}{\theta} \right) \int_{v^\beta}^\infty u^{1-\frac{1}{\beta}} \cdot \exp \left(-\frac{u}{\theta} \right) du \end{aligned}$$

Agora, fazendo $t = \frac{u}{\theta} \Rightarrow u = \theta t \Rightarrow du = \theta dt$. Quando $u \rightarrow v^\beta \Rightarrow t \rightarrow \frac{v^\beta}{\theta}$ e $u \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[v'_{i-1} \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] &= \frac{v'}{\theta} \cdot \exp \left(\frac{v^\beta}{\theta} \right) \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^\infty (\theta t)^{1-\frac{1}{\beta}} \cdot e^{-t} \theta dt \\ &= v' \frac{\theta}{\theta^{\frac{1}{\beta}}} \cdot \exp \left(\frac{v^\beta}{\theta} \right) \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^\infty t^{2-\frac{1}{\beta}-1} \cdot e^{-t} dt \\ &= \alpha^{\beta-1} v' \Gamma \left(2 - \frac{1}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta} \right) \end{aligned}$$

Para todo $\beta > \frac{1}{2}$.

□

> >

Pela Eq. (4.33), sabe-se que

$$\mathbb{E} \left[v''_{i-1} \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \right] = \alpha^{\beta-1} v''_{i-1} \Gamma \left(2 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right)$$

Prova: A demonstração é análoga a anterior.

□



Pela Eq. (4.34), sabe-se que

$$\mathbb{E} \left[[v'_{i-1}]^2 \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \right] = \alpha^{\beta-2} [v'_{i-1}]^2 \Gamma \left(2 - \frac{2}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(-\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right)$$

Prova: Sabe-se que $W_i \sim Exp(\theta)$, com $\theta = \alpha^\beta$. Então por definição de valor esperado, tem-se:

$$\mathbb{E} \left[[v'_{i-1}]^2 \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \right] = \int_0^\infty [v'_{i-1}]^2 \left(w_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \cdot \frac{1}{\theta} \exp \left(-\frac{w_i}{\theta} \right) dw_i$$

Considere $v_{i-1} = v$ e $v'_{i-1} = v'$. Fazendo $u = w_i + v^\beta \Rightarrow w_i = u - v^\beta \Rightarrow dw_i = du$. Quando $w_i \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow v^\beta$ e $w_i \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[[v'_{i-1}]^2 \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \right] &= \int_{v^\beta}^\infty [v']^2 u^{1-\frac{2}{\beta}} \cdot \frac{1}{\theta} \exp \left(-\frac{u}{\theta} + \frac{v^\beta}{\theta} \right) du \\ &= \frac{[v']^2}{\theta} \cdot \exp \left(\frac{v^\beta}{\theta} \right) \int_{v^\beta}^\infty u^{1-\frac{2}{\beta}} \cdot \exp \left(-\frac{u}{\theta} \right) du \end{aligned}$$

Agora, fazendo $t = \frac{u}{\theta} \Rightarrow u = \theta t \Rightarrow du = \theta dt$. Quando $u \rightarrow v^\beta \Rightarrow t \rightarrow \frac{v^\beta}{\theta}$ e $u \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[[v'_{i-1}]^2 \left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \right] &= \frac{[v']^2}{\theta} \cdot \exp \left(\frac{v^\beta}{\theta} \right) \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^\infty (\theta t)^{1-\frac{2}{\beta}} \cdot e^{-t} \theta dt \\ &= [v']^2 \frac{\theta}{\theta^{\frac{2}{\beta}}} \cdot \exp \left(\frac{v^\beta}{\theta} \right) \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^\infty t^{2-\frac{2}{\beta}-1} \cdot e^{-t} dt \\ &= \alpha^{\beta-2} [v']^2 \Gamma \left(2 - \frac{2}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta} \right) \end{aligned}$$

Para todo $\beta > 1$. □



Pela Eq. (4.35), sabe-se que

$$\mathbb{E} \left[\frac{v'_{i-1}}{\left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}} \right] = \frac{1}{\alpha} v'_{i-1} \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta}, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right) \exp \left(-\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta} \right)$$

Prova: Sabe-se que $W_i \sim Exp(\theta)$, com $\theta = \alpha^\beta$. Então por definição de valor esperado, tem-se:

$$\mathbb{E} \left[\frac{v'_{i-1}}{\left(W_i + v_{i-1}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}} \right] = \int_0^\infty \frac{v'_{i-1}}{\left(w_i + v_{i-1}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}} \cdot \frac{1}{\theta} \exp \left(-\frac{w_i}{\theta} \right) dw_i$$

Considere $v_{i-1} = v$ e $v'_{i-1} = v'$. Fazendo $u = w_i + v^\beta \Rightarrow w_i = u - v^\beta \Rightarrow dw_i = du$. Quando $w_i \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow v^\beta$ e $w_i \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{[v']^2}{(W_i + v^\beta)^{\frac{2}{\beta}}} \right] &= \int_{v^\beta}^{\infty} \frac{v'}{u^{\frac{2}{\beta}}} \cdot \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{u}{\theta} + \frac{v^\beta}{\theta}\right) du \\ &= \frac{[v']^2}{\theta} \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\theta}\right) \int_{v^\beta}^{\infty} u^{-\frac{2}{\beta}} \cdot \exp\left(-\frac{u}{\theta}\right) du \end{aligned}$$

Agora, fazendo $t = \frac{u}{\theta} \Rightarrow u = \theta t \Rightarrow du = \theta dt$. Quando $u \rightarrow v^\beta \Rightarrow t \rightarrow \frac{v^\beta}{\theta}$ e $u \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{[v']^2}{(W_i + v^\beta)^{\frac{2}{\beta}}} \right] &= \frac{[v']^2}{\theta} \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\theta}\right) \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^{\infty} (\theta t)^{-\frac{2}{\beta}} \cdot e^{-t} \theta dt \\ &= [v']^2 \frac{1}{\theta^{\frac{2}{\beta}}} \cdot \exp\left(\frac{v^\beta}{\theta}\right) \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^{\infty} t^{1-\frac{2}{\beta}-1} \cdot e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha^2} [v']^2 \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}, \frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \exp\left(\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \end{aligned}$$

Para todo $\beta > \frac{1}{2}$. □



Pela Eq. (4.38) e fazendo $v_{i-1} = v$, sabe-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(W_i + v^\beta) \ln (W_i + v^\beta)^2 \right] &= (v^\beta + \theta) \ln(v)^2 + 2\theta \ln(v) + 2\theta [1 + \ln(v)] \Gamma\left(0, \frac{v}{\theta}\right) \exp\left(\frac{v^\beta}{\theta}\right) \\ &\quad + \theta \exp\left(\frac{v^\beta}{\theta}\right) \left[\left(\gamma + \ln\left(\frac{v^\beta}{\theta}\right)\right)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \frac{2v^\beta}{\theta} {}_3F_3\left([2, 2, 2], [3, 3, 3], -\frac{v^\beta}{\alpha^\beta}\right) \right] \end{aligned}$$

Prova: Sabe-se que $W_i \sim Exp(\theta)$, com $\theta = \alpha^\beta$. Então por definição de valor esperado, tem-se:

$$\mathbb{E} \left[(W_i + v^\beta) \ln (W_i + v^\beta)^2 \right] = \int_0^\infty (w_i + v^\beta) \ln (w_i + v^\beta)^2 \cdot \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{w_i}{\theta}\right) dw_i$$

Fazendo

$$u = (w_i + v^\beta) \ln (w_i + v^\beta)^2 \Rightarrow du = \left[2 \ln (w_i + v^\beta) + \ln (w_i + v^\beta)^2 \right] dw_i \quad e$$

$$d\nu = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i \Rightarrow \nu = -e^{-\frac{w_i}{\theta}}.$$

Então, por definição de integração por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(W_i + v^\beta) \ln (W_i + v^\beta)^2 \right] &= - (w_i + v^\beta) \ln (w_i + v^\beta)^2 \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} \Big|_{\rightarrow 0^+}^{\rightarrow \infty} + 2 \int_0^\infty \ln (w_i + v^\beta) \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i + \\ &\quad + \int_0^\infty \ln (w_i + v^\beta)^2 \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i \end{aligned}$$

Fazendo $\mu = w_i + v^\beta \Rightarrow w_i = \mu - v^\beta \Rightarrow dw_i = d\mu$. Quando $w_i \rightarrow 0 \Rightarrow \mu \rightarrow v^\beta$ e $w_i \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow \infty$. Então,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{w_i}{\theta}}}{(w_i + v^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} dw_i = e^{\frac{v^\beta}{\theta}} \int_{v^\beta}^\infty \mu^{-\frac{1}{\beta}} \cdot e^{-\frac{\mu}{\theta}} d\mu$$

$$\int_0^\infty (w_i + v^\beta)^{-\frac{1}{\beta}} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \ln(w_i + v^\beta) \cdot e^{-\frac{w_i}{\theta}} dw_i = e^{\frac{v^\beta}{\theta}} \int_{v^\beta}^\infty \mu^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \ln(\mu) \cdot e^{-\frac{\mu}{\theta}} d\mu$$

Agora, fazendo $t = \frac{u}{\theta} \Rightarrow u = \theta t \Rightarrow du = \theta dt$. Quando $u \rightarrow v^\beta \Rightarrow t \rightarrow \frac{v^\beta}{\theta}$ e $u \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\int_{v^\beta}^\infty \mu^{-\frac{1}{\beta}} \cdot e^{-\frac{\mu}{\theta}} d\mu = \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^\infty (\theta t)^{-\frac{1}{\beta}} \cdot e^{-t} \theta dt = \frac{\theta}{\alpha} \int_{\frac{v^\beta}{\theta}}^\infty t^{1-\frac{1}{\beta}-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{\theta}{\alpha} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}, \frac{v}{\theta}\right)$$

De acordo com o software MAPLE, tem-se que

$$\int_{v^\beta}^\infty \frac{\ln(\mu)}{\mu^{\frac{1}{\beta}}} \cdot e^{-\frac{\mu}{\theta}} d\mu = \frac{\theta}{\alpha} \cdot \ln(v^\beta) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}, \frac{v}{\theta}\right) + \frac{\theta\pi}{\alpha\Gamma(\beta-1)} \left(\Psi(\beta-1) - \pi \cot\left(\frac{\pi(\beta-1)}{\beta}\right) - \ln\left(\frac{v^\beta}{\theta}\right)\right) \cdot \csc\left(\frac{\pi(\beta-1)}{\beta}\right) + \frac{\beta^2 v^{\beta-1}}{(\beta-1)^2} \cdot {}_2F_2\left(\left[1 - \frac{1}{\beta}, 1 - \frac{1}{\beta}\right], \left[2 - \frac{1}{\beta}, 2 - \frac{1}{\beta}\right], -\frac{v^\beta}{\alpha\beta}\right)$$

Para todo $\beta > 1$ □



As segundas derivadas em relação ℓ_3 em (4.44) são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha^2} &= \frac{n\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^{\beta+2}} \sum_{i=1}^n w_i - \frac{\beta}{\alpha^{\beta+2}} \sum_{i=1}^n w_i \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha^2} \right] &= -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^{\beta+2}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right] + \frac{\beta}{\alpha^{\beta+2}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right] = \frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{n\beta^2}{\alpha^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2} = \frac{n\beta^2}{\alpha^2} \\ \frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \beta \partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} - \frac{\beta \ln(\alpha)}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{1}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n (w_i) \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) + \frac{1}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n (w_i) \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha \partial \beta} \right] &= \frac{n}{\alpha} + \frac{\beta \ln(\alpha)}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n w_i \right] - \frac{1}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (w_i) \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) \right] - \frac{1}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (w_i) \right] \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha \partial \beta} \right] &= \frac{n}{\alpha} + \frac{n\beta \ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^{\beta+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (w_i) \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) \right] - \frac{n}{\alpha} \quad (\text{veja o Teorema 1})\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1, sabe-se que $W = \sum_{i=1}^n w_i \sim \text{Gama}(n, \theta)$, então

$$\mathbb{E} [W \ln(W)] = \int_0^\infty w \ln(w) \cdot \frac{w^{n-1}}{\theta^n \Gamma(n)} \cdot e^{-\frac{w}{\theta}} dw$$

Agora, fazendo $t = \frac{u}{\theta} \Rightarrow u = \theta t \Rightarrow du = \theta dt$. Quando $u \rightarrow v^\beta \Rightarrow t \rightarrow \frac{v^\beta}{\theta}$ e $u \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty w \ln(w) \cdot \frac{w^{n-1}}{\theta^n \Gamma(n)} \cdot e^{-\frac{w}{\theta}} dw &= \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n \ln(\theta t)}{\theta^n \Gamma(n)} \cdot e^{-t} \theta dt \\ &= \frac{\theta}{\Gamma(n)} \left[\ln(\theta) \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} dt + \int_0^\infty t^n \cdot \ln(t) \cdot e^{-t} dt \right]\end{aligned}$$

Sabendo que a função Gama é dada por $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$ e a função Digama $\Psi(z) = \frac{\partial}{\partial z} \ln(\Gamma(z))$, então

$$\int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{n+1-1} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^n \cdot \ln(t) \cdot e^{-t} dt &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial n} (t^n \cdot e^{-t}) dt = \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} dt = \frac{\partial}{\partial n} \Gamma(n+1) \\ &= \Gamma(n+1) \cdot \Psi(n+1) = n\Gamma(n) \left[\Psi(n) + \frac{1}{n} \right] \quad (\text{B.2})\end{aligned}$$

Com isso, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [W \ln(W)] &= \frac{\theta}{\Gamma(n)} \left[n\Gamma(n) \cdot \ln(\theta) + n\Gamma(n) \left(\Psi(n) + \frac{1}{n} \right) \right] = \theta \left[n \ln(\theta) + n\Psi(n) + 1 \right] \\ &= \theta \left[n \ln(\theta) + n\Psi(n+1) \right] \quad (\text{B.3})\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \alpha \partial \beta} \right] = \frac{n\beta \ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{n\beta \ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} (n\Psi(n) + 1) = -\frac{n}{\alpha} \left(\Psi(n) + \frac{1}{n} \right) = -\frac{n\Psi(n+1)}{\alpha}$$

Agora, derivando duas vezes ℓ_3 em relação a β e depois aplica o valor esperado, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \beta^2} &= -\frac{n}{\beta^2} - \frac{\ln(\alpha)^2}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{2 \ln(\alpha)}{\beta \alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (w_i) \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) - \frac{1}{\beta^2 \alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (w_i) \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^2 \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \beta^2} \right] &= \frac{n}{\beta^2} + \frac{\ln(\alpha)^2}{\alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n w_i \right] - \frac{2 \ln(\alpha)}{\beta \alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (w_i) \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) \right] + \frac{1}{\beta^2 \alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (w_i) \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^2 \right] \\ \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \beta^2} \right] &= \frac{n}{\beta^2} + n \ln(\alpha)^2 - \frac{2 \ln(\alpha)}{\beta \alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (w_i) \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) \right] + \frac{1}{\beta^2 \alpha^\beta} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (w_i) \ln \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^2 \right] \\ &\quad (\text{veja o Teorema 1})\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1, sabe-se que $W = \sum_{i=1}^n w_i \sim \text{Gama}(n, \theta)$, então

$$\mathbb{E} \left[W \ln(W)^2 \right] = \int_0^\infty w \ln(w)^2 \cdot \frac{w^{n-1}}{\theta^n \Gamma(n)} \cdot e^{-\frac{w}{\theta}} dw$$

Agora, fazendo $t = \frac{u}{\theta} \Rightarrow u = \theta t \Rightarrow du = \theta dt$. Quando $u \rightarrow v^\beta \Rightarrow t \rightarrow \frac{v^\beta}{\theta}$ e $u \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{w^n \ln(w)^2}{\theta^n \Gamma(n)} \cdot e^{-\frac{w}{\theta}} dw &= \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n \ln(\theta t)^2}{\theta^n \Gamma(n)} \cdot e^{-t} \theta dt \\ &= \frac{\theta}{\Gamma(n)} \left[\ln(\theta)^2 \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} dt + 2 \ln(\theta) \int_0^\infty t^n \cdot \ln(t) \cdot e^{-t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty t^n \cdot \ln(t)^2 \cdot e^{-t} dt \right]\end{aligned}$$

Sabendo que a função Poligama é definida como m-ésima derivada da função Digama, ou seja, $\Psi(m, z) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \Psi(z)$, então

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^n \cdot \ln(t)^2 \cdot e^{-t} dt &= \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial n^2} (t^n \cdot e^{-t}) dt = \frac{\partial^2}{\partial n^2} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} dt = \frac{\partial^2}{\partial n^2} \Gamma(n+1) \\ &= \Gamma(n+1) \cdot \Psi(n+1)^2 + \Gamma(n+1) \cdot \Psi(1, n+1)\end{aligned}$$

De acordo com as Eq. (B.1) e (B.2), e o resultado anterior, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[W \ln(W)^2 \right] &= \frac{\theta}{\Gamma(n)} \left[\ln(\theta)^2 n \Gamma(n) + 2 \ln(\theta) n \Gamma(n) \Psi(n+1) + n \Gamma(n) \Psi(n+1)^2 + n \Gamma(n) \Psi(1, n+1) \right] \\ &= \theta \left[n \ln(\theta)^2 + 2n \ln(\theta) \Psi(n+1) + n \Psi(n+1)^2 + n \Psi(1, n+1) \right]\end{aligned}$$

Pela Eq. (B.3) e o resultado anterior, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \ell_3}{\partial \beta^2} \right] &= \frac{n}{\beta^2} + n \ln(\alpha)^2 - \frac{2 \ln(\alpha)}{\beta} \left[n \ln(\theta) + n \Psi(n+1) \right] + \frac{1}{\beta^2} \left[n \ln(\theta)^2 + 2n \ln(\theta) \Psi(n+1) \right. \\ &\quad \left. + n \Psi(n+1)^2 + n \Psi(1, n+1) \right] \\ &= \frac{n}{\beta^2} \left[1 + \Psi(n+1)^2 + \Psi(1, n+1) \right]\end{aligned}$$

Usando as operações elementares sobre a matriz encontrada, obtém-se a inversa da matriz de informação de Fisher, ou seja, a matriz de covariância que é dada por:

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2 (\Psi(n+1)^2 + \Psi(1, n+1) + 1)}{n\beta^2 (\Psi(1, n+1) + 1)} & \frac{\alpha \Psi(n+1)}{n (\Psi(1, n+1) + 1)} \\ \frac{\alpha \Psi(n+1)}{n (\Psi(1, n+1) + 1)} & \frac{\beta^2}{n (\Psi(1, n+1) + 1)} \end{bmatrix}$$

□



APÊNDICE C – Análise gráfica para as fórmulas fechadas das matrizes de informação de Fisher e de covariância

As Figuras (13), (14), (15) e (16) analisa o comportamento das matrizes de informação de Fisher e de covariância. Esta análise é feita visando as funções Gama Incompleta e Exponencial presente nas fórmulas fechadas destas matrizes. Aqui esta sendo apresentado apenas uma análise visual das figuras, uma análise mais detalhada se encontra na [subseção 4.2.3.2](#).

Figura 13 – Comportamento da função $g(v_{i-1}) = \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$, em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo I.

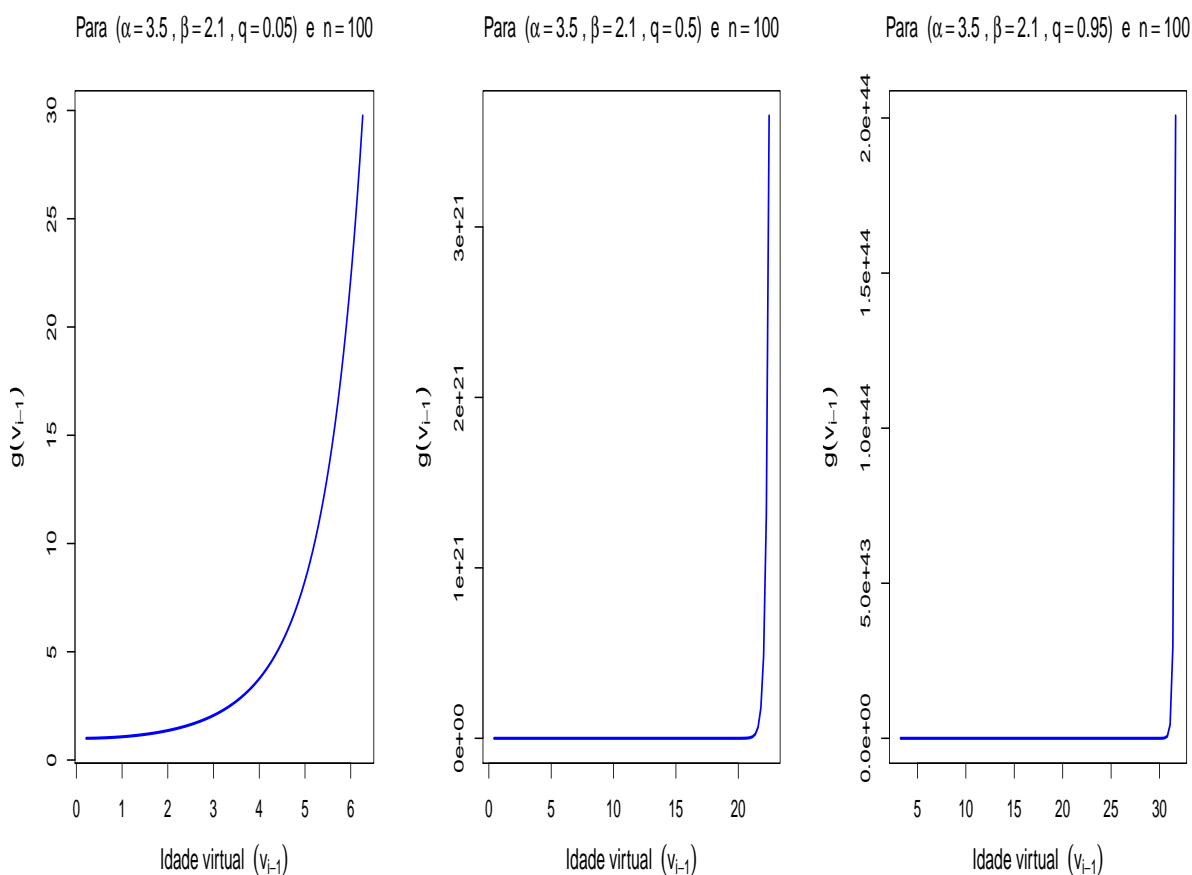


Figura 14 – Comportamento da função $g(v_{i-1}) = \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$ em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo II.

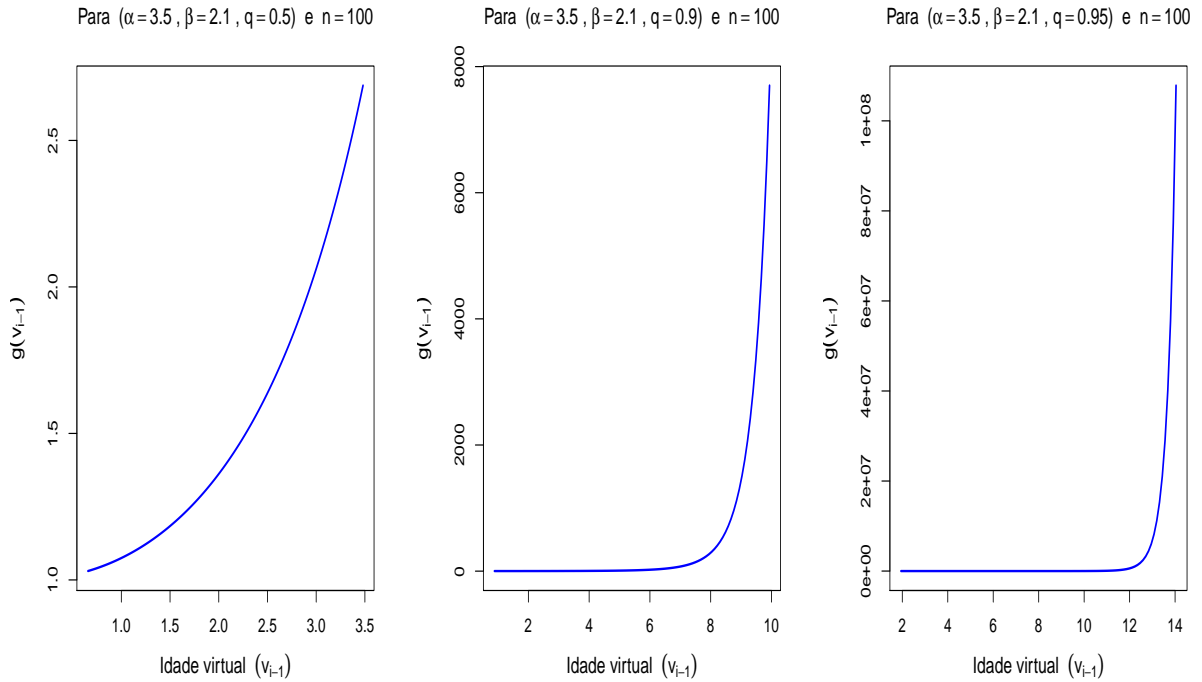


Figura 15 – Comportamento da função $h(v_{i-1}) = \Gamma\left(a, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right) \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$ em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo I e $a \rightarrow 0^+$.

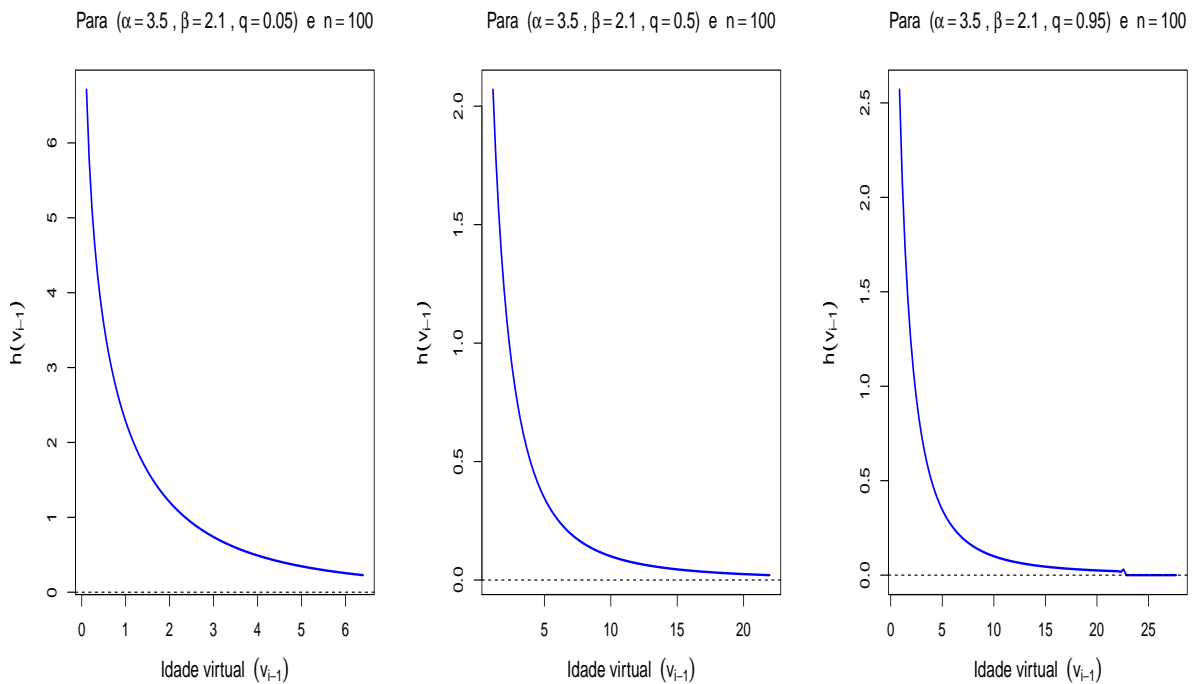
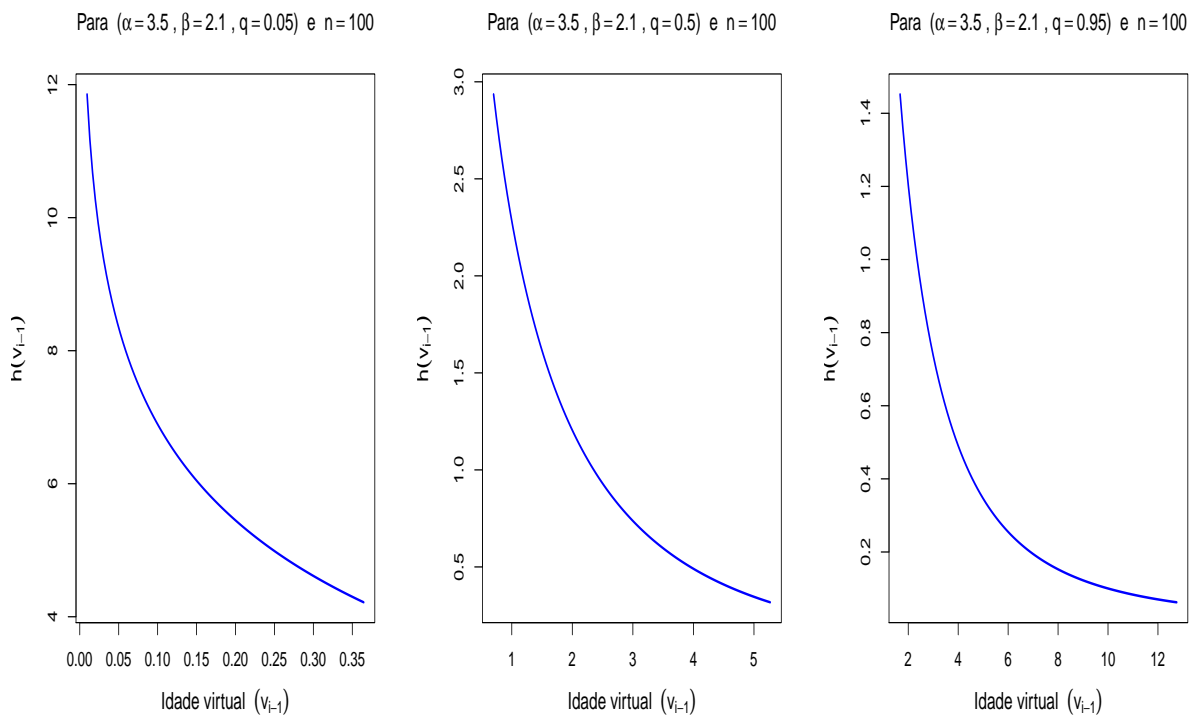


Figura 16 – Comportamento da função $h(v_{i-1}) = \Gamma\left(a, \frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right) \exp\left(\frac{v_{i-1}^\beta}{\alpha^\beta}\right)$ $i = 2, 3, \dots, n$ em relação à idade virtual (v_{i-1}) quando q cresce. Para o Kijima tipo II e $a \rightarrow 0^+$.



APÊNDICE D – Teste de derivada segunda para máximo e mínimo local da função de log-verossimilhança

As definições a seguir são condições suficientes para mostrar que o ponto:

* $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ é um máximo local para $\ell(\alpha, \beta)$; e

* $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$ é uma máximo local para $\ell(\alpha, \beta, q)$.

Definição 1. *Suponha que a função de duas variáveis $\ell(\alpha, \beta)$ tenha todas as derivadas parciais até segunda ordem e contínuas numa vizinhança de um ponto $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, no qual*

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0 \quad e \quad \frac{\partial \ell}{\partial \beta}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0$$

São definidas as seguintes matrizes:

$$H_1(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} \right] \quad e \quad H_2(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \end{bmatrix},$$

onde $H_1(\alpha, \beta)$ e $H_2(\alpha, \beta)$ são as matrizes Hessianas de $\ell(\alpha, \beta)$. Então, pode-se concluir que:

1. se $\det \{H_1(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} < 0$ e $\det \{H_2(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} > 0$, então existe um máximo local em $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$;
2. se $\det \{H_1(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} > 0$ e $\det \{H_2(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} > 0$, então existe um mínimo local em $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$;
3. se $\det \{H_2(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} < 0$, então $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ não será extremo local. Nesse caso, $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ será ponto de sela;
4. se $\det \{H_2(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} = 0$, nada se pode afirmar.

Definição 2. *Suponha que a função de três variáveis $\ell(\alpha, \beta, q)$ tenha todas as derivadas parciais até segunda ordem e contínuas numa vizinhança de um ponto $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$, no qual*

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q}) = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \beta}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q}) = 0 \quad e \quad \frac{\partial \ell}{\partial q}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q}) = 0.$$

São definidas as seguintes matrizes:

$$H_1(\alpha, \beta, q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} \end{bmatrix}, \quad H_2(\alpha, \beta, q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} \quad e \quad H_3(\alpha, \beta, q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial q} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial q} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial q \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial q \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial q^2} \end{bmatrix}$$

onde $H_1(\alpha, \beta, q)$, $H_2(\alpha, \beta, q)$ e $H_3(\alpha, \beta, q)$ são as matrizes Hessianas de $\ell(\alpha, \beta, q)$. Então, pode-se concluir que:

1. se $\det \{H_1(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})\} < 0$, $\det \{H_2(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})\} > 0$ e $\det \{H_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})\} < 0$, então existe um máximo local em $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$;
2. se $\det \{H_1(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})\} > 0$, $\det \{H_2(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})\} > 0$ e $\det \{H_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})\} > 0$, então existe um mínimo local em $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{q})$.

Como consequência do Teorema de Schwartz, quando a matriz Hessiana for contínua, ele será uma matriz simétrica.

Na Tabela 12 esta sendo feita o teste de derivada de segunda ordem para os dados da Tabela 8. A partir deste resulta pode-se verificar a equivalência entre as funções de log-verossimilhanças ℓ e ℓ_1 dadas pelas Eq. (2.10) e (4.13), respectivamente.

Tabela 12 – Teste de derivada de segunda ordem para verificar o máximo local nos modelos ajustados ao conjunto de dados referente ao sistema de transformadores (CRISTINO, 2008).

Modelos	Parâmetros			1ª derivadas			Matriz de 2ª derivadas		
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{q}	$\frac{\partial \ell_1}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial \ell_1}{\partial \beta}$	$\frac{\partial \ell_1}{\partial q}$	$\det(H_1)$	$\det(H_2)$	$\det(H_3)$
RP	179.770	1.588	0	0	0	0	-0.005 < 0	0.174 > 0	-
NHPP	227.142	1.089	1	0	0	0	-0.001 < 0	0.072 > 0	-
Kijima I	210.343	1.910	0.006	0	0	0	-0.005 < 0	0.100 > 0	-3924.909 < 0
Kijima II	273.109	2.336	0.381	0	0	0	-0.004 < 0	0.043 > 0	-1.468 < 0

$\det \iff$ determinante