

Sílvia Fernando Alves Xavier Júnior

**Multifractalidade e criticalidade auto-organizada da
precipitação pluvial em Piracicaba-SP, Brasil**

RECIFE-PE - JUN/2011



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Multifractalidade e criticalidade auto-organizada da precipitação pluvial em Piracicaba-SP, Brasil.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Modelagem Estatística e Computacional.

Orientadora: Profa. Dra. Tatijana Stošić

Co-orientador: Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Júnior

RECIFE-PE - JUN/2011.

Ficha Catalográfica

X3m Xavier Júnior, Silvio Fernando Alves
 Multifractalidade e criticalidade auto-organizada da precipitação pluvial
 em Piracicaba-SP, Brasil / Silvio Fernando Alves Xavier Júnior. -- 2011.
 59 f.: il.

 Orientador (a): Tatijana Stosic.
 Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) –
 Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística
 e Informática, Recife, 2011.
 Referências.

 1. Precipitação 2. Correlação de Longo Alcance 3. Multifractal
 Detrended Fluctuation Analysis 4. Self-Organized Criticality I. Stosic,
 Tatiana, Orientadora II. Título

CDD 574.018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

**Multifractalidade e criticalidade auto-organizada da precipitação pluvial em
Piracicaba-SP, Brasil**

Sílvia Fernando Alves Xavier Júnior

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 29/06/2011 pela Comissão Examinadora.

Orientadora:

Prof. Dra. Tatijana Stošić
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior
Universidade Federal Rural de Pernambuco
DEINFO-UFRPE

Prof. Dra. Cláudia Helena Dezotti
Universidade Federal Rural de Pernambuco
DEINFO-UFRPE

Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo
Universidade Federal Rural de Pernambuco
DF-UFRPE

Dedico à minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, porque dEle e por meio dEle e para Ele são todas as coisas.

Agradeço aos meus pais, Sílvio e Ana, por sempre acreditarem e me apoiarem nos momentos mais difíceis quando por muitas vezes a desistência era quase certa. A minha irmã Fernanda meu cunhado Marcos, a Dona Lucinha pelas assistências quando a probabilidade era quase zero. Agradeço a minha namorada Érika que esteve presente comigo na reta final deste trabalho.

Agradeço a Universidade Federal Rural de Pernambuco por proporcionar a possibilidade de um crescimento científico que outrora era quase inexistente.

Agradeço a minha orientadora, Professora Dra. Tatijana, pela extrema dedicação, orientação e pela disponibilidade de querer sempre melhorar o trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr Borko pelo grande auxílio na parte programacional. Aos professores Dr. Tiago Espíndola, Dr. Eufrázio Santos, Msc. Gabriel Rivas pelos livros emprestados e por sempre buscar auxiliar no crescimento do programa.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFRPE, especialmente a Professora Msc. Hebe Cavalcanti pela flexibilidade dos horários nas disciplinas como professor substituto. A Alcidézio, André e Paulo pelo grande apoio na secretaria de matemática.

Agradeço ao competente e dedicado Marco Santos pelo grande apoio, incentivo e auxílio desde as simples impressões de aulas a eterna busca para fazer o programa cada vez mais forte. Agradeço também ao ex-estagiário Styver e a Zuleide pela dedicação e pelo carinho com todos, sem distinção, que fizeram ou fazem parte do programa.

Agradeço aos meus amigos do Departamento de Matemática: Alan, Maxmiller, Everton, Tiago Dias, Gustavo, Ruy, Glayce, Hérika e em, especial Diego Vicente dos Anjos pelo companherismo, amizade e cumplicidade. Aos meus amigos do Departamento de Estatística: Marcelo, Iván, Mariana, Jeremias, Héilton, Lutemberg, Hemílio (pelo incentivo) e em especial, Josimar que juntamente comigo acreditou no desafio de “recomeçar”.

Agradeço aos meus amigos e companheiros dessa jornada na Biometria: Antônio Samuel, Dennis, o vô Djalma, Anderson, Milton, Guilherme pelo grande suporte e em especial, ao grande amigo Diego pelas muitas horas de estudo.

Agradeço a José Rodrigo pela constante ajuda, à prestativa Rosilda, Rita, Dani, Gabi, Clara & Sofia, Nyedja, Rodrigo, Jader, David, Lázaro, Dâmocles, Felipe, Erinaldo, Euzébio, Dayvson, Diogo e a Fábio pelo forte incentivo.

Agradeço as minhas amigas Déa, Thays, Sílvia e Patrícia que foram braços fortes quando mais precisei.

Agradeço aos meus amigos de infância, Luizinho, Henrique, Rafael, Thiago, Leandro, Adriano e Ryard por fazerem parte das derrotas e vitórias.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"Bem-aventurado o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire conhecimento; Porque é melhor a sua mercadoria do que artigos de prata, e maior o seu lucro que o ouro mais fino. Mais preciosa é do que os rubis, e tudo o que mais possas desejar não se pode comparar a ela."

Provérbios 3:13-15

"Quem é como o sábio? e quem sabe a interpretação das coisas? A sabedoria do homem faz brilhar o seu rosto, e com ela a dureza do seu rosto se transforma."

Eclesiastes 8:1

Resumo

A precipitação pode ser entendida como um produto final de processos atmosféricos complexos, os quais variam no tempo e espaço, e pode ser considerada um dos mais importantes fatores dominante das características meteorológicas-climáticas de uma determinada área investigada. Neste trabalho, verificamos se a dinâmica da chuva em Piracicaba, São Paulo - Brasil é gerada por um processo multifractal e/ou pertence as classes dos sistemas com propriedade da criticalidade auto-organizada. Para detectar a correlação de longo alcance e o comportamento multifractal, aplicamos o método MF-DFA que sistematicamente detecta não-estacionariedades e tendências nos dados para todas escalas de tempo. Calculamos o expoente generalizado de Hurst, $h(q)$, e o expoente de Renyi, $\tau(q)$. Os resultados mostraram a existência de correlações de longo alcance, caracterizadas por uma hierarquia dos expoentes de escala, consequência de um processo estocástico multifractal. Para as escalas menores, aproximadamente 8 meses, a dinâmica de chuva é gerada por um processo multifractal (o expoente de Hurst generalizado, $h(q)$, diminui com o aumento de ordem q) significando que pode ser modelada utilizando os modelos de cascata. Para as escalas maiores, o valor de $h(q)$ está entre 0,35-0,55 o que indica a multifractalidade mais fraca. A hipótese de que a precipitação pode ser um caso de Self-Organized Criticality é avaliada. Analisamos dois eventos: a quantidade diária de chuva e eventos de seca (dias sem chuva), ambos são fenômenos meteorológicos os quais são fortemente ligados à precipitação. Verifica-se que a distribuição da quantidade diária de chuva exibe dois regimes de escala distintos para pequenas e grandes quantidades. O valor da razão desses expoentes encontrados confirmam os resultados que foram obtidos nas regiões com climas tropical e subtropical. No entanto, para a distribuição de eventos de seca encontramos dois expoentes de escala distintos com valores bem mais próximos comparados com os observados na quantidade diária de chuva. As propriedades multifractais e criticalidade auto-organizada deverão ser incorporados em modelos teóricos e simulações computacionais da dinâmica das chuvas e fenômenos relacionados.

Palavras-chave: precipitação; correlação de longo alcance; Multifractal Detrended Fluctuation Analysis; Self-Organized Criticality.

Abstract

Rainfall can be understood as an end product of a number of complex atmospheric processes, which vary in space and time, and it may be considered one of most important dominant factor of the meteorological-climatic features of an specified investigated area. In this study, we observed if the dynamics of rain in Piracicaba, São Paulo - Brazil is generated by a multifractal process and / or belongs to classes of Self-Organized Criticality systems. To detect long-term correlations and multifractal behavior, we apply MF-DFA method that systematically detect nonstationarities and overcome trends in the data at all timescales. We calculated the generalized Hurst exponent, $h(q)$, and Renyi exponent, $\tau(q)$. The results showed the existence of power-law long-term correlations which are described by a hierarchy of scaling exponents, that is the consequence of an underlying multifractal stochastic process. For smaller scales of about 8 months, the dynamics of rain is generated by a multifractal process (the generalized Hurst exponent, $h(q)$, decreases with the increase in order $\tau(q)$ meaning it can be modeled using the cascade models. For larger scales, the value of $h(q)$ is between 0.35 – 0.55 indicating a weaker multifractality. The hypothesis that rainfall may be a case of Self-Organized Criticality is assessed. We analyze two events: the daily amount of rain and drought events (days without rain), both are weather phenomena that are strongly linked to rainfall. It appears that the distribution of the daily amount of rain displays two different scaling regimes for small and large intensities. The value of the ratio of these exponents confirms the results that were obtained in regions with tropical and sub-tropical climates. However, for the distribution of drought events we find two distinct scaling exponents with values that are closer than those observed in the daily amount of rain. The multifractal properties and self-organized criticality should be incorporated into theoretical models and computer simulations of the dynamics of rainfall and related phenomena.

Key words: rainfall; long-term correlations; Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, Self-Organized Criticality.

Lista de Figuras

1	Série Temporal diária da precipitação pluvial em Piracicaba-SP, Brasil. . .	p. 16
2	Um evento de chuva é representado pelos quadrados escuros. Um evento de seca é representado por uma sequência de quadrados brancos. As setas indicam t_{0i} e t_{fi} para cada evento de chuva i	p. 29
3	Histograma das médias diárias da precipitação no período de 1917-2009 em Piracicaba-SP.	p. 31
4	Diagnóstico da série temporal das médias diárias da precipitação no período de 1917-2009, Piracicaba-SP	p. 32
5	Gráfico de $\log[F_q(s)]$ versus $\log(s)$	p. 33
6	Gráfico de $\log[F_q(s)]$ versus $\log(s)$ para $s < s_0$	p. 34
7	Gráfico de q versus $h(q)$	p. 35
8	Gráfico de q versus $t(q)$	p. 36
9	Gráfico Log-log da função de distribuição $N(r)$ para a quantidade de chuva diária r para estação em Piracicaba.	p. 37
10	Gráfico Log-log da função de distribuição $N(I)$ para intervalos contínuos I sem precipitação.	p. 38

Lista de Tabelas

- 1 Estatísticas descritivas da série temporal das médias diárias da precipitação (em **mm**) em Piracicaba - SP p.31

Sumário

1	INTRODUÇÃO	p. 1
2	REVISÃO DE LITERATURA	p. 4
2.1	Conhecimento Climático	p. 4
2.2	Climatologia e Meteorologia	p. 5
2.3	Principais Elementos Climáticos	p. 6
2.4	Principais Fatores Climáticos	p. 8
2.5	Classificação Climática	p. 10
2.5.1	A classificação climática de Köppen	p. 10
2.5.2	A classificação climática de Strahler	p. 10
2.6	A Precipitação Pluvial	p. 11
2.6.1	Tipos de Precipitação	p. 12
2.6.2	A Precipitação Pluvial no Brasil	p. 12
2.7	Série temporal e correlação de longo alcance	p. 13
3	DADOS E METODOLOGIAS	p. 16
3.1	Dados	p. 16
3.2	Metodologias	p. 17
3.2.1	Análise Multifractal das Séries Temporais	p. 17
3.2.2	Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)	p. 18
3.2.2.1	O expoente α de Lipschitz-Hölder	p. 21
3.2.2.2	O expoente $\tau(q)$ e a curva $f(\alpha)$	p. 22
3.2.3	Self-Organized Criticality (SOC)	p. 24

3.2.3.1	Distribuição Hiperbólica	p. 26
3.2.4	Self-Organized Criticality e eventos de precipitação	p. 27
4	ANÁLISE DOS RESULTADOS	p. 31
4.1	Preliminares	p. 31
4.2	Análise Multifractal	p. 32
4.3	Análise SOC	p. 37
5	CONCLUSÃO	p. 40
	Referências	p. 43

1 INTRODUÇÃO

A variabilidade climática pode afetar de forma importante a vida econômica e social da população em geral, na geração de energia, nas atividades agrícolas, na indústria turística e de forma indireta, em todo setor produtivo. Um dos fenômenos físicos decorrentes da variabilidade climática é a variabilidade da precipitação pluvial, um importante fator no controle do ciclo hidrológico e uma das variáveis climáticas que maior influência exercem na qualidade do meio ambiente.

As quantidades relativas de precipitação pluvial (volume), seu regime sazonal ou diário (distribuição temporal) e as intensidades das chuvas individuais (volume/duração) são algumas das características que afetam direta ou indiretamente a população, a economia e o meio ambiente (BRITTO; BARLETA; MENDONÇA, 2007).

O clima em determinada região caracteriza-se por interações dos sistemas meteorológicos com elementos da paisagem geográfica, como o relevo, latitude, temperatura, maritimidade, continentalidade, etc. Dessa forma, a precipitação é condicionada a dinâmica atmosférica em relação ao relevo que, por meio de sua compartimentação, promove a distribuição espacial da chuva.

A distribuição e a variabilidade das chuvas no Brasil estão associadas à atuação e a sazonalidade dos sistemas convectivos de macro e mesoescala e, em especial da Frente Polar Atlântica (FPA). Isso explica determinada diferença entre os regimes pluviométricos encontrados que se expressam na variabilidade climática do país e dos tipos chuvosos, semi-áridos, tropicais e subtropicais (MENDONÇA, 2007; MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

Nas duas últimas décadas, a teoria multifractal (FEDER, 1988; GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008) inicialmente desenvolvida para modelar as flutuações de velocidade em fluxo turbulento (BENZI *et al.*, 1984) foi intensamente utilizada para descrever e modelar a distribuição temporal e espacial das chuvas (SCHERTZER; LOVEJOY, 1987; GUPTA; WAYMIRE, 1993; OLSSON; NEMCZYNOWICZ, 1996). Permite a transformação dos dados de

uma escala para outra e, dessa forma, uma ampla avaliação da dinâmica da precipitação, o qual é crucial para o entendimento e modelagem de vários fenômenos hidrológicos tais como: inundações, secas, escoamento, erosão do solo, deslocamento da poluição, infiltração da água, etc.

O conhecimento em alta-resolução da variabilidade espacial e temporal da variação da precipitação em microbacias e áreas urbanas é devidamente necessário para a gestão eficiente dos recursos hídricos e bio-ambientais, uso da terra e da agricultura, que é a base dos esforços mundiais buscando uma eficácia no desenvolvimento sustentável e proteção ambiental (BERNE *et al.*, 2004; MORIASI; STARKS, 2010). Séries de precipitação históricas globais obtidas por medições da chuva utilizando metodologias tradicionais são, em sua maioria das vezes, disponíveis em escalas de tempo “grosseiras” (resoluções diárias, por exemplo).

Os campos de chuva espacial que são fornecidos por modelos de previsão numérica de tempo e sensoriamento remoto (radares e satélites) também são fornecidos em resoluções de baixa qualidade, isto é, inadequadas para a maioria das aplicações hidrológicas. O acaso do conjunto de dados de chuva de alta-resolução, devido a sua aquisição de maneira onerosa e demorada, pode ser superado por: i) desenvolvimento de modelos de redução de escala eficientes que produzem dados sintéticos com resolução temporal e espacial exigida com base nas observações, ii) pela redução de escala da produção de modelos climáticos regionais e de modelos de circulação global.

Os métodos multifractais também são adequados para análise de extremos, proporcionando ferramentas práticas para avaliar a sua probabilidade de ocorrência (DESUROSNE; SCHMITT, 1993; DOUGLAS; BARROS, 2003; VEZENIANO; LANGOUSIS; FURCOLO, 2002). Como consequência do método multifractal em cascata numa ampla faixa de escala, o processo estocástico subjacente que pode produzir tanto eventos de baixa magnitude como eventos de grande magnitude e distribuições de probabilidade da intensidade da chuva deverão ter caudas algébricas ou intermitência hiperbólica (BARTOLOZI, 2007; PASTOR-SATORRAS, 1997).

A existência de distribuições invariantes de escala em leis de potência é a assinatura do comportamento de Self-Organized Criticality (SOC); a tendência dos sistemas em desequilíbrio impulsionada pela entrada constante de energia de forma lenta, para se organizarem em estado crítico, caracterizada assim pela liberação de energia em sistemas atípicos (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987). Vários resultados empíricos baseados em análises indicativas e dados de sensoriamento remoto com diferentes resoluções temporais revelam a natureza

da criticalidade auto-organizada das chuvas (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998; GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008; TELESCA *et al.*, 2004; PETERS *et al.*, 2010). Apesar de extensos estudos terem sido feitos com dados de precipitação no hemisfério norte, existem poucos resultados com dados no hemisfério sul, especialmente no Brasil (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998; GUNTNER *et al.*, 2001; DEIDDA; BADAS; PIGA, 2006), que geograficamente se estende sobre o continente e, como consequência possui grande variabilidade climática, topográfica, de vegetações e outras condições ambientais que incluem fenômenos de precipitação que relacionam tanto as secas severas no Nordeste como as inundações na região Sul.

O objetivo desse trabalho é verificar se a dinâmica da chuva em Piracicaba, São Paulo - Brasil, é gerada por um processo multifractal e/ou pertence a classe de sistemas com propriedade da criticalidade auto-organizada. Usaremos o banco de dados de precipitação obtidos da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, ESALQ/USP, para gerar as séries temporais diárias, disponível em: <<http://ce.esalq.usp.br/descar.html>>. Aplicaremos o método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA) em séries temporais diárias de precipitação em Piracicaba durante o período 1917 – 2009 para verificar se a dinâmica da chuva é gerada por um processo multifractal. O propósito é contribuir para um melhor entendimento da variabilidade da precipitação neste local e providenciar os resultados empíricos que podem servir como a base para desenvolvimento e avaliação dos modelos teóricos. Verificaremos a consistência dos nossos resultados com os encontrados em estudos anteriores para outras localidades. Concomitantemente, também será mostrado que distribuição da frequência da precipitação, a intensidade, segue leis de potência apoiando a hipótese de que a teoria SOC poderia ser apropriadamente utilizada para descrever a complexidade da dinâmica pluviométrica.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, revisamos sobre os princípios do conhecimento climático, climatologia e meteorologia, classificação climática e os principais aspectos da precipitação. Incluímos também nesta revisão, o conceito de série temporal. No Capítulo 3, apresentamos a fonte de pesquisa dos nossos dados e fazemos uma descrição completa do algoritmo MF-DFA e dos sistemas SOC. No Capítulo 4, exibimos todos os nossos resultados, e por fim, no Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Conhecimento Climático

De acordo com (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009), desvendar a dinâmica dos fenômenos naturais, dentre eles, o comportamento da atmosfera, foi necessário para que os grupos sociais superassem a condição de meros sujeitos às intempéries naturais e atingissem não somente a compreensão do funcionamento de alguns fenômenos, mas também a condição de utilizá-los e de manipulá-los em diferentes escalas.

Nos primórdios da humanidade, o conhecimento sobre a atmosfera era muito pobre, assim como o era, de maneira geral, todo o conhecimento humano da realidade, devido à fraca capacidade de abstração do homem naquela época. Por milhares de anos, o raio, o trovão, a chuva torrencial, a intensa seca, etc. foram reverenciados como entidades mitológicas ou a ela ligados.

Os gregos foram os primeiros a produzir e registrar de forma mais direta suas reflexões sobre o comportamento da atmosfera, decorrentes das observações feitas acerca da diferenciação dos lugares e em navegações pelo mar Mediterrâneo. Com o domínio do mundo grego pelo Império Romano ocasionou-se uma queda considerável da produção intelectual no período, uma vez que, os romanos estavam mais preocupados com o expansionismo do Império que com o aprofundamento das reflexões sobre o comportamento dos fenômenos da natureza.

Foi a partir de movimentos como o Renascimento que as preocupações com a atmosfera foram retomadas, no sentido de desvendar seu funcionamento. Alguns dos resultados daquelas preocupações podem ser identificados na invenção do termômetro, por Galileu Galilei, em 1593, e na invenção do barômetro, por Torricelli, em 1643 (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009; CAMUFFO, 2002).

O desenvolvimento técnico-científico da sociedade no período pós-guerra permitiu a invenção de inúmeros aparelhos para a mensuração dos elementos atmosféricos com maior

confiabilidade. O lançamento de satélites meteorológicos, a partir da década de 1960, permitiu a análise e o monitoramento minuto a minuto das condições atmosféricas em escala regional e planetária.

Segundo (AYOADE, 2010), com a fundação da Organização Meteorológica Mundial (OMM), em 1950, sequenciando à Organização Meteorológica Internacional (OMI), de 1873, foi estabelecida uma rede mundial de informações meteorológicas que vem, desde então, desenvolvendo tanto pesquisas quanto o monitoramento atmosférico contínuo da Terra.

2.2 Climatologia e Meteorologia

A Meteorologia trata da dimensão física da atmosfera. Em sua especificidade, ela aborda, de maneira individualizada, fenômenos meteorológicos, como raios, trovões, descargas elétricas, nuvens, composição físico-químico do ar, previsão do tempo, etc. Dado à sua característica de ciência física, a Meteorologia trabalha também com a concepção dos instrumentos para a mensuração dos elementos e fenômenos atmosféricos, o que possibilita o registro desses fenômenos e forma uma fonte de dados de fundamental importância para o desenvolvimento dos estudos de Climatologia (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

De acordo com (PÉDELABORDE, 1970), a meteorologia apresenta dois domínios de pesquisa: A meteorologia tradicional e dinâmica. A tradicional, também chamada de meteorologia-analítica separativa, estuda os elementos atmosféricos separadamente. Já a segunda considera, em conjunto, todos os estágios do meio atmosférico (tempo e massa de ar)

A respeito desses dois domínios da Meteorologia, (MONTEIRO, 1971) chama a atenção para a “necessidade de se analisar atentamente os conceitos básicos a partir da meteorologia que se aceita como válida e dá caráter normativo as pesquisas”.

Verifica-se em (PÉDELABORDE, 1970; MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009) que o conceito de clima elaborado por Julius Hann, no fim do século XIX, enquadra-se no conceito clássico de clima, isto é, “o conjunto dos fenômenos meteorológicos que caracterizam a condição média da atmosfera sobre cada lugar da Terra”. Por outro lado, o clima é a síntese do tempo num dado lugar durante o período de 30-35 anos. O clima, portanto, refere-se às características da atmosfera, inferidas de observações contínuas durante um longo período de tempo (AYOADE, 2010).

O autor (SORRE, 1957), trata o clima como ambiente atmosférico constituído pela série de estados da atmosfera de um determinado lugar, em sua sucessão habitual. Para (JARDIM, 2002), clima é a expressão da relação entre os controles da superfície e os atributos atmosféricos, aparecendo como uma das múltiplas formas de organização espacial e, ao mesmo tempo, como parte de uma realidade maior. Na mesma linha de raciocínio, (SANTOS, 2002) considera que o clima caracteriza-se como o “insumidor” de energia, isto é, é responsável pelo fornecimento de energia ao sistema. Desta maneira, o clima é visto como um elemento constituído de variáveis dependentes ou extensivas, nas quais o homem, apoiado com a tecnologia pode intervir.

A climatologia constitui o estudo científico do clima. Ela trata dos padrões de comportamento da atmosfera em suas interações com as atividades humanas e com a superfície do planeta durante um longo período de tempo. Esse conceito revela a ligação da Climatologia com a abordagem geográfica do espaço terrestre, pois ela se caracteriza em um campo do conhecimento no qual as relações entre a sociedade e a natureza configuram-se como pressupostos básicos para a compreensão das diferentes paisagens do planeta e contribui para uma intervenção mais consciente na organização do espaço (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

Para (AYOADE, 2010) existe uma considerável semelhança no que se refere ao conteúdo da climatologia e meteorologia. O meteorologista e o climatólogo, contudo, diferem de forma significativa em sua metodologia. Enquanto o meteorologista emprega as leis da física clássica e as técnicas matemáticas em seus estudos de processos atmosféricos, o climatólogo utiliza as técnicas estatísticas quando retira informações a respeito do clima a partir das informações disponíveis a respeito do tempo. De maneira geral, o meteorologista estuda o tempo, enquanto o climatólogo estuda o clima. No entanto, a climatologia está baseada na meteorologia, que por sua vez, está baseada nos princípios da Física e da Matemática. Portanto, há uma estreita relação entre meteorologia e climatologia.

2.3 Principais Elementos Climáticos

Os elementos climáticos são definidos pelos atributos físicos que representam as propriedades da atmosfera geográfica de um dado local. Os mais comumente utilizados para caracterizar a atmosfera geográfica são a temperatura, a umidade e a pressão, que, influenciados pela diversidade geográfica, manifestam-se por meio de precipitação, vento, nebulosidade, ondas de calor e frio, entre outros (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

Para (TORRES; MACHADO, 2008) os elementos do clima são seus componentes principais, ou seja, aqueles que se conjugam para formar o tempo atmosférico e o clima propriamente dito. Estes elementos influenciam de maneira individual e conjuntamente o clima de uma região.

- Temperatura

A temperatura é um dos elementos mais discutidos no tempo atmosférico. Pode ser definida em termos dos movimentos das moléculas, de modo que quanto mais rápido o deslocamento mais elevado será a temperatura. Mais comumente, ela é definida em termos relativos tomando-se por base o grau de calor que um corpo possui (AYOADE, 2010).

- Umidade

A presença de vapor d'água na atmosfera é tratada como umidade. Os termos pressão de vapor, umidade absoluta, umidade específica, razão de mistura e umidade relativa são variações na forma de abordar a presença de vapor (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009). Segundo (AYOADE, 2010), o vapor d'água é de grande significado por diversas razões, de modo que os meteorologistas e climatólogos estão interessados em sua quantidade e em sua distribuição no tempo e no espaço.

- Pressão Atmosférica

Um ponto qualquer dentro da superfície se sujeita a uma pressão correspondente ao peso de ar que o sobrepõe: a pressão atmosférica. A variação da temperatura pode implicar diretamente numa variação na pressão atmosférica, uma vez que, o calor dilata o ar, tornando-o assim mais leve, determinando uma menor pressão do ar sobre a superfície.

- Precipitação

Para (AYOADE, 2010) no estudo da meteorologia, o termo "precipitação" é usado para qualquer disposição em forma líquida ou sólida derivada da atmosfera. Consequentemente, o termo refere-se às várias formas líquidas e congeladas de água, como a chuva, neve, granizo, orvalho, geada e nevoeiro. Entretanto, somente a chuva e a neve contribuem significativamente para com os totais de precipitação e, nos trópicos, o termo precipitação pluvial é sinônimo de precipitação, pois a neve inexistente, exceto em algumas montanhas altas como o Kilimanjaro, na África Oriental e nos Andes, na América do Sul.

- Vento

Ao processo de deslocamento do ar de uma área de alta pressão para outra de baixa pressão, dá-se o nome de advecção, que tem como resultado a geração do vento (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

- Nebulosidade

O conjunto de nuvens que se formam no céu de um dado lugar dá-se o nome de nebulosidade. Ela atua como uma barreira à penetração da radiação solar e à perda da radiação terrestre, uma vez que parte desta é refletida para o espaço devido ao albedo das nuvens, e parte é por elas absorvida. A nebulosidade atua de forma significativa na diminuição das amplitudes térmicas diárias, e sua ação bloqueadora à perda das radiações de ondas longas na Troposfera produz uma certa uniformização na distribuição da temperatura do ar (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

2.4 Principais Fatores Climáticos

A grande variação espacial e temporal das manifestações dos elementos climáticos ou fatores climáticos deve-se à ação de controles climáticos, também conhecidos como fatores do clima. A estes se juntam os aspectos dinâmicos do meio oceânico e atmosférico, como correntes oceânicas, massas de ar e frentes, que, atuando integradamente, irão qualificar os distintos climas da Terra.

Os fatores climáticos correspondem àquelas características geográficas estáticas diversificadoras da paisagem, como latitude, altitude, relevo, vegetação, continentalidade e maritimidade e atividades humanas (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

Segundo (TORRES; MACHADO, 2008), os fatores do clima de forma bastante significativa trazem alterações no clima e/ou seus elementos. Os fatores climáticos são aqueles que produzem alterações e interferências diretas e/ou indiretas nos elementos climáticos e nos tipos climáticos. Esses fatores afetam diretamente os elementos climáticos, e podem fazê-lo tanto de maneira individual quanto conjuntamente.

- Latitude

É um importante fator climático, pois retrata a ação de alguns condicionantes astronômicos na quantidade de energia que entra no Sistema Superfície-Atmosfera. A lati-

tude do lugar, como também a época do ano, define o ângulo com que os raios do Sol irão incidir sobre a superfície daquele lugar.

- Altitude

A altitude associada ao relevo é um dos fatores que diversificam os padrões climáticos do globo. Se considerarmos dois lugares de mesma latitude, porém, com altitudes diferentes, aquele que estiver mais elevado terá a sua temperatura diminuída na razão média de 0,6°C para 100 m de diferença do ponto mais baixo.

- Relevo

Apresenta três atributos importantes na definição dos climas: posição, orientação de suas vertentes e declividade. A posição do relevo favorece ou dificulta os fluxos de calor e umidade entre áreas contínuas. Nas latitudes extra-tropicais a orientação do relevo em relação ao Sol irá definir as vertentes mais aquecidas e mais secas, e aquelas mais frias e mais úmidas. As regiões que possuem sua superfície ondulada terão o fator declividade modificando a relação superfície/radiação incidente.

- Vegetação

Desempenha um papel regulador de umidade e de temperatura extremamente importante, uma vez que impede a incidência da radiação solar na superfície, amenizando a temperatura.

- Maritimidade

Os mares e os oceanos são fundamentais na ação reguladora da temperatura e da umidade dos climas. Controlam a distribuição de energia entre oceanos e continentes. Ao contribuírem para a troca de energia entre pontos distantes da Terra, as correntes oceânicas interagem com a dinâmica das massas de ar, definindo áreas secas e áreas chuvosas.

- Continentalidade

O efeito da continentalidade sobre os climas manifesta-se especialmente na temperatura e na umidade relativa. A continentalidade de um determinado lugar é dada pelo seu distanciamento dos oceanos e mares, que deixam de exercer de forma direta as ações apresentadas anteriormente.

2.5 Classificação Climática

Para (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009) os esquemas de classificação climática procuram incluir, de maneira geral, o maior número de elementos, objetivando assim dividir os diferentes climas em grupos claramente definidos.

Os principais elementos do clima e a diversidade de suas manifestações espaciais (temperatura, precipitação, radiação, vento) tem servido de base para o estabelecimento de classificações climáticas.

2.5.1 A classificação climática de Köppen

A classificação climática baseada na obra de Wladimir Köppen, em meados de 1900, continua a ser amplamente mais utilizada ao longo de um século depois (ESSENWANGER, 2001) apresentou uma revisão abrangente da classificação climática de Köppen. O período de maior atividade foi de meados do século XIX até a década de 1950.

É reconhecido como o primeiro a classificar os climas, levando em conta, simultaneamente, a temperatura e a precipitação, porém, fixando limites ajustados à distribuição dos tipos de vegetação. O modelo de Köppen é simples e compreende um conjunto de letras maiúsculas e minúsculas para designar os grandes grupos climáticos, os subgrupos ou ainda subdivisões que indicam características especiais sazonais (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

2.5.2 A classificação climática de Strahler

Para (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009; AYOADE, 2010) Arthur Strahler propôs a classificação dos climas do mundo baseando-se nos controles climáticos (centros de ação, massa de ar e processos frontológicos) e nas características das precipitações sobre os lugares. Dessa maneira, seu esquema classificou os climas do planeta em três tipos principais: os climas das latitudes baixas, das latitudes médias e o das latitudes altas.

Dentro desses três tipos principais, existem 14 subdivisões distintas de regiões climáticas. A classificação de Strahler foi assim divulgada:

1. Climas das latitudes baixas (controlados pelas massas de ar equatoriais e tropicais)
 - a) Equatorial úmido

- b) Litorâneo com ventos alísios
 - c) Desértico tropical e de estepe
 - d) Desértico da costa ocidental
 - e) Tropical seco-úmido
2. Climas das latitudes médias (controlados pelas massas de ar tropicais e massas de ar polares)
- a) Subtropical úmido
 - b) Marítimo da costa ocidental
 - c) Mediterrâneo
 - d) Desértico e de estepe de latitude média
 - e) Continental úmido
3. Climas das latitudes altas (controlados pelas massas de ar polares)
- a) Continental subártico
 - b) Marítimo subártico
 - c) Tundra
 - d) Calota de gelo
 - e) Climas de terras altas (exemplo: cadeias de montanha e altiplanos)

2.6 A Precipitação Pluvial

A precipitação é o resultado de diversos processos atmosféricos complexos, nem sempre fáceis de entender, o qual varia ao redor do mundo. Os regimes de precipitação variam de acordo com a condição climática tal que uma área pode ser classificada dependendo da quantidade de precipitação que ela recebe. Áreas chuvosas equatoriais recebem mais de 2000 mm de precipitação anual, enquanto áreas desertas, em latitudes médias, acumulam menos de 100 mm. Regiões semi-áridas e úmidas estão alocadas entre esses extremos, respectivamente (STRAHLER; STRAHLER, 1978).

A precipitação é um produto final de um complexo número de processos atmosféricos, em que ambos variam em tempo e espaço, e pode ser considerado como um fator dominante das características meteorológicas-climáticas da área investigada. A extrema complexidade dos processos atmosféricos resulta da ligação de vários processos não lineares com diferentes escalas temporais e espaciais (TELESCA *et al.*, 2004).

2.6.1 Tipos de Precipitação

É convencional classificar a precipitação em três tipos principais, tomando-se por base a maneira da elevação de ar que tenha dado origem a precipitação. Os três tipos são:

Precipitação do tipo convectivo - Este tipo de Precipitação é causado pelo movimento de uma massa de ar ascendente que é mais quente do que o meio ambiente; frequentemente acompanhada de trovões. A precipitação do tipo convectivo é usualmente mais intensa do que a precipitação ciclônica ou orográfica, embora seja normalmente mais curta quanto a duração.

Precipitação ciclônica - É causada por um movimento vertical do ar em grande escala, associado com sistemas de baixa pressão como as depressões. A precipitação é moderadamente intensa, contínua e afeta áreas muito extensas à medida que a depressão se desloca. A precipitação ciclônica não é tão intensa como a precipitação do tipo convectivo, porém tem uma duração mais prolongada. Frequentemente, a precipitação ciclônica dura de 6 a 12 horas.

Precipitação orográfica - Usualmente definida como aquela que é causada inteira ou principalmente pela elevação do ar úmido sobre terreno elevado. Contudo, as montanhas, sozinhas, não são muito eficientes para fazer com que a umidade seja removida da massa de ar que se desloca por elas. Todavia, as áreas montanhosas recebem bem mais precipitação do que os terrenos baixos adjacentes. O grau de influência das montanhas sobre a precipitação depende de seu tamanho e de seu alinhamento relativo aos ventos portadores de chuvas (AYOADE, 2010).

2.6.2 A Precipitação Pluvial no Brasil

A partir de (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009), a distribuição e a variabilidade da precipitação pluvial, ou simplesmente, precipitação estão associadas à atuação e a sazonalidade dos sistemas convectivos de macro e mesoescala e, em especial, da *Frente Polar Atlântica* (FPA). Dessa forma, pode-se explicar as diferenças dos regimes pluviométricos encontrados e que se expressam na diversidade climática do Brasil, com tipos chuvosos, semi-áridos, tropicais e subtropicais.

A distribuição espacial dos totais médios anuais de chuva no Brasil coloca em foco os dois grandes contrastes pluviométricos do país: a Região Norte, com as mais elevadas médias (superiores a 2800 mm) centradas na Amazônia Ocidental e em parte da planície da foz do rio Amazonas, e o sertão nordestino, com valores médios anuais entre 1200

mm e menos de 125 mm, pois as massas de ar MEC (Massa Equatorial Continental), MEAs (Massa Equatorial do Atlântico Sul), MTA (Massa Tropical Atlântica) e MPA (Massa Polar Atlântica) chegam com umidade insuficiente para produzir chuvas abundantes, dentre outros fatores.

Como grande parte do vasto território brasileiro está inserido na faixa tropical-equatorial do globo, o que confere assim uma distribuição temporal das chuvas marcadas pela sazonalidade, bem como por regimes pluviométricos diversificados. Nos quentes verões tropicais, a maior parcela do território fica à mercê dos mais elevados índices de chuva. No inverno, de forma contrária, em grande parte do País, esses índices ficam muito reduzidos.

Na região Sudeste, as chuvas de verão são provocadas preferencialmente pela atuação da FPA (Frente Polar Atlântica), que em suas incursões, nessa época mais úmida e dinamizada, com a presença frequente de calhas induzidas, geradoras de chuvas, recebe oposição da massa tropical atlântica (MTA).

Para (NIMER, 1989), a MEA (Massa Equatorial Atlântica) é composta de duas correntes, uma inferior fresca e úmida carregada de umidade oriunda da evaporação do oceano, e outra superior quente e seca, de direção idêntica, mas separada por inversão de temperatura, a qual não permite o fluxo vertical do vapor. Entretanto, no litoral do Brasil, a descontinuidade térmica se eleva e enfraquece bruscamente, permitindo a ascensão conjunta de ambas as camadas dos ventos alísios. Desse modo, a massa de ar torna-se instável, causando as fortes chuvas equatoriais e as da costa leste do continente.

Na região Sul e no setor meridional de São Paulo e do Mato Grosso do Sul, os índices pluviométricos médios sazonais são superiores a 251 mm mensais, como consequência da atuação da FPA ao longo de todo ano. As frentes que causam chuvas e ventos fortes na Região Sul também estão associados aos ciclones extratropicais e aos vórtices ciclônicos em altos níveis. Este último sistema também atua no Nordeste durante os meses de verão (MENDONÇA; OLIVEIRA; MORESCO, 2009).

2.7 Série temporal e correlação de longo alcance

De acordo com (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994), uma série temporal é um conjunto de observações geradas sequencialmente no tempo, de maneira geral equidistantes, tais como $X_t = \{x_t \in \mathbb{R} \mid t = 1, 2, \dots, N\}$, em que t é o índice temporal ou cronológico e N é o número de observações.

A aplicação de séries temporais pode ser vista em diversas áreas como: finanças, administração, ciências econômicas, meteorologia, etc. São exemplos de séries temporais:

- O índice anual de acidentes de trânsito na região Sul;
- O registro diário de pacientes infectados num certo hospital;
- O registro semanal de saída de produtos numa loja.

Segundo (MORETTIN; TOLOI, 2004), uma vez obtida a série temporal X_1, \dots, X_n , observada nos instantes $t = 1, \dots, t = n$, podemos estar interessados em:

(a) investigar o mecanismo gerador da série temporal; por exemplo, analisando uma série de alturas de ondas, podemos querer saber como essas ondas foram geradas;

(b) fazer previsões de valores futuros da série, estas podem ser a curto prazo, como para séries de vendas, produção ou estoque, ou a longo prazo, como para séries populacionais, de produtividade, etc.;

(c) descrever apenas o comportamento da série; neste caso, a construção do gráfico, a verificação da existência de tendências, ciclos e variações sazonais, a construção de histogramas e diagramas de dispersão etc., podem ser ferramentas úteis;

(d) procurar periodicidades relevantes nos dados.

Grande parte dos processos na natureza não são caracterizados por serem aleatoriamente independentes; na maioria das vezes, são evidenciadas significantes correlações de longo alcance. Esta característica está presente em vários fenômenos das ciências, mais especificamente nas seguintes áreas: economia, engenharia, geofísica, meteorologia, etc. Métodos que servem para detecção de memória longa em domínio temporal são representados pelo *Rescaled Range Analysis*. O primeiro método que foi desenvolvido para estimar o expoente de Hurst (HURST, 1951) foi utilizado para descrever a dependência de longo alcance dos níveis da água em rios e reservatórios (BERAN, 1994).

Seja uma série temporal estacionária x_i , isto é, cuja média é $\langle x_i \rangle = 0$ e a variância $\langle x_i^2 \rangle = \sigma^2$. A função de autocovariância é dada pela equação $C(s) = \frac{1}{N-s} \sum_{i=1}^{N-s} x_i x_{i+s}$. A função de autocorrelação é obtida dividindo-se a autocovariância pela variância. Se a série for estacionária o decaimento da função de autocorrelação determinará ou não se a série possui correlação de longo alcance. Um decaimento exponencial, $C(s) \approx e^{-\frac{s}{t_x}}$ (t_x tempo característico), sugere que a série possui correlação de curto alcance.

Por outro lado, se a série possui correlações de longo alcance (memória longa), sua

função de autocorrelação $\langle x_i, x_{i+s} \rangle$ diminui seguindo uma lei de potência dada por, $C(s) \sim s^{-\gamma}$, para grandes valores de n e $0 < \gamma < 1$. Para correlações de longo alcance, $\int_0^\infty C(s)ds$ diverge no limite de séries infinitamente longas ($N \rightarrow \infty$) (BERAN, 1994; RANGAJARAN; DING, 2000).

3 DADOS E METODOLOGIAS

3.1 Dados

Os dados usados nesse trabalho são parte integrante da base de dados disponibilizada em: <<http://ce.esalq.usp.br/descar.html>>. Analisaremos dados acumulados diários de precipitação captados pela estação convencional em Piracicaba-SP, Brasil, durante o período de 1917-2009 e agrupados numa série temporal diária apresentada na Figura 1.

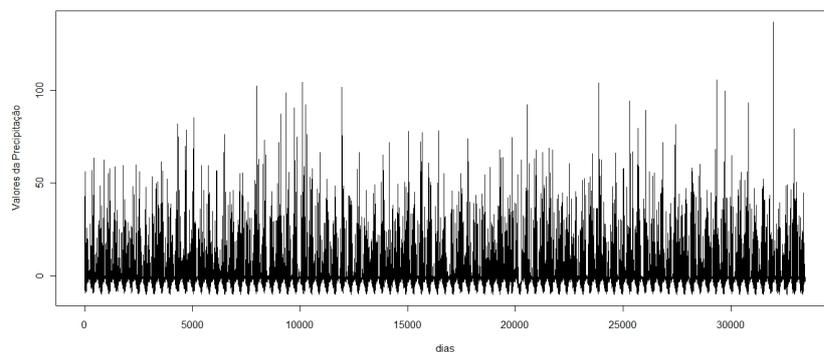


Figura 1: Série Temporal diária da precipitação pluvial em Piracicaba-SP, Brasil.

O clima na região é sub-tropical Cwa pela classificação climática de Köppen, com estação chuvosa de outubro a março e a estação seca de abril a setembro. Oitenta por cento da precipitação total anual, isto é, 1200-1500 mm ocorre na estação chuvosa, com precipitação mensal superior a 300 mm, enquanto na estação seca, precipitação mensal é inferior a 29 mm. A média da temperatura é de 19°C no inverno a 24°C no verão (LARA *et al.*, 2001). A região está passando por acelerado desenvolvimento urbano e agro-industrial, levando à degradação qualitativa e quantitativa dos recursos hídricos (MARTINELLI *et al.*, 2004).

A fim de estabelecer métodos adequados e eficientes para a preservação dos recursos bio-ambientais, a bacia do rio Piracicaba tem sido constantemente monitorada segundo diversos parâmetros ambientais, incluindo a água da chuva e química da água do rio e sua relação com fatores climáticos e antropogênicos.

O Laboratório de Processamento de Dados Meteorológicos está inserido na área de Física e Meteorologia do Departamento de Engenharia de Biosistemas, e tem seus serviços diretamente relacionados com a recuperação dos dados coletados no Posto Agrometeorológico de Piracicaba, SP.

A estação convencional teve início em 1917. As medidas efetuadas na estação convencional foram iniciadas com as de precipitação e temperatura no mesmo ano.

No ano de 1926, houve o início da medida de insolação e, a partir de 1943 as medidas de velocidade do vento, umidade relativa do ar e pressão atmosférica. A radiação solar global e a radiação líquida disponível foram estimadas a partir de 1926, enquanto que a evaporação e a evapotranspiração a partir de 1943. A Base de Dados da Estação Convencional do Posto Agrometeorológico começou a ser disponibilizada na Internet a partir de 1995 e a Base de Dados da Estação Automática a partir do ano de 1997, disponível em: <<http://www.leb.esalq.usp.br/posto.html>>.

3.2 Metodologias

3.2.1 Análise Multifractal das Séries Temporais

Nesta seção será descrita as características da metodologia multifractal no estudo das séries temporais. Séries temporais multifractais são caracterizadas por uma hierarquia dos expoentes que descrevem o comportamento de escala dos vários subconjuntos da série (FEDER, 1988). A maneira mais simples de análise multifractal é baseada no formalismo da função de partição multifractal padrão, que tem sido largamente desenvolvida para a caracterização multifractal de normalização, medidas estacionárias (FEDER, 1988; PEITGEN; JURGENS; SAUPE, 2004; BARABÁSI; VICSEK, 1991; BACRY; DELOUR; ARNEODO, 2001). Entretanto, este formalismo padrão não fornece resultados “corretos” para séries temporais não estacionárias que são afetadas por tendências ou que não podem ser normalizadas. Dessa forma, no início de 1990 desenvolveu-se um método para análise multifractal chamado **Wavelet Transform Modulos Maxima** (WTMM) (MUZY; BACRY; ARNEODO, 2001; MUZY; BACRY; ARNEODO, 1994).

Uma alternativa importante é o algoritmo multifractal DFA (MF-DFA) (KANTELHARDT *et al.*, 2002), uma vez que não requer o procedimento de maximização do módulo, e portanto, envolve menos esforço computacional comparado ao método convencional DFA.

3.2.2 Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)

De acordo com (KANTELHARDT *et al.*, 2002), o procedimento multifractal DFA (MF-DFA) consiste de 5 passos. Caracteriza-se por ser uma generalização do Detrended Fluctuation Analysis (DFA) (PENG *et al.*, 1994). Os três primeiros passos são essencialmente idênticos ao procedimento convencional DFA. Supondo que \tilde{x}_i é uma série de tamanho N e que esta série é de suporte compacto. Define-se o suporte como um conjunto de índices j com valores $\tilde{x}_j \neq 0$, é dito compacto se $\tilde{x}_j = 0$ apenas para uma fração insignificante da série, é interpretado como não tendo valor para este índice j .

A ideia não é discutir o aspecto multifractal ou fractal do gráfico da série temporal num gráfico bidimensional, porém analisar as séries temporais como uma estrutura unidimensional com valores atribuídos a cada ponto. Desde que a série temporal real sempre tem tamanho finito N , especificamente quer se determinar a multifractalidade de séries finitas, e não quando ocorre que o limite de $N \rightarrow \infty$.

Passo I: Calcula-se o perfil a partir da série temporal original \tilde{x}_k , onde $k = 1, \dots, N$, dado por

$$Y(j) = \sum_{i=1}^j \{\tilde{x}_k - \langle x \rangle\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

Observe que a partir da definição, segue que $Y(N) = 0$ e $\langle x \rangle$ é a média da série original.

Passo II: Divide-se o perfil, isto é, a série integrada $Y(j)$ em $N_s = \text{int}(N/s)$ segmentos não sobrepostos de mesmo tamanho s . Como geralmente o tamanho N da série não é múltiplo da escala temporal s , uma parte reduzida (menor do que s) da série $Y(j)$ pode sobrar. De maneira a inserir esta pequena parte da série, o procedimento é repetido partindo-se do final oposto. Obtem-se assim completamente $2N_s$ segmentos.

Passo III: A tendência local é calculada para cada um dos $2N_s$ segmentos através de um ajuste de mínimos quadrados das séries. A variância é determinada para cada segmento

v da seguinte maneira,

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s+i] - y_v(i)\}^2, \quad v = 1, 2, \dots, N_s \quad (3.2)$$

e

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2, \quad v = N_s + 1, \dots, 2N_s \quad (3.3)$$

em que, $y_v(i)$ é o ajuste polinomial do segmento v . No procedimento de ajuste utiliza-se o ajuste linear, quadrático, cúbico, ou ordem polinomial superior (chamados MF-DFA1, MF-DFA2, MF-DFA3, ...). No MF-DFA m (m -ésima ordem do MF-DFA) tendências da ordem mp na série $Y(j)$ (ou, de maneira equivalente, de ordem $m - 1$ na série original) são eliminadas. Desta maneira, um comparativo entre os resultados para diferentes ordens do MF-DFA permite que tipo de tendência polinomial na série temporal seja estimado (KANTELHARDT *et al.*, 2001; HU *et al.*, 2001).

Passo IV: A média sobre todos os segmentos é calculada para obter a função de flutuação para a q -ordem

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F_{DFAm}^2(v, s)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (3.4)$$

Trata-se de uma generalização de Detrended Fluctuation Analysis -DFA (PENG *et al.*, 1994), que calcula

$$F_2(s) = \left[\frac{1}{2N_s} \sum_{v=0}^{2N_s-1} F_{FA}^2(v, s) \right]^{1/2} \sim s^\alpha, \quad (3.5)$$

em que α é o expoente da escala que representa uma estimativa do expoente clássico de Hurst (FEDER, 1988). A interpretação do expoente α é a seguinte: para as séries aleatórias $\alpha = 0,5$, para as séries persistentes $0,5 < \alpha < 1$, e para as séries antipersistentes, $0 < \alpha < 0,5$. Os valores $\alpha = 1$ e $\alpha = 1,5$ representam o ruído $\frac{1}{f}$ e o ruído browniano (integração do ruído branco), respectivamente.

Por definição, $F_2(s)$ pode ser visto como a média das raízes quadradas dos deslocamentos do passeio aleatório na cadeia depois de s passos.

Na Eq. (3.4) a variável q pode assumir qualquer valor real excetuando-se o valor zero, isto é, dois casos diferentes devem ser analisados, (i) $q \neq 0$ e (ii) $q \rightarrow 0$. Para $q = 2$, restabelece-se o procedimento DFA padrão. O objetivo é entender como a função de flutuação generalizada depende da escala temporal s para diferentes valores de q . Por isso, os

passos II e IV devem ser repetidos para diferentes escalas temporais s . Percebe-se que o incremento de $F_q(s)$ implica no incremento de s . Naturalmente, $F_q(s)$ depende da ordem de m . Por construção, segue que $F_q(s)$ é somente definido para $s \geq m + 2$ (KANTELDHARDT *et al.*, 2002).

Passo V: Determinar o comportamento de escala da função de flutuação pela análise do gráfico log-log $F_q(s)$ versus s para cada valor de q . Se ocorrer que as séries \tilde{x}_i possuam correlações de longo alcance, $F_q(s)$ incrementa, para grandes valores de s , como uma lei de potência,

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}, \quad (3.6)$$

onde $h(q)$ é o expoente de Hurst generalizado.

Para escala muito grandes, segue que $s > N/4$, $F_q(s)$ torna-se estatisticamente incerto, pois o número de segmentos N_s na etapa anterior torna-se demasiadamente pequeno. Por isso, escalas $s > N/4$ devem ser excluídas do procedimento de ajuste para determinar $h(q)$. Além disso, desvios sistemáticos do comportamento da escala na Eq. (3.6), que podem ser corrigidos, ocorrem para pequenas escalas, $s \approx 10$.

O valor de $h(0)$, o qual corresponde ao limite $h(q)$ para $q \rightarrow 0$, não pode ser diretamente determinado usando o procedimento da média na Eq. (3.4), uma vez que o expoente diverge. Alternativamente, deve ser empregado um procedimento de média logarítmica,

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(v, s)] \right\} \sim s^{h(0)}. \quad (3.7)$$

Veja que $h(0)$ não pode ser definido para séries temporais com suporte fractal, em que $h(q)$ diverge para $q \rightarrow 0$.

De acordo com (KANTELDHARDT, 2008), para as séries temporais monofractais, $h(q)$ é independente de q , desde que o comportamento da escala das variâncias $F_{DFAm}^2(v, s)$ é idêntico para todos os segmentos v , e o procedimento da média na Eq. (3.4) fornecerá justamente o comportamento idêntico para todos os valores de q . Apenas se pequenas e grandes escalas de flutuações diferem, haverá uma dependência significativa de $h(q)$ sobre q : Se considerarmos valores positivos de q , os segmentos v com grandes variâncias $F^2(v, s)$ dominarão a média $F_q(s)$. Portanto, para valores positivos de q , $h(q)$ descreve o comportamento de escala de segmentos com grandes flutuações. De maneira contrária, para valores negativos de q , os segmentos v com pequenas variâncias $F_{DFAm}^2(v, s)$

dominarão a média $F_q(s)$. Dessa forma, $h(q)$ descreve o comportamento de escalas de segmentos com pequenas flutuações.

Geralmente as grandes flutuações são caracterizadas por um expoente de menor escala $h(q)$ para séries multifractais comparado as pequenas flutuações. Pode ser entendido a partir dos seguintes argumentos: Para a máxima escala $s = N$ a função de flutuação $F_q(s)$ é independente de q , desde que a soma na Eq.(3.4) é executada apenas sobre dois segmentos idênticos. Para escalas menores $s \ll N$ o procedimento da média é executado sobre vários segmentos, e o valor da média $F_q(s)$ será dominado pela $F^2(v, s)$ a partir dos segmentos com pequenas (grandes) flutuações se $q < 0$ ($q > 0$). Nestas condições, para $s \ll N$, $F_q(s)$ com $q < 0$. Assim, para $s \ll N$, $F_q(s)$ com $q < 0$ será menor do que $F_q(s)$ com $q > 0$, enquanto ambos são iguais para $s = N$. Consequentemente, se for assumido um comportamento de escala homogêneo de $F_q(s)$ seguindo a Eq.(3.6), a inclinação num gráfico log-log de $F_q(s)$ com $q < 0$ versus s deve ser maior do que a correspondente inclinação para $F_q(s)$ com $q > 0$. Assim, $h(q)$ para $q < 0$ usualmente será maior do que $h(q)$ para $q > 0$.

Não obstante, a metodologia MF-DFA pode apenas determinar expoentes de Hurst positivos generalizados, e já se torna impreciso para sinais fortemente anti-correlacionados quando $h(q)$ se aproxima de zero. A maneira mais simples de analisar os dados é integrar as séries temporais antes do procedimento MF-DFA. Seguindo o procedimento MF-DFA descrito nos passos acima, obtém-se uma função de flutuação generalizada descrita por uma lei de escala com $\tilde{h}(q) = h(q) + 1$. O comportamento de escala pode, portanto, ser determinado com precisão mesmo para $h(q)$ que é menor que zero para alguns valores de q . A eficiência de $h(q)$ determinado pelo MF-DFA certamente depende do comprimento N dos dados.

3.2.2.1 O expoente α de Lipschitz-Hölder

Segundo (FEDER, 1988), as singularidades da medida $M(x)$ são caracterizadas por α . Considere a medida gerada por um processo multiplicativo de n -ésima geração. Esta medida não é uma função decrescente de x , com incrementos $\mu_\epsilon = \Delta^n(\epsilon)$ para todo x que tenha $\epsilon \cdot n$ zeros entre n primeiros dígitos quando escrito como uma fração binária, isto é, $x = \sum_{v=1}^n 2^{-v} e_v$. Escolhe-se um $x(\epsilon)$ que corresponde a um dado valor de ϵ , este ponto é um elemento do conjunto S_ϵ . A medida $M(x)$ é também dada num ponto $x(\epsilon) + \delta$, com $\delta = 2^{-n}$. O incremento em $M(x)$ entre esses dois pontos é μ_ϵ e segue que,

$$\mu_\epsilon = M(x(\epsilon) + \delta) - M(x(\epsilon)) = \delta^\alpha, \quad (3.8)$$

em que define-se α pela equação

$$\mu_\epsilon = \delta^\alpha. \quad (3.9)$$

Nas gerações subsequentes, mais e mais pontos são obtidos no conjunto S_ϵ e a Eq.(3.8) continua correta mesmo quando o limite $n \rightarrow \infty$. Uma função $M(x)$ que satisfaz a Eq.(3.8) para todos os valores de x possui derivada se $\alpha = 1$, é constante para $\alpha > 1$, e singular se $0 \leq \alpha \leq 1$.

Segue de $\mu_\epsilon = \Delta^n(\epsilon)$, com $\Delta(\epsilon) = \mu_0^\epsilon \mu_1^{1-\epsilon} = p^\epsilon (1-p)^{(1-\epsilon)}$, e Eq.(3.9), e $\delta = 2^{-n}$, que a medida para uma população multiplicativa tem um expoente de Lipschitz-Hölder dada por,

$$\alpha(\epsilon) = \frac{\ln \mu_\epsilon}{\ln \delta} = -\frac{\epsilon \ln p + (1-\epsilon) \ln(1-p)}{\ln 2}. \quad (3.10)$$

O valor de α vale para os pontos no conjunto S_ϵ , e é uma função linear de ϵ . α é uma função também do peso p , definindo a subdivisão do intervalo. Encontra-se a medida multiplicativa com $p \leq \frac{1}{2}$ em que $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ com $\begin{cases} \alpha_{min} = -\ln(1-p)/\ln 2, & \text{para } \epsilon = 0 \\ \alpha_{max} = -\ln p/\ln 2, & \epsilon = 1 \end{cases}$

Existe uma correspondência um-a-um entre o parâmetro ϵ e α , e por isso, os subconjuntos S_ϵ devem ser escritos como S_α . A medida $M(x)$ é caracterizada pelos conjuntos S_α , que como uma união compõem o intervalo unitário $S = [0, 1]$:

$$S = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}. \quad (3.11)$$

A medida possui singularidades com o expoente α de Lipschitz-Hölder em conjuntos fractais S_α , cuja dimensão fractal é $f(\alpha) = f(\epsilon(\alpha))$.

3.2.2.2 O expoente $\tau(q)$ e a curva $f(\alpha)$

No formalismo geral multifractal, considera-se uma média normalizada $\mu(t)$, $t \in [0, 1]$, e define-se as probabilidades das caixas $\tilde{\mu}_s(t) = \int_{t-s/2}^{t+s/2} \mu(t') dt'$ nas vizinhanças de (escala) comprimento $s \ll 1$ ao redor de t . Uma aproximação multifractal é então introduzida pela

função de partição (KANTELHARDT, 2008)

$$Z_q(s) = \sum_{v=0}^{1/s-1} \tilde{\mu}_s^q[(v+1/2)s] \sim s^{\tau(q)} \text{ para } s \ll 1. \quad (3.12)$$

Alternativamente, uma descrição multifractal pode ser obtida considerando a função de partição (KANTELHARDT *et al.*, 2002)

$$Z_q(s) = \sum_{v=1}^{N/s} |Y(vs) - Y((v-1)s)|^q \sim s^{\tau(q)}, \quad (3.13)$$

em que, $\tau(q)$ é chamado de expoente de escala Renyi e q é um parâmetro real que pode assumir valores positivos e negativos. Observe que $\tau(q)$ é às vezes definido com sinal oposto (FEDER, 1988).

Dessa forma, pode-se obter analiticamente uma relação entre os dois conjuntos de expoente de escala multifractal,

$$\tau(q) = q \times h(q) - 1. \quad (3.14)$$

O expoente de escala multifractal clássico, $\tau(q)$, pode ser também determinado a partir de $h(q)$ definido anteriormente na Eq.(3.6). Se ocorrer uma dependência linear do expoente $\tau(q)$ com relação a q ele é dito monofractal, caso contrário será multifractal.

Uma outra maneira de caracterizar séries multifractais é o espectro de singularidade $f(\alpha)$, que relaciona-se com $\tau(q)$ através de uma transformada de Legendre (FEDER, 1988; PEITGEN; JURGENS; SAUPE, 2004)

$$\alpha = \frac{d}{dq} \tau(q) \text{ e } f(\alpha) = q \times \alpha - \tau(q). \quad (3.15)$$

Com efeito, α é a intensidade de singularidade ou o expoente de Lipschitz-Hölder, enquanto que $f(\alpha)$ denota a dimensão do subconjunto de séries caracterizado por α . Através da Eq.(3.14), podemos diretamente relacionar α e $f(\alpha)$ a $h(q)$,

$$\alpha = h(q) + q \times h'(q) \text{ e } f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1. \quad (3.16)$$

O expoente α de Lipschitz-Hölder pode ser compreendido como um indicador global da diferenciabilidade local da função. As mudanças instantâneas que ocorrem numa série temporal \tilde{x}_i chamam-se de singularidade e uma caracterização da intensidade é obtida através do expoente α . O grau de regularidade é medido através do expoente de \tilde{x}_i para um ponto x_0 . A monofractalidade é determinada por um único expoente α , no caso multifractal,

entretanto, diferentes valores de α caracterizam diferentes partes estruturais induzindo a existência do espectro de singularidade $f(\alpha)$.

Na análise multifractal, $f(\alpha)$ pode ser observado como a dimensão fractal da união de regiões com intensidade de singularidades compreendidos entre $\alpha + d\alpha$. Na Eq.(3.15) temos a representação paramétrica da curva $f(\alpha)$, ou seja, a dimensão fractal do suporte de singularidades da medida com o expoente α , em que $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. O ponto de máximo é obtido quando $f'(\alpha) = 0$ (FEDER, 1988; STOSIC; STOSIC, 2006).

Objetivando comparar e caracterizar a intensidade da multifractalidade em séries temporais não-estacionárias é usado como parâmetro a largura do espectro de singularidade $f(\alpha)$, o qual corresponde a diferença entre os valores máximo e mínimo do expoente α , ou seja, $\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$; em que $q \times h'(q) \rightarrow 0$ quando $q \rightarrow \pm\infty$. Dessa forma, $\Delta\alpha$ é facilmente obtido por (KOSCIELNY-BUNDE, 2006)

$$\Delta\alpha = h(-\infty) - h(\infty). \quad (3.17)$$

3.2.3 Self-Organized Criticality (SOC)

O conceito “self-organized criticality” foi proposto por (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987; BAK; TANG; WIESENFELD, 1988) como uma explicação para um comportamento de um modelo de um autômato celular. O modelo consiste de caixas de grade quadriculada e a cada espaço de tempo uma partícula é descartada numa caixa selecionada aleatoriamente. Quando há um acúmulo de quatro partículas numa caixa, as partículas são redistribuídas para quatro caixas vizinhas, ou no caso de caixas que estejam nas extremidades, as partículas perdem-se da grade. Redistribuições podem levar a um maior número de instabilidades, com “avalanches” de partículas perdidas nas extremidades das grades. Devido a este comportamento de “avalanche”, este modelo foi chamado de “sandpile” (pilha de areia). A frequência não cumulativa da área de distribuição do modelo segue uma lei de potência (fractal) dada por

$$N \sim A^{-\alpha}, \quad (3.18)$$

onde N é o número de avalanches com área A e α é uma constante com um valor $\alpha \approx 1$.

Um modelo que pode exibir um comportamento de “self-organized criticality” foi proposto por (CARLSON; LANGER, 1989), chamado de “slider-block model” (modelo de bloco-deslizante). Em linhas gerais, matrizes de blocos-deslizantes são conectadas a uma placa condutora de velocidade constante através de molas extratoras e, uns aos outros pelo

conector de molas. Os blocos exibem um comportamento “stick-slip”, isto é, cola-desliza devido as interações de atrito com a placa ao qual são puxados. A distribuição da frequência da área de eventos de menor deslizamento novamente satisfaz a Eq. (3.18) com $\alpha \approx 1$.

De acordo com (BAK; CHEN; TANG, 1990; DROSSEL; SCHWABL, 1992), um outro modelo que exhibe “self-organized criticality” é o modelo de “forest-fire”, ou seja, incêndios florestais. Em síntese, considera-se uma grade quadriculada de sítios. A cada espaço de tempo planta-se uma árvore num sítio aleatório (se o sítio estiver desocupado) e uma centelha é lançada no sítio. Se a centelha é lançada sobre uma árvore de forma que todas as árvores adjacentes sejam queimadas tem-se um modelo “forest-fire”. A distribuição da frequência da área de eventos de menor queimada satisfaz a Eq.(3.18) com $\alpha = 1.0 - 1.2$.

Embora o conceito de “self-organized criticality” foi concebido como uma explicação para modelos simples, tem sido associado com muitos desastres naturais (MALAMUD; TURCOTTE, 1999). A seguir alguns exemplos:

- *Terremotos*. Movimento das placas tectônicas devido ao acúmulo de tensão em centenas de milhares de anos. A tensão é aliviada em poucos segundos durante o terremoto. Uma característica universal dos terremotos é que é satisfeita a lei de potência da Eq. (3.18), onde $\alpha \approx 2$.
- *Incêndios Florestais*. Aumento de materiais combustíveis em grande escala de tempo sendo destruídos em incêndios num curto espaço (escala) de tempo. A distribuição da área de frequência é bem aproximada pela relação da lei de potência da Eq. (3.18) com $\alpha = 1.3 - 1.5$.
- *Deslizamentos*. Associados com um desenvolvimento lento em áreas de instabilidade. A distribuição da área de frequência é bem aproximada pela relação da lei de potência da Eq. (3.18) com $\alpha = 2.3 - 3.3$.

Aplicações da metodologia “self-organized criticality” também tem sido propostas nas ciências biológicas e sociais, tais como: *biodiversidade, epidemias, guerras e queda de ações no mercado*.

As leis de evolução de tais sistemas são usualmente muito simples e transcrevem duas propriedades comuns:

- (i) A habilidade de armazenar alguma quantidade de energia (ou massa) por algum tempo e,

(ii) A liberação repentina de energia quando determinado limiar é atingido.

As propriedades acima descritas levam ao seguinte comportamento dinâmico: o sistema se auto-organiza através de um estado que é instável na sua vizinhança imediata. Quando esta vizinhança é atingida o sistema libera energia empurrando-se para longe daquele local de estado instável. Tais avalanches que devem ser caracterizadas pela energia que liberam, fecham um ciclo que é então repetido por diversas vezes (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998). A ocorrência de SOC é relacionada a este tipo de comportamento estatístico estacionário. Caracteriza-se pela distribuição hiperbólica de várias quantidades.

3.2.3.1 Distribuição Hiperbólica

A distribuição hiperbólica foi proposta por (BARNDORFF-NIELSEN; HALGREEN, 1977) e inicialmente utilizada para a modelagem de movimentos de massas de areias impulsio- nadas com ventos de velocidades contínuas. A partir de (SILVA, 1999), é desenvolvida a construção e parametrização da distribuição hiperbólica.

A função de distribuição hiperbólica é estabelecida de maneira a apresentar um his- tograma linear quando apresentada na escala log-log. A curva que descreve esse compor- tamento é a hipérbole. Uma expressão para a hipérbole é dada por,

$$y = -\alpha\sqrt{1+x^2} + \beta x, \quad (3.19)$$

com assíntotas para $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ dadas respectivamente por $y = -\gamma x$ e $y = \phi x$, em que $\phi = \alpha + \beta$ e $\gamma = \alpha - \beta$ cujo domínio $\in (0, \infty)$.

A função de densidade de probabilidade correspondente a Eq.(3.19) é dada por,

$$a(\alpha, \beta) \exp(-\alpha\sqrt{1+x^2} + \beta x)$$

em que $a(\alpha, \beta)$ é uma constante adicionada de forma que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(\alpha, \beta) \exp(-\alpha\sqrt{1+x^2} + \beta x) = 1.$$

Sendo K_1 a função de Bessel, a função de densidade de probabilidade hiperbólica é dada por

$$\text{hyp}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right). \quad (3.20)$$

3.2.4 Self-Organized Criticality e eventos de precipitação

Nesta seção será descrita a metodologia “self-organized criticality” para a análise de precipitação pluvial. De acordo com (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998) as seguintes quantidades são caracterizadas pela distribuição hiperbólica:

O da frequência relativa de um determinado número N de avalanches liberando energia (ou massa) E , isto é,

$$N(E) \sim \frac{1}{E^\alpha} \quad (3.21)$$

a frequência relativa das avalanches num determinado tempo Δt

$$N(\Delta t) \sim \frac{1}{\Delta t^\beta} \quad (3.22)$$

e a frequência relativa da defasagem temporal (“time lags”) T entre eventos de avalanches simples

$$N(T) \sim \frac{1}{T^\gamma}. \quad (3.23)$$

Essas leis de distribuição refletem a ausência de qualquer característica de tempo ou escala para a dinâmica particular, o qual refere-se a invariância de escala dos sistemas SOC (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998; GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008).

(ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998) investigam a evidência para o comportamento SOC de dados de séries de precipitação pluvial que possuem correlações de longo-alcance. Particularmente, faz-se uma procura por distribuições hiperbólicas de eventos extremos. Embora não inteiramente conclusivo, a presença de uma tal escala reforçará a ligação entre dinâmica de chuvas e os sistemas SOC. A existência de tal relação pode ser inferida também a partir de argumentos teóricos, ambos do tipo global e microfísicos: O equilíbrio total do teor da água na atmosfera é governado pela evaporação de oceanos subtropicais e transportado na atmosfera. Depois de um determinado tempo de permanência na atmosfera, a água é lançada num evento do tipo avalanche. A dinâmica específica de um evento como esse é largamente controlada pelo crescimento da gota e, subsequentemente a precipitação (PRUPPACHER; KLETT, 1997).

Depois da nucleação, gotículas de nuvem crescem por difusão do vapor da água superando a evaporação, devido ao fluxo de ar em torno delas. De maneira geral, nuvens exibem um espectro de gotículas de diferentes tamanhos que se ampliam para gotas como resultado de um turbulento movimento levando a coalisão e coalescência. As diferentes taxas de sedimentação das gotículas de tamanhos diferentes implicam na ocorrência das

colisões. Ocasionalmente, as gotas são suficientemente grandes para superar a fricção e as correntes ascendentes das massas de ar. Este quadro é bastante similar ao que é empregado em modelos de avalanches citado anteriormente, corroborando com os recentes experimentos de avalanche de água (PLOURDE; NORI; BRETZ, 1993).

No intuito de atingir um quadro compreensivo, a metodologia SOC propõe que o conjunto de dados seja analisado com relação a três tipos diferentes de fenômenos meteorológicos associados com a precipitação: (i) seca, (ii) duração da chuva e (iii) intensidade da chuva. Estes três tipos de eventos podem ser trazidos dentro do contexto da teoria de SOC de acordo com as três leis estatísticas citadas anteriormente, ou seja, Eq. (3.23), Eq. (3.21) e Eq. (3.22), respectivamente.

O primeiro passo é a identificação dos eventos de chuva com flutuações do teor de água contido na atmosfera, assim sendo, com avalanches. A partir disso, caracteriza-se a seca por intervalos I sem que haja precipitação. Dentro do quadro de SOC, estes intervalos são apenas tempos de espera entre uma mudança “drástica” do sistema climático. A duração da chuva R é o tempo de vida de tais mudanças do sistema climático e a intensidade da chuva, definida como uma quantidade diária total r de chuva coletada numa determinada estação, obedece ao fluxo de massa(energia) que desliza, por exemplo, numa experiência de pilha de areia (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998).

Uma outra maneira de analisar a estrutura da precipitação foi proposta por (PETERS; HERTLEIN; CHRISTENSEN, 2001). Um evento de chuva i é definido como uma sequência de taxas não-nulas, $p(t)$, e cujo tamanho, Q_i , representa a coluna de água que se acumula desde seu tempo de ocorrência, t_{0i} , até que termine no tempo t_{fi} , calcula-se de acordo com

$$Q_i = \sum_{t_{0i}}^{t_{fi}} p(t) \Delta t, \quad (3.24)$$

em que Δt é igual a resolução temporal dos dados. A Figura 2 evidencia os intervalos em que não ocorre chuva, isto é, são os eventos de seca (GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008).

Uma precisa identificação do líquido lançado em um único evento requer a determinação dos seus limites espaciais e temporais. Isto pode ser alcançado, por exemplo, por detecção de radar; entretanto, esses conjuntos de dados são geralmente pequenos e es-

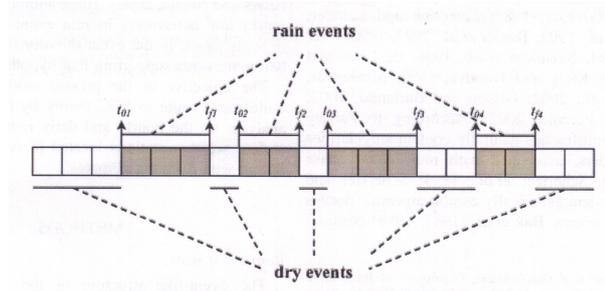


Figura 2: Um evento de chuva é representado pelos quadrados escuros. Um evento de seca é representado por uma sequência de quadrados brancos. As setas indicam t_{0i} e t_{fi} para cada evento de chuva i .

porádicos.

Por outro lado, a oferta em grande escala dos registros da estação metereológica torna-se mais coerente e sistemática fazendo a informação mais adequada para a caracterização do clima, o que leva a uma descrição estatística consistente dos fenômenos (i)-(iii). Em cada caso, determina-se o número de eventos como uma função de parâmetro característico (comprimento de intervalo em dias ou quantidade diária de chuva em mm) (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998).

De acordo com (GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008), devido a precipitação pluvial possuir uma extrema variabilidade, espera-se que as distribuições de probabilidade possuam caudas pesadas ou intermitência hiperbólica ao invés de caudas leves (gaussianas). Essas distribuições hiperbólicas, ou leis de potência, caracterizam o estado estatisticamente estável que é sustentado por flutuações temporais ou avalanches relacionados a teoria SOC (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987; BAK; TANG; WIESENFELD, 1988). Formalmente, uma lei de potência (BAK, 1997), significa que uma determinada quantidade n (intensidade da chuva ou eventos de seca) pode ser expressa também como alguma potência ou outra quantidade x (intensidade da chuva ou duração de eventos de seca), da seguinte maneira

$$n(x) \sim x^{-\tau}, \quad (3.25)$$

em que τ é a inclinação de um gráfico log-log, no qual o ajuste dos dados assemelha-se a uma linha reta. Se uma lei de potência se enquadra num determinado conjunto de dados, não existe nenhuma escala típica de eventos e ocorre a predominância de uma escala de invariância. Isto significa que a razão entre as frequências de eventos de tamanhos diferentes x e kx , k sendo alguma constante, é sempre k^τ , o qual não depende de x , isto é,

$$\frac{n(x)}{n(kx)} = k^\tau. \quad (3.26)$$

Segundo vários autores (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998; GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008; SIVAKUMAR, 2001), a maneira mais conveniente de analisar $n(x)$ é através do uso da distribuição empírica de probabilidade, dada por

$$\bar{N}(x) = Pr(X > x) = \int_x^{\text{Max}} n(x)dx, \quad (3.27)$$

onde Max é o evento máximo num conjunto de dados. Usando a descrição integrada ao invés de histogramas, evita-se a flutuação dos dados no regime de baixo (alto) valor induzida pela escolha logaritma (linear) de caixas. Se $Max \rightarrow \infty$ (e se $\tau > 1$) então segue que

$$\bar{N}(x) \sim x^{-\tau+1}. \quad (3.28)$$

Os dados de precipitação geralmente são confinados nas faixas de $1 < I < 100$ dias e $0.1mm < r < 100mm$, enquanto que valores significantes (extremos) são observados apenas situações extremas para regiões semi-áridas e monções, respectivamente. Dessa forma, não é possível substituir Max por ∞ na Eq.(3.27) e obter (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998),

$$N(x) := \bar{N}(x)/x \sim \frac{1}{x^\tau} \left[1 - \left(\frac{x}{\text{Max}} \right)^{\tau-1} \right].$$

A partir da Eq.(3.27) segue que,

$$\bar{N}(x) \sim \frac{1}{\tau-1} x^{1-\tau} \left[1 - \left(\frac{x}{\text{Max}} \right)^{\tau-1} \right] \quad (3.29)$$

Finalmente, a função usada para modelar os eventos extremos da precipitação, $N(x)$, é obtida pela divisão da Eq.(3.29) por x , em que se obtém

$$N(x) := \frac{\bar{N}(x)}{x} \sim \frac{1}{\tau-1} x^{-\tau} \left[1 - \left(\frac{x}{\text{Max}} \right)^{\tau-1} \right]. \quad (3.30)$$

Então, o gráfico *log-log* de $N(x)$ versus x definitivamente se afasta de uma linha reta à

medida que x aproxima-se do Max (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998; GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008).

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Preliminares

Nesta seção iniciaremos a análise dos resultados com uma breve explanação das estatísticas descritivas dos dados para, em seguida, descrevermos a análise da multifractalidade e criticalidade auto-organizada.

Tabela 1: Estatísticas descritivas da série temporal das médias diárias da precipitação (em mm) em Piracicaba - SP

N	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio padrão	Coefficiente de variação
365	0,1565	10,0885	3,5000	2,9785	2,4322	0,6949

Abaixo temos a descrição do histograma das médias diárias da precipitação pluvial na região de Piracicaba-SP coletadas numa estação convencional. Percebe-se que poderia ser utilizada uma distribuição multimodal para modelar os dados.

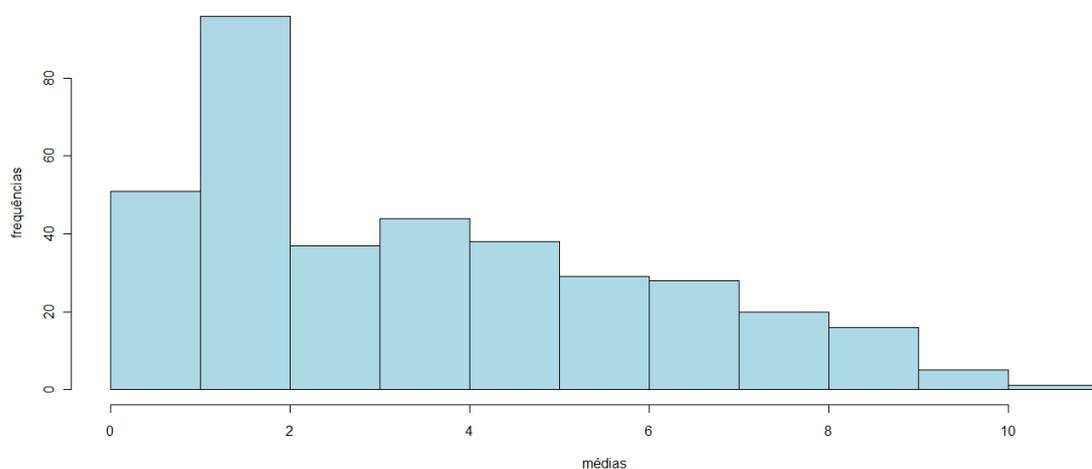


Figura 3: Histograma das médias diárias da precipitação no período de 1917-2009 em Piracicaba-SP.

A série temporal é composta de 365 observações referentes as médias diárias da precipitação pluvial coletadas numa estação convencional da base de dados disponibilizada em: <<http://ce.esalq.usp.br/descar.html>>, na região de Piracicaba-SP, Brasil. A Figura 4 apresenta o gráfico temporal da série, onde seu comportamento é visualizado ao longo do tempo. Percebe-se que a série das médias diárias apresenta indícios de não estacionariedade, tendência e sazonalidade.

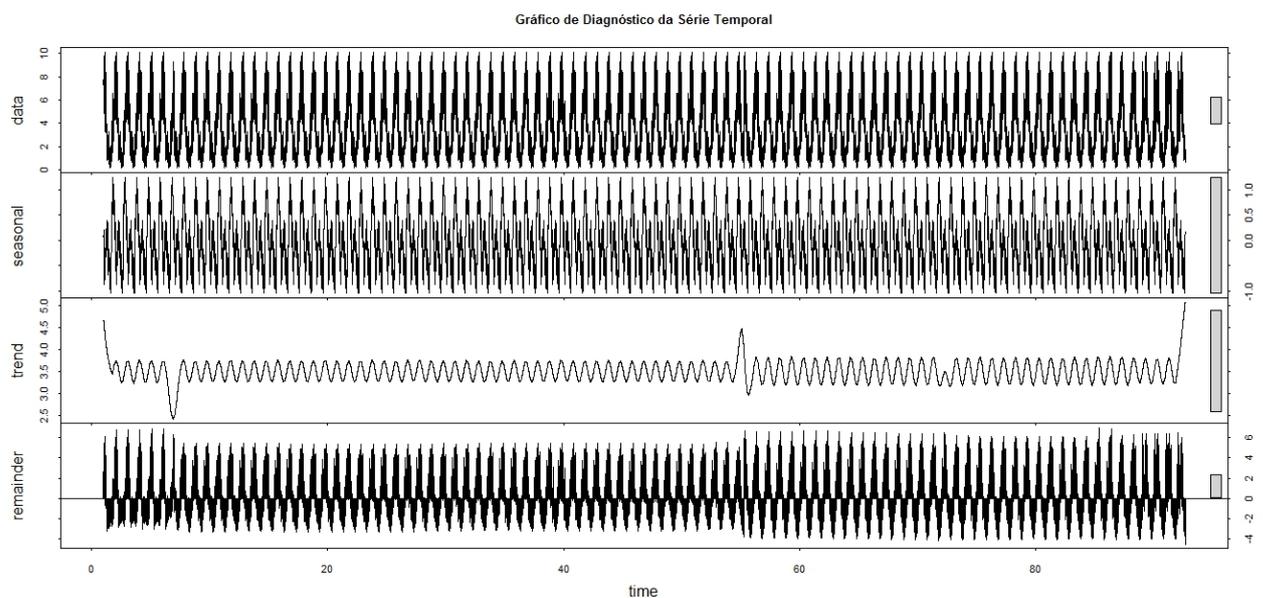


Figura 4: Diagnóstico da série temporal das médias diárias da precipitação no período de 1917-2009, Piracicaba-SP

4.2 Análise Multifractal

Nesta seção aplicamos o algoritmo MF-DFA na série temporal das quantidades diárias da precipitação pluvial. A descrição da metodologia MF-DFA encontra-se na Subseção 4.2.2. Para eliminar a sazonalidade, analisamos a série $X_i = \frac{P_i - \bar{P}_i}{\sigma}$ (KANTELHARDT *et al.*, 2006), onde P_i é quantidade da precipitação diária, \bar{P}_i é a média dos valores diários correspondentes a cada dia do ano e σ é o desvio padrão de P_i para cada dia do ano. Na Figura 5 é apresentado um gráfico de escala Log-Log para a função flutuação de ordem q definido anteriormente na Eq. (3.6). O expoente generalizado, $h(q)$, é obtido através do coeficiente linear da reta $\log[F_q(s)]$ versus $\log(s)$, em que $q = -10, -6, -2, 2, 6, 10$.

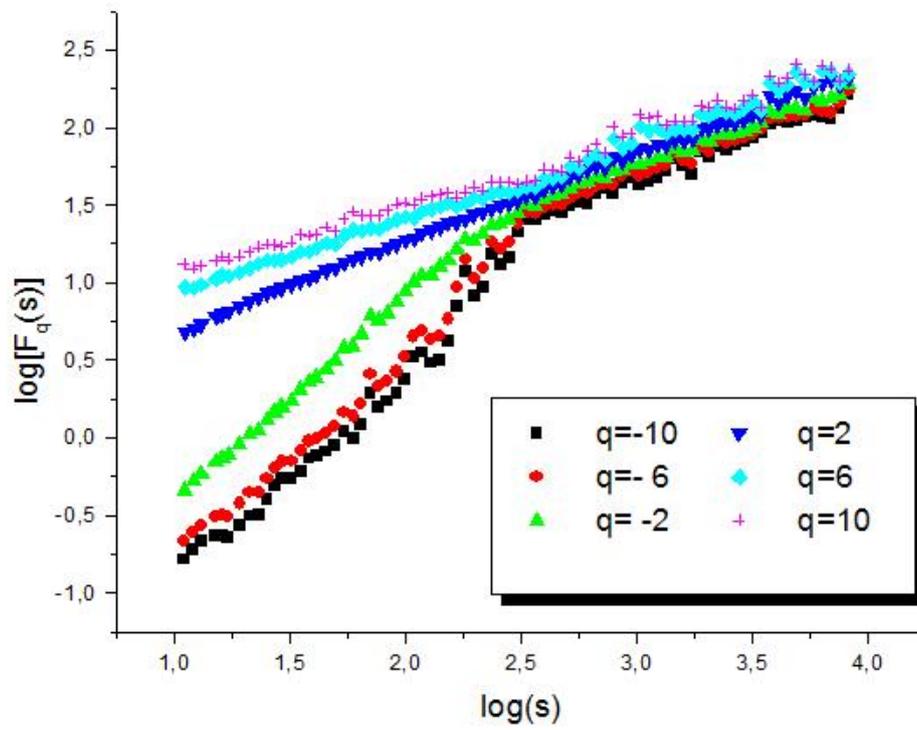


Figura 5: Gráfico de $\log[F_q(s)]$ versus $\log(s)$

Observa-se que para as escalas menores de $\log s_0 \approx 2,4$ (um pouco mais de 8 meses), o coeficiente angular das retas, representando o expoente $h(q)$, diminui com o aumento de q , indicando a multifractalidade da série. Para escalas maiores, a multifractalidade da série diminui (o coeficiente angular é aproximadamente igual para todos os valores de q).

A Figura 6 apresenta o resultado de MF-DFA para as escalas menores do que s_0 , em que $15 \leq s_0 \leq 345$. Não é aconselhável fazer $s_0 > N/4$.

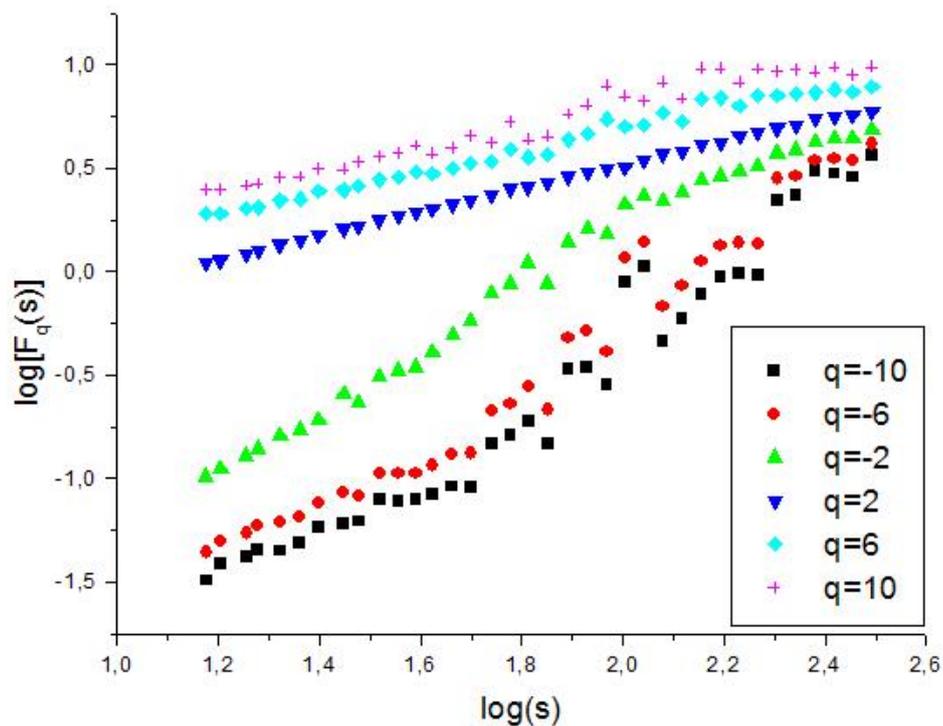


Figura 6: Gráfico de $\log[F_q(s)]$ versus $\log(s)$ para $s < s_0$

Os valores do expoente $h(q)$ para diferentes q são apresentados na Figura 7. Observamos que para as escalas $s > s_0 \approx 2,4$. Para as escalas maiores o valor de $h(q)$ está entre 0,35-0,55 o que indica a multifractalidade mais fraca.

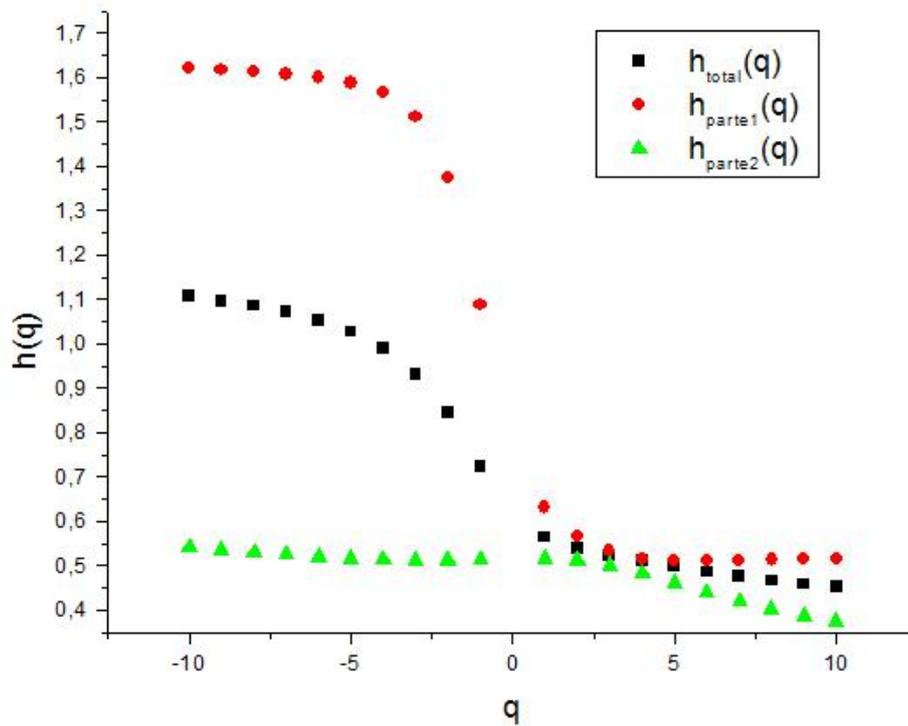


Figura 7: Gráfico de q versus $h(q)$

Na Figura 8 observamos que não existe uma dependência linear de $\tau(q)$ com relação a q e, dessa forma, corrobora-se a multifractalidade da série. Observa-se uma comparação entre os $\tau(q)$'s para toda região de escala e para as escalas $s < s_0(\tau(q)_{s < s_0})$.

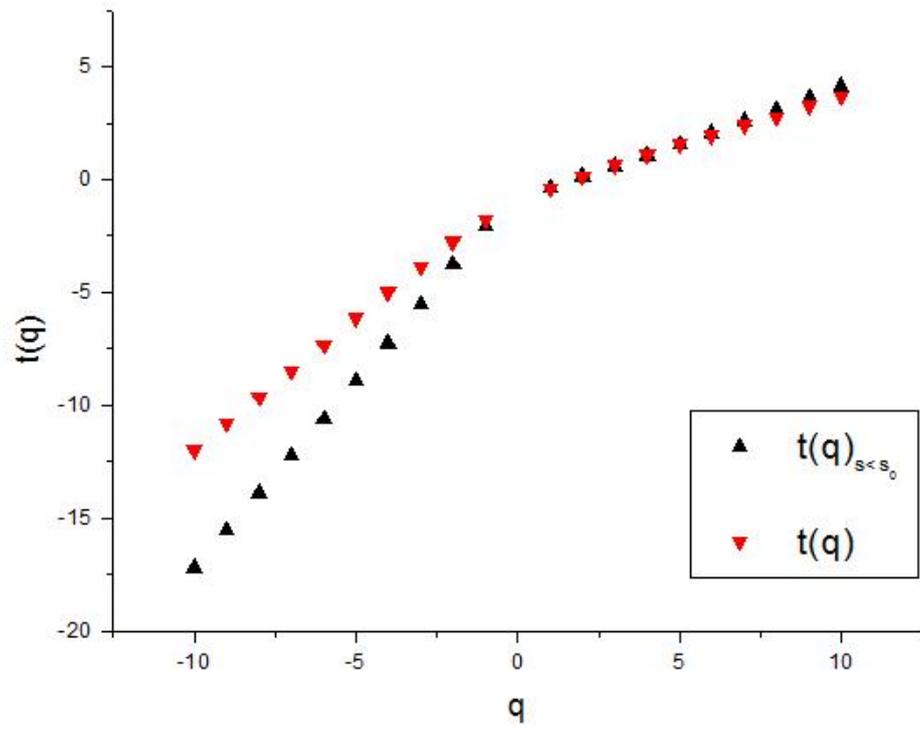


Figura 8: Gráfico de q versus $t(q)$

4.3 Análise SOC

Nesta seção descrevemos a aplicação da metodologia SOC nos eventos de quantidade diária da chuva e da duração de seca (dias sem chuva). A figura 9 apresenta intensidade diária da chuva e a aplicação do modelo (3.30) apresentado na subseção 4.2.5. Observe-se que precisamos de dois expoentes τ_1 e τ_2 para pequenas e grandes intensidades. A razão $\bar{\tau} = \bar{\tau}_2/\bar{\tau}_1 = 2,79/1,02 = 2,73$ está em acordo com os resultados obtidos para as regiões tropicais e subtropicais de países como Austrália, Índia e especificamente Brasil onde a precipitação convectiva é abundante, os valores de τ encontram-se na faixa de 2–3 (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998).

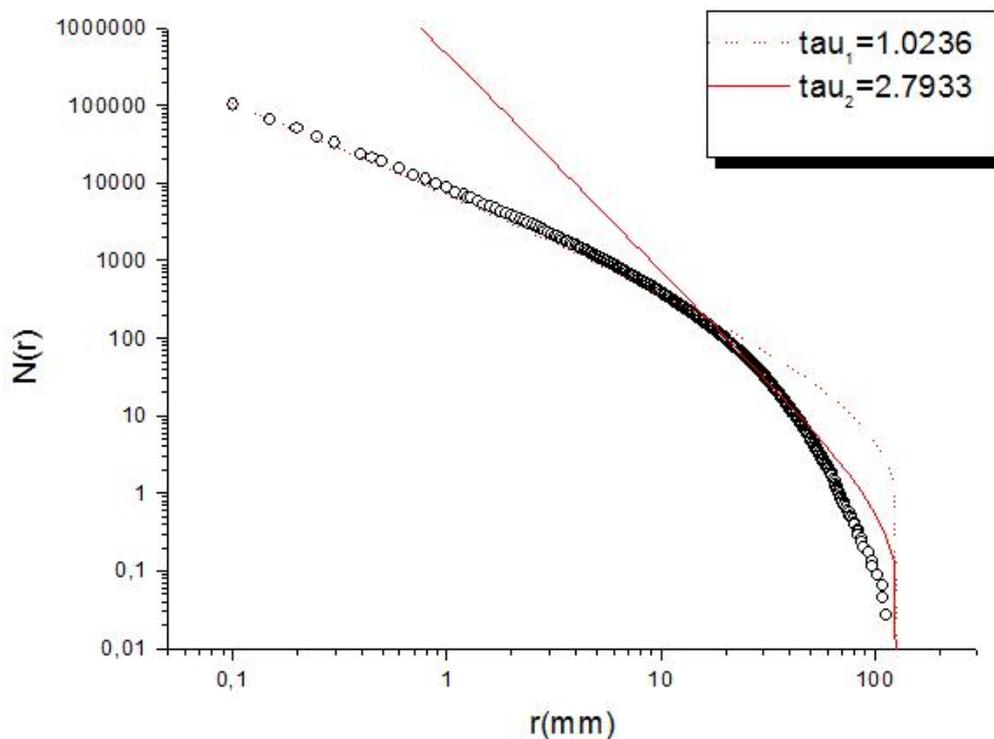


Figura 9: Gráfico Log-log da função de distribuição $N(r)$ para a quantidade de chuva diária r para estação em Piracicaba.

A distribuição das quantidades diárias de chuva estudadas neste trabalho acaba por ser completamente do tipo de escala bimodal. A figura 9 apresenta resultados típicos pelos registros exemplificados em Piracicaba-SP, Brasil. A decomposição sazonal não influencia

nas mudanças das características básicas das estatísticas, embora os expoentes $\bar{\tau}_1$ e $\bar{\tau}_2$ passam através de um ciclo anual. A modelagem hiperbólica dos dados experimentais para as pequenas e grandes quantidades de chuva é certamente aceitável.

Na Figura 10 é retratado um resultado para a função de distribuição da seca $N(I)$ na região de Piracicaba-SP, Brasil. Os valores dos expoentes τ_1 e τ_2 são mais próximos do que para a intensidade da chuva ($\tau_1 = 1,47, \tau_2 = 1,85$) estando também em acordo com os resultados apresentados por (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998): em que, $\tau \approx 1,5 - 2,5$ para várias localidades no Nordeste brasileiro.

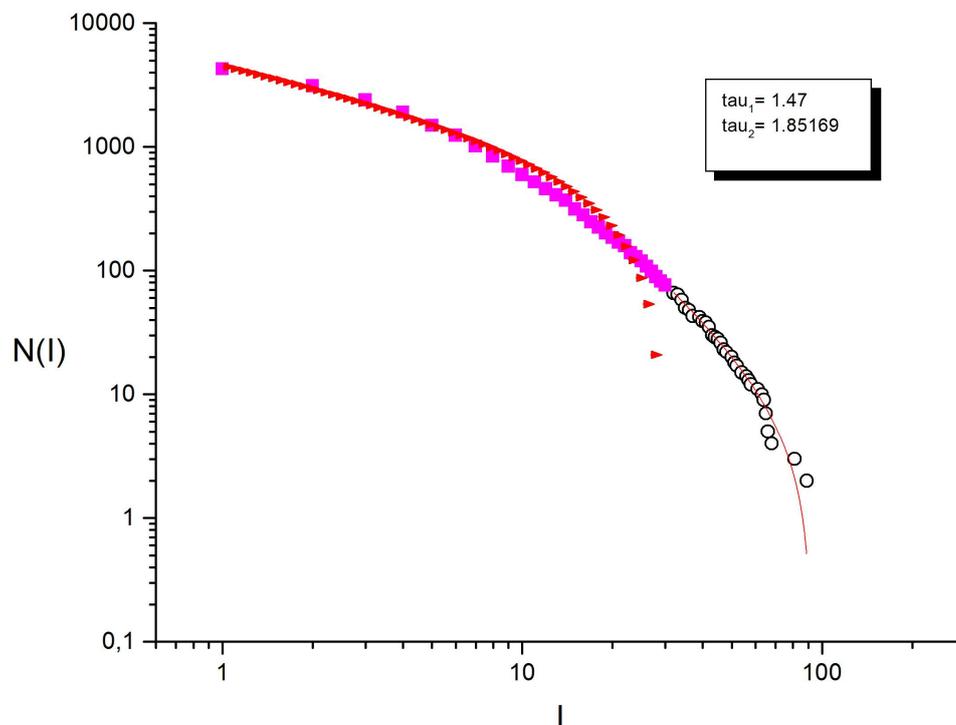


Figura 10: Gráfico Log-log da função de distribuição $N(I)$ para intervalos contínuos I sem precipitação.

De maneira geral, ao invés de ser considerada como uma propriedade independente do conjunto “complementar” de dias chuvosos, este resultado deve ser tomado como uma forte evidência que os sistemas SOC estão por trás dos fenômenos da precipitação em diversas partes do mundo. Com efeito, recorda-se que, no quadro dos sistemas SOC, as

estatísticas do tempo de espera devem ter as mesmas características das do tamanho das avalanches.

Uma consequência prática importante é que as probabilidades dos eventos de seca extrema decaem apenas de forma hiperbólica, por isso, analisando sob uma perspectiva a longo prazo mostram que os desastres são inevitáveis. Em compensação, a forma concisa das estatísticas dos eventos de seca observados facilitam todos os tipos de análise de risco levando em conta um ponto fundamental: a distribuição da água.

Estes resultados indicam que a dinâmica da chuva pode ser decorrente de um processo do tipo de criticalidade auto-organizada. Esta hipótese tem sido recentemente fundamentada com dados de alta frequência ganhando assim mais atenção na literatura científica (GARCÍA-MARÍN; JIMÉNEZ-HORNERO; AYUSO, 2008; DEIDDA; BADAS; PIGA, 2006).

5 CONCLUSÃO

Atividades econômicas e sociais de uma determinada população podem ser afetadas pela variabilidade climática, de maneira geral nas diversas atividades agrícolas, na geração de energia e, indiretamente, em todo o setor de produção. A variabilidade da precipitação pluvial é um dos fenômenos físicos que decorre da variabilidade climática caracterizando-se por ser um importante fator no controle do ciclo hidrológico e, exerce grande influência na qualidade do meio ambiente. As interações que ocorrem entre os sistemas meteorológicos e os elementos da paisagem geográfica (relevo, latitude, temperatura, etc.) caracterizam o clima de uma região.

No Brasil, a distribuição e a variabilidade de chuvas estão associadas a Frente Polar Atlântica (FPA) interligadas à atuação e a sazonalidade dos sistemas convectivos de macro e mesoescala, o qual explica as diferenças entre os regimes pluviométricos encontrados que se expressam na variabilidade climática brasileira e dos tipos chuvosos, semi-áridos, tropicais e subtropicais.

As séries de dados que são geradas por sistemas complexos (suas propriedades não são uma consequência natural dos seus elementos constituintes vistos isoladamente) mostram flutuações de longo alcance de escala temporal e/ou grandes distribuições de valores. Nos últimos vinte anos, a teoria multifractal, desenvolvida inicialmente para modelar as flutuações de velocidade em fluxo turbulento, tem sido largamente utilizada para modelar a distribuição temporal e espacial das chuvas. O sistema multifractal é caracterizado por um conjunto infinito de expoentes fractais. Os métodos multifractais também são ajustados para análise de extremos, oferecendo ferramentas práticas para avaliar a sua probabilidade de ocorrência.

O comportamento de sistemas que apresentam Criticalidade Auto-Organizada está atrelado a existência de distribuições invariantes de escala em leis de potência, a tendência que existe entre os sistemas em desequilíbrio que são impulsionados lentamente pela entrada constante de energia para se organizarem em estado crítico caracterizada pela liberação de energia em avalanches sem escala típica. Vários fenômenos naturais como

terremotos, incêndios florestais, deslizamentos tem sido discutidos se exibem ou não um comportamento de criticalidade auto-organizada.

Neste trabalho investigamos duas metodologias. Inicialmente verificamos se a dinâmica temporal da precipitação no Brasil possui propriedades multifractais; em seguida, analisamos a aplicação do conceito SOC nos eventos da quantidade diária de chuva e da duração de seca (dias sem chover). Analisamos a série temporal (sem sazonalidade) das quantidades diárias de precipitação coletadas na região de Piracicaba-SP, no período de 1917 – 2009, aplicando o método *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)*, proposto para analisar séries temporais não estacionárias e de longo alcance. Os resultados da aplicação de MF-DFA mostram que para as escalas menores de aproximadamente 8 meses, a dinâmica de chuva é gerada por um processo multifractal (o expoente de Hurst generalizado, $h(q)$, diminui com o aumento de ordem q) significando que pode ser modelada utilizando os modelos de cascata (KANTELHARDT *et al.*, 2006). Para as escalas maiores o valor de $h(q)$ está entre 0,35-0,55 o que indica a multifractalidade mais fraca. A medida $\tau(q)$ também confirma a multifractalidade da série, uma vez que, apresenta um comportamento não-linear. Estes resultados contribuem com informações importantes sobre os processos estocásticos que geram esse fenômeno. Dessa forma, a propriedade multifractal deve ser incorporada em modelos teóricos e simulações computacionais da dinâmica da precipitação.

Os resultados de análise de distribuição da intensidade da chuva e dos dias de seca mostram uma distribuição hiperbólica significando que a dinâmica de chuva em Piracicaba é resultado dos processos característicos para os sistemas com Criticalidade Auto-Organizada. Esta propriedade pode ser gerada pelos processos multifractais (BARTOLOZI, 2007). No caso da intensidade da chuva, dois expoentes distintos são necessários para descrever a distribuição dos valores. A razão $\bar{\tau} = \bar{\tau}_2/\bar{\tau}_1 = 2,79/1,02 = 2,73$ está em acordo com os resultados obtidos para as regiões tropicais e subtropicais de países como Austrália, Índia e especificamente Brasil onde a precipitação convectiva é abundante, os valores de τ encontram-se na faixa de 2 – 3 (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998). A distribuição dos dias de seca é também descrita com dois expoentes distintos, porém os valores dos expoentes τ_1 e τ_2 são mais próximos do que para a intensidade da chuva ($\tau_1 = 1,47, \tau_2 = 1,85$) estando também em acordo com os resultados apresentados por (ANDRADE; SCHELLNHUBER; CLAUSSEN, 1998): em que, $\tau \approx 1,5 - 2,5$ para várias localidades no Nordeste brasileiro. Uma consequência prática importante é que as probabilidades dos eventos extremos de seca e da intensidade da chuva decaem apenas de forma hiperbólica, por isso, analisando sob uma perspectiva a longo prazo mostram que os desastres são in-

evitáveis. Em compensação, a forma concisa das estatísticas dos eventos observados facilitam todos os tipos de análise de risco.

Referências

- ANDRADE, R. F. S.; SCHELLNHUBER, H. J.; CLAUSSEN, M. Analysis of rainfall records: possible relation to self-organized criticality. **Physica A: Statistical and Theoretical Physics**, v. 254, n. 3-4, p. 557 – 568, 1998. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-3WH57H0-H/2-/fc91664423eb7c7302749ea14f997213>>.
- AYOADE, J. O. **Introdução à Climatologia para os Trópicos**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2010.
- BACRY, E.; DELOUR, J.; ARNEODO, A. Multifractal random walk. **Phys. Rev E**, APS Journal, 2001. ISSN 026103.
- BAK, P. **How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality**. New York: Copernicus Press, 1997.
- BAK, P.; CHEN, K.; TANG, C. A forest-fire model and some thoughts on turbulence. **Physics Letters A**, v. 147, n. 5-6, p. 297 – 300, 1990. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVM-46S59NY-205/2-/dcf0169f3660cfe103f5981ef380b610>>.
- BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 59, n. 4, p. 381–384, Jul 1987.
- BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 38, n. 1, p. 364–374, Jul 1988.
- BARABÁSI, A.; VICSEK, T. Multifractality of self-affine fractals. **Phys. Rev A**, APS Journals, p. 2730, 1991.
- BARNDORFF-NIELSEN, O.; HALGREEN, C. Infinity divisibility of the hyperbolic and generalized inverse gaussian distributions. **Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete**, p. 309–311, 1977.
- BARTOLOZI, M. Scale-free avalanches in the multifractal random walk. **European Journal of Physics B**, v. 57, p. 337–345, 2007.
- BENZI, R. *et al.* On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 17, p. 3521–3531, 1984.
- BERAN, J. **Statistics for long-memory process**. New York: Chapman & Hall, 1994.
- BERNE, A. *et al.* Temporal and spatial resolution of rainfall measurements required for urban hydrology. **Journal of Hydrology**, v. 299, p. 166–179, 2004.

- BOX, G.; JENKINS, G.; REINSEL, G. **Time series analysis: forecasting and controls**. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- BRITTO, F.; BARLETA, R.; MENDONÇA, M. Regionalização sazonal e mensal da precipitação pluvial máxima no estado do rio grande do sul. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 2, p. 35–50, 2007.
- CAMUFFO, D. History of the long series of daily air temperature in padova (1725 to 1998). **Climatic Change**, Springer Netherlands, v. 53, p. 7–75, 2002. ISSN 0165-0009. 10.1023/A:1014958506923. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/A:1014958506923>>.
- CARLSON, J. M.; LANGER, J. S. Properties of earthquakes generated by fault dynamics. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 62, n. 22, p. 2632–2635, May 1989.
- DEIDDA, R.; BADAS, M.; PIGA, E. Space-time multifractality of remotely sensed rainfall fields. **Journal of Hidrology**, v. 322, p. 2–13, April 2006.
- DESUROSNE, L.; SCHMITT, F. Multifractals and extreme rainfall events. **Geophysical Research Letters**, v. 20, p. 931–934, 1993.
- DOUGLAS, E.; BARROS, A. Probable maximum precipitation estimation using multifractals: Applications in the eastern united states. **Journal of Hydrometeorology**, v. 4, p. 1012–1024, 2003.
- DROSSEL, B.; SCHWABL, F. Self-organized critical forest-fire model. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 69, n. 11, p. 1629–1632, Sep 1992.
- ESSENWANGER, O. **Classification of Climates in World Survey of Climatology vol 1C**. Amsterdam: Elsevier, 2001.
- FEDER, J. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.
- GARCÍA-MARÍN, A.; JIMÉNEZ-HORNERO, F.; AYUSO, J. L. Applying multifractality and the self-organized criticality theory to describe the temporal regime rainfall in andalusia (souther spain). **Hydrol. Process.**, Wiley InterScience, p. 295–308, 2008.
- GUNTNER, A. *et al.* Based disaggregation of continuous rainfall time series: the influence of climate. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 5, p. 145–164, 2001.
- GUPTA, V.; WAYMIRE, E. A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. **Journal of Applied Meteorology**, v. 32, p. 251–267, 1993.
- HU, K. *et al.* Effects of trends on detrended fluctuation analysis. **Phys. Rev. E**, APS Journal, 2001. ISSN 01114.
- HURST, H. Long-term storage capacity of reservoirs. **Transactions of the American Society of Civil Engineering**, v. 116, p. 770–779, 1951.
- JARDIM, C. **O clima na bacia do rio Aricanduva, na cidade de São Paulo (SP): Aspectos da gênese e dinâmica do clima urbano**. Dissertação (Mestrado) — Pós-Graduação em Geografia Física - FFLCH - USP, 2002.

- KANTELHARDT, J. Fractal and multifractal time series. **Springer's Encyclopedia of Complexity and System Science**, Springer, p. 59, 2008.
- KANTELHARDT, J. *et al.* Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records. **Journal of Geophysical Research**, v. 111, 2006.
- KANTELHARDT, J. *et al.* Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. **Phys. A**, APS Journal, 2001.
- KANTELHARDT, J. *et al.* Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series. **Phys. A**, APS Journal, 2002.
- KOSCIELNY-BUNDE, E. e. a. Long-term persistence and multifractality of river runoff records: Detrended fluctuation studies. **J. Hydrology**, Springer, p. 120–137, 2006.
- LARA, L. *et al.* Chemical composition of rainwater and anthropogenic influences in the piracicaba river basin. **Southeast Brazil. Atmospheric Environment**, v. 35, p. 4937–4935, 2001.
- MALAMUD, B. D.; TURCOTTE, D. L. Self-organized criticality applied to natural hazards. **Natural Hazards**, Springer Netherlands, v. 20, p. 93–116, 1999. ISSN 0921-030X. 10.1023/A:1008014000515. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/A:1008014000515>>.
- MARTINELLI, L. A. *et al.* The piracicaba river basin: isotope hydrology of a tropical river basin under anthropogenic stress. **Isotopes in Environmental and Health Studies**, v. 40, p. 45–56, 2004.
- MENDONÇA, F. Aquecimento global e suas manifestações regionais e locais. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 2, p. 71–86, 2007.
- MENDONÇA, F.; OLIVEIRA, D.; MORESCO, I. **Climatologia: Noções Básicas e Climas do Brasil**. São Paulo: Oficina de Textos, 2009.
- MONTEIRO, C. A. F. Análise ritmica em climatologia: problemas da atualidade climática em são paulo e achegas para um programa de trabalho. **Climatologia**, USP, p. 1–21, 1971.
- MORETTIN, P.; TOLOI, C. **Análise de Séries Temporais**. São Paulo: Edgar Bucher, 2004.
- MORIASI, D. N.; STARKS, P. J. Effects of the resolution of soil dataset and precipitation dataset on swat2005 streamflow calibration parameters and simulation accuracy. **Journal of Soil and Water Conservation**, v. 65, p. 63–78, 2010.
- MUZY, J.; BACRY, E.; ARNEODO, A. The multifractal formalism revisited with wavelets. **Int. J. Bifurcation & Chaos**, 1994. ISSN 245-302.
- MUZY, J.; BACRY, E.; ARNEODO, A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. **Phys. Rev. Lett.**, APS Journal, 2001.
- NIMER, E. **Climatologia do Brasil**. Rio de Janeiro: IBGE, 1989.
- OLSSON, J.; NEMCZYNOWICZ, J. Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions. **Journal of Hydrology**, v. 187, p. 29–43, 1996.

- PASTOR-SATORRAS, R. Multifractal properties of power-law time sequences: Application to rice piles. **Physical review E**, v. 56, p. 5284–5294–345, 1997.
- PÉDELABORDE, P. **Introdução à létude scientifique du climat**. Paris: SEDES, 1970.
- PEITGEN, H.; JURGENS, H.; SAUPE, D. **Chaos and fractals**. Berlin: Springer, 2004.
- PENG, C. *et al.* Mosaic organization of dna nucleotides. **Phys. A**, APS Journal, 1994.
- PETERS, O. *et al.* Universality of rain event size distribution. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, October 2010.
- PETERS, O.; HERTLEIN, C.; CHRISTENSEN, K. A complexity view of rainfall. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 88, n. 1, p. 018701, Dec 2001.
- PLOURDE, B.; NORI, F.; BRETZ, M. Water droplet avalanches. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 71, n. 17, p. 2749–2752, Oct 1993.
- PRUPPACHER, H.; KLETT, J. **Microphysics of Clouds and Precipitation**. New York: Springer, 1997.
- RANGAJARAN, G.; DING, M. Integrated approach to the assessment of the long-range correlations in time series data. **Phys. Rev. E**, v. 61, p. 4991–5001, 2000.
- SANTOS, J. W. M. C. **Clima e produtividade de soja nas terras de cerrado do Sudeste do Mato Grosso**. Tese (Doutorado) — Pós-Graduação em Geografia Física- FFLCH-USP, 2002. 338 p.
- SCHERTZER, D.; LOVEJOY, S. Physical modelling and analysis of rain and clouds by scaling multiplicative process. **Journal of Geophysical**, v. 92, p. 9639–9714, 1987.
- SILVA, A. **Mercados incompletos, distribuições hiperbólicas e aplicações para o caso brasileiro**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Pós-Graduação em Economia-FGV, 1999.
- SIVAKUMAR, B. Is a chaotic multi-fractal approach for rainfall possible? **Hydrological Process**, American Physical Society, v. 15, p. 943–955, April 2001.
- SORRE, M. **Les Fondements de La Geographie Humaine: Les Fondements Biologiques**. Paris: Armand Colin, 1957.
- STOSIC, T.; STOSIC, B. Multifractal analysis of human retinal vessels. **IEEE Trans Med Imaging**, p. 1101–1107, 2006.
- STRAHLER, A.; STRAHLER, A. **Modern Physical Geography**. Chichester: John Wiley & Sons, 1978.
- TELESCA, L. *et al.* On the scaling behavior of rain event sequence recorded in basilicata region (southern italy). **Journal of Hidrology**, Elsevier, v. 296, p. 234–240, 2004.
- TORRES, F.; MACHADO, P. **Introdução à Climatologia**. São Paulo: Geográfica, 2008.
- VEZENIANO, D.; LANGOUSIS, A.; FURCOLO, P. Multifractality and rainfall extremes: A review. **Water Resources Research**, v. 38, p. 1306–1317, 2002.