

**Glaucia Tadu de Souza**

**Nova Generalização para a Classe Beta- $G$  de  
Distribuições de Probabilidade**

**Recife**

**04 de março de 2016**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Nova Generalização para a Classe Beta- $G$  de Distribuições de Probabilidade**

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 04/03/2016 pela comissão examinadora.

**Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada**

**Orientador: Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior**

**Coorientador: Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito e Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva**

**Recife**

**04 de março de 2016**

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Nova Generalização para a Classe Beta- $G$  de Distribuições de Probabilidade**

Glaucia Tadu de Souza

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 04/03/2016 pela comissão examinadora.

Orientador:

---

**Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior**  
Orientador

Banca examinadora:

---

**Ronaldo Venâncio da Silva**  
Colégio Militar do Recife

---

**Frank Sinatra Gomes da Silva**  
UFRPE/DEINFO

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, João e Zélia,  
e aos meus amados sobrinhos, Leonardo e Giovanna.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por todos os feitos maravilhosos em minha vida e por Ele estar sempre comigo.

À minha família, João, Zélia, Arlington e Christiane, que me deu total apoio e incentivo durante toda a realização deste trabalho.

Aos meus sobrinhos, Leonardo e Giovanna. Os sorrisos destas crianças me encantam e enchem meus dias de alegria.

Aos Professores do Programa de Pós-graduação em Biometria e Estatística Aplicada, em especial, Wilson Rosa de Oliveira e Cícero Carlos Ramos de Brito por terem acreditado em mim, Frank Sinatra Gomes da Silva pela constante assistência, atenção, motivação e ensinamentos e a Tatijana Stosic pelo incentivo que me fez seguir adiante.

Aos amigos, Jéssica Melo pela paciência de me ouvir e por estar ao meu lado, Anna Karlla pelos momentos de diversão e puxões de orelhas, Roseana por suas orações, amizade e apoio e Ítalo pelo companheirismo e força para continuar essa jornada.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, em especial ao Departamento de Estatística e Informática, por ter dado todas as condições necessárias para a realização desta dissertação.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, por ter dado todas as condições necessárias para o desenvolvimento do curso e à CAPES pelos sete meses de apoio financeiro.

*“ Constante e perseverante nas virtudes, pois não  
é coroado quem começa, mas quem persevera.”  
(Sta. Catarina de Sena)*

# Resumo

Propusemos um novo gerador de distribuições contínuas com três parâmetros adicionais chamado Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G+\theta)$ , que generaliza a classe Beta- $G$ . Alguns casos especiais são apresentados. A nova função densidade pode ser expressa como uma diferença de combinações lineares de densidades exponencializadas através da mesma distribuição-base. Várias propriedades estruturais da nova classe, as quais valem para qualquer distribuição-base são derivadas, incluindo expressões explícitas para os momentos de ordem  $n$ , função geradora de momentos, função característica, momentos centrais de ordem  $n$ , coeficiente geral, desvios médios, função de vida residual, função de vida reversa e estatísticas de ordem. Discutimos a estimação dos parâmetros do modelo através do método de máxima verossimilhança e fornecemos uma aplicação a um conjunto de dados reais.

**Palavras-chaves:** Beta- $G$ ; distribuições generalizadas; máxima verossimilhança; momentos probabilisticamente ponderados; classe exponencializada generalizada.

# Abstract

We propose a new generator of continuous distributions with three extra parameters called the Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ , which generalizes the Beta- $G$  class. Some special cases are presented. The new density function can be expressed as a difference of linear combinations of exponentiated densities based on the same baseline distribution. Various structural properties of the new class, which hold for any baseline model, are derived including explicit expressions for the moments of order  $n$ , the moment generating function, the characteristic function, central moments of order  $n$ , the general coefficient, the mean deviations, residual life function, reverse life function and order statistics. We discuss estimation of the model parameters by maximum likelihood and provide an application to a real data set.

**Key-words:** Beta- $G$ ; generalized distributions; maximum likelihood; probability weighted moments; exponentiated generalized class.



# Lista de Figuras

Figura 1 – Função densidade da exponencial para alguns valores de $\lambda$ . . . . .	5
Figura 2 – Função densidade da Weibull para alguns valores de $\lambda$ e $c$ . . . . .	6
Figura 3 – Gráficos da densidade da distribuição beta para os parâmetros selecionados. . . . .	7
Figura 4 – Função densidade da Kumaraswamy para diferentes valores de $\lambda$ e $c$ . . . . .	8
Figura 5 – Função densidade da Burr XII para alguns valores de $\lambda$ e $c$ . . . . .	9
Figura 6 – Função densidade da Beta $(\theta(1-E), (1-\theta)E+\theta)$ variando os parâmetros de $a$ , $b$ , $\theta$ e $\lambda$ . . . . .	31
Figura 7 – Taxa de falha da Beta $(\theta(1-E), (1-\theta)E+\theta)$ para diferentes valores de $a$ , $b$ , $\theta$ e $\lambda$ . . . . .	32
Figura 8 – Função densidade da Beta $(\theta(1-W), (1-\theta)W+\theta)$ para diferentes valores de $a$ , $b$ , $\theta$ , $c$ e $\lambda$ . . . . .	33
Figura 9 – Taxa de falha da Beta $(\theta(1-W), (1-\theta)W+\theta)$ para alguns valores de $a$ , $b$ , $\theta$ , $c$ e $\lambda$ . . . . .	34
Figura 10 – Curvas da função densidade da Beta $(\theta(1-Kw), (1-\theta)Kw+\theta)$ para diferentes valores de $a$ , $b$ , $\theta$ , $c$ e $\lambda$ . . . . .	35
Figura 11 – Gráficos da função taxa de falha da Beta $(\theta(1-Kw), (1-\theta)Kw+\theta)$ para os parâmetros selecionados. . . . .	36
Figura 12 – Gráficos da função densidade da Beta $(\theta(1-Burr), (1-\theta)Burr+\theta)$ para alguns valores de $a$ , $b$ , $\theta$ e $\lambda$ . . . . .	37
Figura 13 – Taxa de falha da Beta $(\theta(1-Burr), (1-\theta)Burr+\theta)$ para alguns valores de $a$ , $b$ , $\theta$ e $\lambda$ . . . . .	38
Figura 14 – Ajuste das densidades para o histograma dos dados atuais. . . . .	49

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Taxa de pobreza de 533 distritos escolares com mais de 15.000 estudantes com faixa etária de 5 a 17 . . . . .	46
Tabela 2 – Estatísticas Descritivas . . . . .	47
Tabela 3 – EMVs (erros-padrão entre parênteses) . . . . .	48
Tabela 4 – Estatísticas K-S, $W^*$ e $A^*$ . . . . .	48
Tabela 5 – Estatísticas AIC, AICc, BIC e HQIC . . . . .	48

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão de literatura</b>	<b>4</b>
2.1	Modelos de probabilidade	4
2.1.1	Modelo exponencial	4
2.1.2	Modelo Weibull	5
2.1.3	Modelo beta	6
2.1.4	Modelo Kumaraswamy	7
2.1.5	Modelo Burr XII	8
2.2	Método de máxima verossimilhança	9
2.3	CrITÉrios para selecionar modelos	11
2.3.1	CrITÉrio de informação de Akaike - AIC	11
2.3.2	CrITÉrio de informação de Akaike corrigido - AICc	11
2.3.3	CrITÉrio de informação bayesiano - BIC	12
2.3.4	CrITÉrio de informação de Hannan-Quinn - HQIC	12
2.4	Testes de Anderson-Darling e Cramér Von Mises	12
2.4.1	Teste de Anderson-Darling	12
2.4.2	Teste de Cramér Von Mises	13
2.5	Teste de Wald Wolfowitz	13
2.6	Classes de distribuições generalizadas	14
2.6.1	Classes de distribuições exponencializadas	15
2.6.2	Classe de distribuição Beta Generalizada	16
2.6.3	Classe de distribuição McDonald	19
<b>3</b>	<b>Classe Beta <math>(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)</math></b>	<b>21</b>
3.1	Introdução	21
3.2	Função de distribuição acumulada da classe Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$	21
3.2.1	Expansão para a função de distribuição acumulada	23
3.3	Função densidade de probabilidade da classe Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$	24
3.3.1	Expansão para a função densidade	24
3.4	Propriedades de caracterização da classe	25
3.4.1	Expansão para os momentos de ordem $n$ e para a função geradora de momentos	26
3.4.2	Expansão para a função característica	28

3.4.3	Momentos centrais de ordem $n$ e coeficiente geral . . . . .	28
3.5	Casos especiais da classe Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ . . . . .	30
3.5.1	Distribuição Beta $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$ . . . . .	30
3.6	Distribuição Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$ . . . . .	31
3.7	Distribuição Beta $(\theta(1 - Kw), (1 - \theta)Kw + \theta)$ . . . . .	32
3.8	Distribuição Beta $(\theta(1 - Burr), (1 - \theta)Burr + \theta)$ . . . . .	34
3.9	Desvios médios . . . . .	35
3.10	Função de vida residual . . . . .	39
3.11	Função de vida residual reversa . . . . .	40
3.12	Estatísticas de ordem . . . . .	41
3.13	Estimação . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Aplicação . . . . .</b>	<b>46</b>
4.1	Distribuição Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$ aplicada a dados de pobreza . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusões, contribuições e trabalhos futuros . . . . .</b>	<b>50</b>
5.1	Conclusões . . . . .	50
5.2	Contribuições . . . . .	50
5.3	Trabalhos futuros . . . . .	51
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>52</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>56</b>
APÊNDICE A	Elementos da matriz de informação . . . . .	57
APÊNDICE B	Código R utilizado para a fdp, fda e taxa de falha dos casos especiais da Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ . . . . .	62
APÊNDICE C	Código R Utilizado na Aplicação a dados de pobreza do capítulo 4 . . . . .	65

# 1 Introdução

Recentemente tem crescido o interesse de pesquisadores na busca de novos geradores ou classes de distribuições generalizadas. Devido as facilidades computacionais há uma maior possibilidade de se obter distribuições de probabilidades mais complexas para melhor descrever um fenômeno ou um determinado experimento. Por essa razão, generalizar distribuições surge como proposta, pois fornece maior flexibilidade entre o modelo e a massa de dados, além de possibilitar diversas formas para a taxa de falha.

A ideia de generalizar surgiu quando [Gompertz \(1825\)](#) exponenciou a função de distribuição acumulada (fda) da exponencial a um número real positivo e diferente de zero, criando a distribuição exponencial exponencializada (EE). Neste caso, a exponencial é a distribuição-base representada por  $G(x)$ . O resultado foi obter uma distribuição tão simples quanto a original com a vantagem de ter dois parâmetros. Outro benefício recai sobre a taxa de falha, enquanto a exponencial sempre assume a forma de uma reta constante, a exponencial exponencializada apresenta além da constante, forma monótona crescente e decrescente. A adição de parâmetros à distribuição-base tem sido bastante útil no sentido de explorar propriedades de assimetria, curtose, cauda e principalmente melhorar o ajuste. A geradora da distribuição exponencial exponencializada é a classe exponencializada generalizada (Exp- $G$ ).

A partir da distribuição obtida por Gompertz, várias outras distribuições vem surgindo e as propriedades matemáticas destas novas distribuições generalizadas podem ser facilmente exploradas usando as propriedades das exponencializadas generalizadas.

Seguindo a orientação da Exp- $G$ , importantes classes generalizadas como a beta e a McDonald possibilitam uma maior flexibilidade aos dados, em virtude da adição de parâmetros. Os trabalhos com a beta generalizada (Beta- $G$ ) iniciaram com o [Eugene, Lee e Famoye \(2002\)](#) por meio da beta normal, baseada na composição da distribuição beta com a distribuição normal. O resultado dessa combinação proporcionou um modelo que pode ser uni ou bimodal, uma importante vantagem sobre a distribuição normal, a qual apresenta apenas característica unimodal. Em seguida outros autores contribuíram com estudos de casos particulares da Beta- $G$  tais como [Nadarajah e Kotz \(2006\)](#) com a beta exponencial, [Famoye, Lee e Olumolade \(2005\)](#) com a beta weibull e [Gomes et al. \(2013\)](#) com a beta burr III.

A classe beta-gerada generalizada ou McDonald- $G$  (Mc- $G$ ) foi definida por [Ale-](#)

xander et al. (2012). Estes autores introduziram no limite superior da Beta- $G$  uma distribuição-base do tipo  $G^c(x)$ , sendo  $c$  um parâmetro real positivo. A Mc- $G$  é uma reparametrização da Beta- $G$ . Substituindo  $c = 1$  na Mc- $G$ , obtemos a Beta- $G$ .

Recentemente Barros (2014) apresentou a classe de distribuições Marshall-Olkin generalizada exponencializada e obteve uma generalização da família de distribuições de Marshall-Olkin (MARSHALL; OLKIN, 1997). Brito (2014b) expôs em seu trabalho duas novas distribuições de probabilidade: a McGumbel e a gama Burr XII e uma nova família de distribuição, a Marshall-Olkin binomial negativa e Barros (2015) propôs a classe Weibull  $(\delta(1-G), \delta - \log(1-G))$ , a classe complementar Weibull  $(\delta G, \delta - \log(G))$ , a classe Weibull  $(\delta(1-G), \delta + \frac{G}{(1-G)})$  e a classe complementar Weibull  $(\delta G, \delta + \frac{1-G}{G})$  e apresentou as propriedades da classe Weibull  $-\log(1-G)$  introduzida por Alzaatreh, Lee e Famoye (2013).

O objetivo geral deste trabalho é propor uma nova classe de distribuição Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$  gerada a partir do método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas apresentado em Brito (2014a). A distribuição beta é muito utilizada pelos estatísticos por ser bastante versátil e possuir características que se aproximam da realidade dando-lhe maior aplicabilidade, por isso nossa motivação em estudá-la e contribuir com uma nova classe.

Nas próximas linhas apresentaremos a organização dessa dissertação. O segundo capítulo desta dissertação é dedicado a revisão da literatura relatando de forma breve modelos probabilísticos contínuos, o método de estimação de máxima verossimilhança que será utilizado neste trabalho. Em seguida, apresentamos os critérios estatísticos utilizados para comparar o ajuste dos modelos nas aplicações a dados reais e por último um breve histórico e propriedades das classes de distribuições generalizadas que serviram de base para a classe proposta.

No terceiro capítulo apresentamos a classe de distribuição Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$ , bem como as expansões para a função de distribuição acumulada e função densidade de probabilidade e as propriedades de caracterização da classe tais como momentos de ordem  $n$ , função geradora de momentos, função característica, momentos centrais de ordem  $n$ , coeficiente geral, desvios médios, função de vida residual, função de vida residual reversa e estatística de ordem. Ainda nesse capítulo são mostrados alguns casos especiais da classe proposta como exemplos de aplicação, bem como gráficos da função de distribuição acumulada, a densidade e as respectivas taxas de falha dessas famílias.

Em seguida, no capítulo quatro, mostramos uma aplicação utilizando dados reais e comparando um caso particular do modelo proposto a outros modelos já conhecidos na literatura.

No último capítulo, exibimos as conclusões a partir das análises e comparações dos resultados obtidos, apontando assim, outras possibilidades de pesquisa, bem como contribuições e trabalhos futuros.

## 2 Revisão de literatura

### 2.1 Modelos de probabilidade

Um modelo de probabilidade é uma formulação que descreve fenômenos do mundo real, de modo a ser possível representar, interpretar e fazer previsões, podendo ser utilizado nos mais diversos campos do conhecimento. Nesta seção serão apresentados alguns modelos contínuos caracterizados por suas funções de densidade de probabilidade (fdp) e função de distribuição acumulada (fda).

#### 2.1.1 Modelo exponencial

O modelo exponencial (E) é um dos mais simples em termos matemáticos, dentre as distribuições conhecidas. A exponencial tem sido bastante utilizada para modelar uma grande classe de fenômenos como, por exemplo, o tempo de vida de equipamentos e o tempo de realização de determinada tarefa. Este modelo tem grande aplicabilidade em engenharia e em confiabilidade.

A variável aleatória  $X$  segue o modelo exponencial de parâmetro  $\lambda > 0$ , se tiver densidade dada por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (2.1)$$

para  $x > 0$ .

A Figura 1 mostra algumas densidades da exponencial variando-se o valor de  $\lambda$ .

O parâmetro  $\lambda$  indica a taxa de ocorrência por unidade de medida. A expressão da fda é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Uma característica da exponencial é a propriedade

$$P(X > x_{t+n} | X > x_t) = P(X > x_n),$$

para quaisquer  $t, n > 0$ , essa propriedade é conhecida como perda de memória, significando que o tempo de vida futuro  $x_{t+n}$  tem a mesma distribuição, independente do tempo de vida passada  $x_t$ .



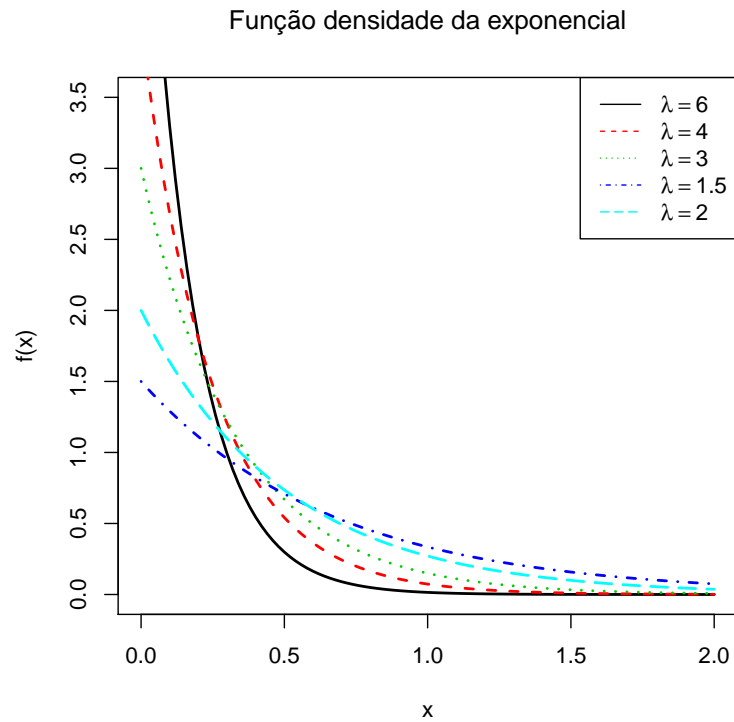


Figura 1: Função densidade da exponencial para alguns valores de  $\lambda$ .

Outra característica do modelo exponencial consiste na taxa de falha que é constante.

### 2.1.2 Modelo Weibull

A distribuição Weibull ( $W$ ) é muito popular devido a Waladdi Weibull, um físico sueco. Ele a utilizou em 1939 para analisar a resistência à ruptura de materiais. O campo de aplicação da distribuição Weibull é vasto e abrange quase todas as áreas da ciência como engenharia, confiabilidade e análise de sobrevivência. Atualmente é a mais utilizada no setor florestal. A popularidade da Weibull deve-se ao fato da grande variedade de formas que assume e todas as formas apresentam função de taxa de falha monótona.

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Weibull,  $X \sim W(\lambda, c)$ , sua fdp é definida por

$$f(x) = c\lambda^c x^{c-1} e^{-(\lambda x)^c},$$

em que  $\lambda, c > 0$  são parâmetros de escala e de forma, respectivamente. A Figura 2 mostra algumas variações da função densidade da distribuição Weibull.

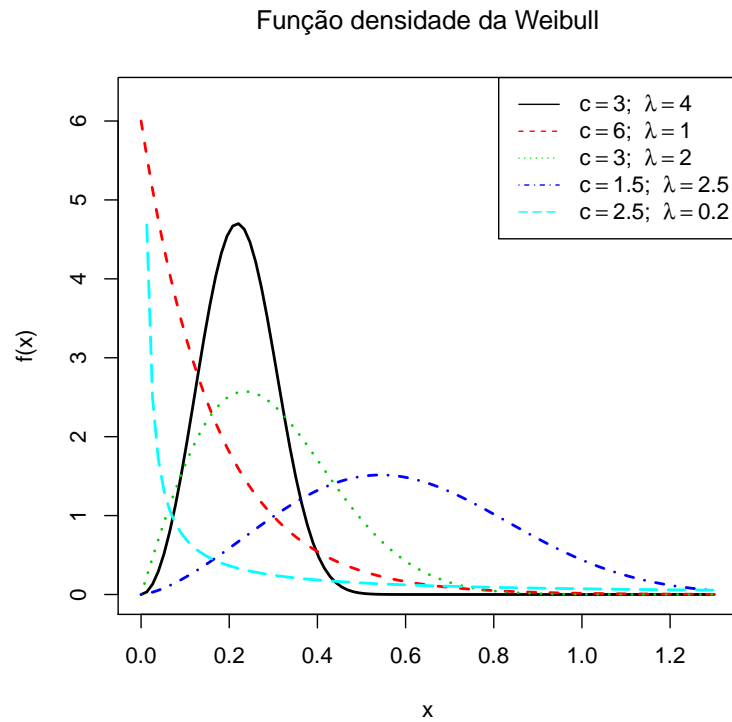


Figura 2: Função densidade da Weibull para alguns valores de  $\lambda$  e  $c$ .

A distribuição exponencial da Equação (2.1) é um caso particular da Weibull, para a situação onde o parâmetro  $c$  assume valor um.

A função de distribuição acumulada da Weibull é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^c}.$$

A taxa de falha da distribuição Weibull é estritamente crescente para  $c > 1$  e estritamente decrescente para  $c < 1$  e para  $c = 1$ , a taxa é constante, que é quando a distribuição Weibull se torna a distribuição exponencial.

### 2.1.3 Modelo beta

A distribuição beta é uma família de distribuições contínuas com dois parâmetros de forma  $a > 0$  e  $b > 0$ . A beta é uma distribuição de grande utilidade e versatilidade. Sua importância se deve ao fato de ter conexões com outras distribuições de probabilidade e de modelar o comportamento de variáveis aleatórias limitadas por intervalos de comprimento finito, em especial o intervalo  $(0, 1)$  o qual a beta está definida. Ela tem sido aplicada em diversas áreas como Genética, Inferência, Biologia e em Engenharia Florestais.

A distribuição beta não apresenta uma forma analítica fechada para a fda. Sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad \text{para } x \in (0, 1). \quad (2.2)$$

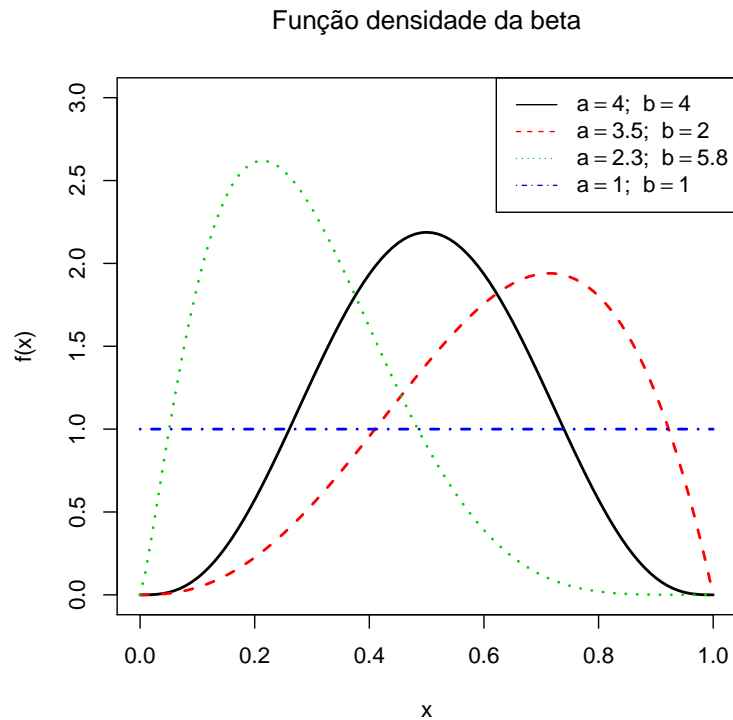


Figura 3: Gráficos da densidade da distribuição beta para os parâmetros selecionados.

A Figura 3 apresenta algumas formas para a densidade dada na Equação (2.2). Se  $a = b$ , a distribuição é simétrica. Se  $a > b$ , a assimetria é negativa e, no caso de  $a < b$ , a assimetria é positiva. Um caso particular da beta é a distribuição uniforme definida no intervalo  $(0, 1)$ , acontece quando  $a = b = 1$ .

#### 2.1.4 Modelo Kumaraswamy

Essa distribuição foi originalmente proposta por Poondi Kumaraswamy em 1980 para aplicações em hidrologia e é pouco conhecida na literatura estatística. A distribuição Kumaraswamy (Kw) pode ser usada como uma aproximação para a distribuição beta. Nesse caso, a aproximação não envolverá funções complicadas pois, a Kumaraswamy apresenta formas fechadas simples para a função densidade e para a acumulada.

Se  $X$  é a variável aleatória contínua com distribuição Kumaraswamy, em que  $X \in (0, 1)$ , ou seja,  $X \sim Kw(\lambda, c)$ , então sua fdp e a fda são dadas, respectivamente, por

$$f(x) = \lambda c x^{\lambda-1} (1 - x^\lambda)^{c-1}$$

e

$$F(x) = 1 - (1 - x^\lambda)^{c-1},$$

sendo  $\lambda, c > 0$ , os parâmetros de forma da distribuição. A Figura 4 apresenta algumas formas para a densidade dessa distribuição.

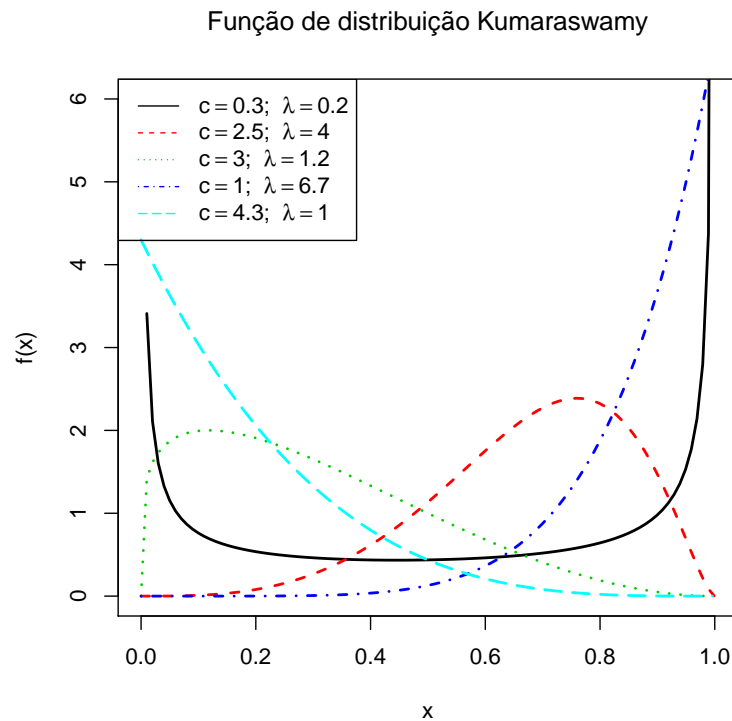


Figura 4: Função densidade da Kumaraswamy para diferentes valores de  $\lambda$  e  $c$ .

A Kumaraswamy é capaz de acomodar as taxas de falha monótonas e não monótonas.

### 2.1.5 Modelo Burr XII

A distribuição Burr tipo XII ou Burr XII é um membro de um sistema de distribuições contínuas introduzidas por Irving W. Burr, em 1942, que compreende 12 distribuições. A Distribuição Burr XII (Burr) é considerada uma distribuição flexível no ajuste de dados e recebeu maior atenção devido à sua ampla aplicabilidade em diferentes áreas tais como confiabilidade e modelagem de tempo de falha. Sua função densidade é dada por

$$f(x) = c\lambda \frac{x^{c-1}}{(1+x^c)^{\lambda+1}}, \quad \text{para } x > 0$$

e sua função acumulada é definida por

$$F(x) = 1 - (1+x^c)^{-\lambda}, \quad \text{para } x > 0$$

em que  $\lambda, c > 0$  são os parâmetros de forma. A Figura 5 mostra diferentes formas para as densidade da Burr XII.

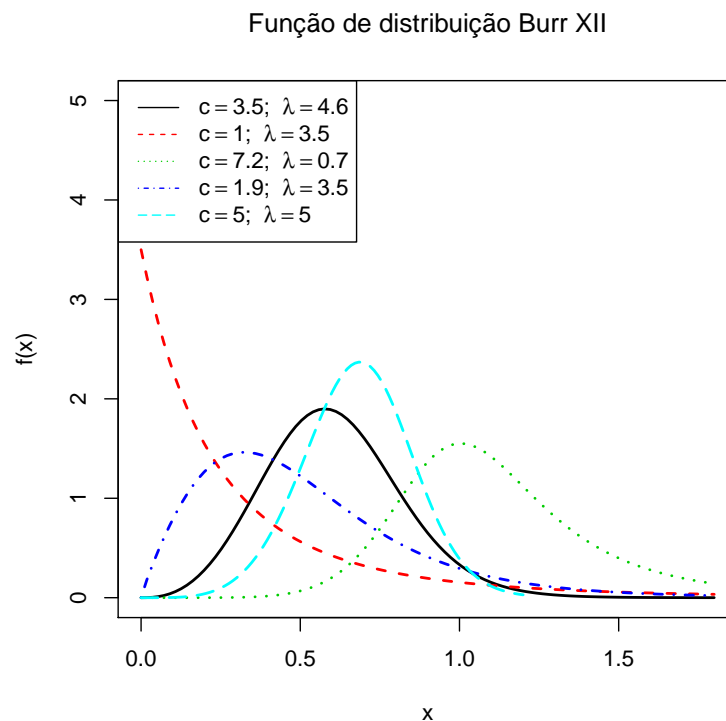


Figura 5: Função densidade da Burr XII para alguns valores de  $\lambda$  e  $c$ .

## 2.2 Método de máxima verossimilhança

O método de máxima verossimilhança é utilizado para estimar os parâmetros que melhor expliquem a amostra observada. Esse método baseia-se na função de verossimilhança fornecendo estimativas pontuais e intervalares, além da construção de testes de hipóteses.

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma amostra independente e identicamente distribuída (iid) gerada a partir de uma função fdp conhecida,  $f(x, \underline{\theta})$ , de alguma família de distribuições  $\mathcal{F}$ , dependente de um vetor de parâmetros desconhecidos  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^\top$ . Define-se

também,  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$  o espaço paramétrico representando o conjunto de valores possíveis do vetor  $\underline{\theta}$ . A função de verossimilhança de  $\underline{\theta}$  pode ser escrita como

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \underline{\theta}),$$

em que  $f_i$  representa a fdp individual da  $i$ -ésima observação.

Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) são os valores de  $\underline{\theta}$  que maximizam  $L(\underline{\theta})$ . Normalmente, usa-se o logaritmo da função de verossimilhança  $l(\underline{\theta}) = \log(L(\underline{\theta}))$ , chamada de função de log-verossimilhança. Como a função logaritmo é monótona crescente, maximizar  $l(\underline{\theta})$  ou  $L(\underline{\theta})$  em  $\Theta$  são processos equivalentes. A função de log-verossimilhança, também chamada de função suporte é definida por

$$l(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log(f_i(x_i; \underline{\theta})).$$

Os estimadores são encontrados resolvendo-se o sistema de equações

$$U(\underline{\theta}) = \frac{dl(\underline{\theta})}{d(\underline{\theta})} = 0$$

O estimador precisa ter algumas propriedades para representar satisfatoriamente a amostra. São elas:

- **Vício:** Um estimador é não viciado ou não viesado para um parâmetro  $\theta$  se

$$E(\hat{\theta}) = \theta;$$

- **Consistência:** Sendo  $n$  o tamanho da amostra, um estimador é dito consistente se

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta;$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0;$

- **Eficiência:** Dois estimadores  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ , não viciados para o parâmetro  $\theta$ . Dizemos que  $\hat{\theta}_1$  é mais eficiente do que  $\hat{\theta}_2$  se

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2).$$

## 2.3 Critérios para selecionar modelos

Muitos procedimentos têm sido utilizados com o objetivo de escolher o modelo mais adequado para analisar um conjunto de dados. Se o tamanho da amostra for grande e as condições de regularidade forem mantidas, o EMV se torna assintoticamente eficiente e a função de verossimilhança tende a ser um critério com maior sensibilidade a pequenos desvios dos parâmetros. Dentre os modelos a serem selecionados, aquele que obtiver o menor valor, em qualquer um dos critérios apresentados a seguir, será indicado como o que melhor se ajustará aos dados.

### 2.3.1 Critério de informação de Akaike - AIC

[Akaike \(1972\)](#) apresentou seu método de identificação de modelos chamado critério de informação e em [Akaike \(1974\)](#) propôs utilizar a informação de Kullback-Leibler para a seleção de modelos, estabelecendo uma relação entre a máxima verossimilhança e esta estatística. O critério de informação de Akaike (AIC) é uma estatística bem conhecida e de fácil interpretação para seleção de modelos de regressão.

Considerando uma amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  de tamanho  $n$  e o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}$ , a estatística AIC pode ser calculada por

$$AIC = -2 \log(L(\hat{\theta})) + 2p,$$

em que  $\log(L(\hat{\theta}))$  é a função de log-verossimilhança maximizada de  $\theta$  e  $p$  é o número de parâmetros a serem estimados.

### 2.3.2 Critério de informação de Akaike corrigido - AICc

O critério de Akaike corrigido (AICc) é uma correção para populações finitas do AIC proposta por [Sugiura \(1978\)](#) dado por

$$AIC_c = -2 \log(L(\hat{\theta})) + \frac{2np}{n - p - 1},$$

em que  $\log(L(\hat{\theta}))$  é a função de log-verossimilhança do modelo escolhido,  $p$  é o número de parâmetros a serem estimados e  $n$  é o número de observações da amostra.

Segundo [Burnham e Anderson \(2002\)](#), quando  $n$  for pequeno deve-se utilizar o AICc, visto que este converge para o AIC quando  $n \rightarrow \infty$ , não havendo diferença em utilizar AICc no lugar do AIC. De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -2 \log(L(\hat{\theta})) + \frac{2np}{n - p - 1} \right] = -2 \log(L(\hat{\theta})) + 2p.$$

### 2.3.3 Critério de informação bayesiano - BIC

Esse critério foi proposto por [Schwarz \(1978\)](#). O procedimento de avaliação de modelos é definido em termos da probabilidade a posteriori. Schwarz forneceu um argumento bayesiano para prová-lo. O BIC é expresso por

$$BIC = -2 \log(L(\hat{\theta})) + p \log n,$$

em que  $\log(L(\hat{\theta}))$  é a função de log-verossimilhança,  $p$  é o número de parâmetros e  $n$  é o número de observações da amostra.

Uma característica do BIC é que ele penaliza os modelos com maior número de parâmetros.

### 2.3.4 Critério de informação de Hannan-Quinn - HQIC

Proposto por [Hannan e Quinn \(1979\)](#), o critério de informação de Hannan-Quinn (HQIC) é um alternativo ao AIC e BIC. Definido como

$$HQIC = -2p \log(\log n) - 2 \log(L(\hat{\theta})),$$

em que  $\log(L(\hat{\theta}))$ ,  $p$  e  $n$  são respectivamente a função de log-verossimilhança, o número de parâmetros e o número de observações da amostra.

Este critério tem pouco uso prático pois, a maior parte dos conjuntos de dados tem poucas observações.

## 2.4 Testes de Anderson-Darling e Cramér Von Mises

Outros dois critérios utilizados na seleção de modelos são as modificações das estatísticas de Cramér Von Mises ( $W^*$ ) e Anderson-Darling ( $A^*$ ). Estes testes baseiam-se na função de distribuição empírica (FDE) dos dados e apresentam vantagens sobre o teste qui-quadrado, incluindo maior poder e invariância em relação aos pontos médios dos intervalos escolhidos ([CHEN; BALAKRISHNAN, 1995](#)). Quanto menor for as estatísticas  $W^*$  e  $A^*$ , melhor será o ajuste dos dados.

### 2.4.1 Teste de Anderson-Darling

O teste de Anderson-Darling foi proposto por [Anderson e Darling \(1952\)](#) e é mais utilizado quando o tamanho da amostra não é superior a 25.



Considere  $\delta_i = F(x_{(i)}; \theta)$  uma fda, com  $x_{(i)}$  em ordem ascendente. Faça  $y_{(i)} = \Phi^{-1}(\delta_i)$ , em que  $\Phi$  representa a distribuição normal padrão.

Seja  $p_{(i)} = \Phi\left(\frac{[y_{(i)} - \bar{y}]}{S_y}\right)$ , em que  $\bar{y}$  é a média e  $S_y$ , o desvio padrão dos  $y_{(i)}$ , respectivamente.

Dessa forma, a expressão da estatística de teste (de Anderson-Darling) é calculada da seguinte maneira. Seja

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i-1) \log(p_{(i)}) + (2n+1-2i) \log(1-p_{(i)})]$$

em que as quantidades  $p_{(i)}$  são percentis ordenados da distribuição normal padrão. A estatística de Anderson-Darling é dada por  $A^* = A^2(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2})$ .

#### 2.4.2 Teste de Cramér Von Mises

Este teste é baseado na distribuição acumulada e foi proposto por [Darling \(1957\)](#). A expressão da estatística de teste (de Cramér Von Mises) é calculada da seguinte forma. Seja

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(p_{(i)} - \frac{2i-1}{2n}\right)^2,$$

em que  $p_{(i)}$  é definido como na seção anterior. A estatística de Cramér Von Mises é dada por  $W^* = W^2(1 + \frac{0,5}{n})$ .

### 2.5 Teste de Wald Wolfowitz

O teste de Wald é um teste não paramétrico que teve grande contribuição na inferência estatística em meados do século XX.

O procedimento para obter essa estatística é dado a seguir.

Obtemos uma série padronizada da variável aleatória  $Z$  pela equação

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S_X},$$

em que  $X_i$  denota o valor da variável aleatória no ano  $i$ ,  $\bar{X}$  é a média amostral e  $S_X$  é o desvio padrão.

A estatística de teste  $u$  é estimada pela equação

$$u = \frac{1 + (n-1) \left( \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times z_{i+1}}{\sum_{i=1}^n z_i^2} \right)}{\sqrt{n-1}},$$

em que  $z_{n+1} = z_1$ ,  $u$  é a estatística de teste,  $n$  é o tamanho da série e  $z_i$  e  $z_{i+1}$  representam as variáveis padronizadas nos anos  $i$  e  $i + 1$ , respectivamente.

Este teste estabelece que, na hipótese nula de autocorrelação nula ( $\rho = 0$ ), a variável de teste segue a distribuição normal padrão. Para um dado nível de confiança  $\alpha$  a hipótese nula será rejeitada se  $P(Z < u) > \alpha$ .

## 2.6 Classes de distribuições generalizadas

As classes de distribuições generalizadas tem sido objeto de estudo em estatística. Vários pesquisadores tem se interessado nesse ramo, motivados pela busca de novas distribuições que se ajustem melhor aos fenômenos reais. A forma generalizada de uma distribuição flexibiliza, de forma satisfatória, a modelagem de dados que apresentam assimetria. Isto se deve a capacidade que essas distribuições possuem de englobar um grande número de submodelos.

Adotamos o termo distribuição-base) para a família de distribuições a ser generalizada e indicamos por  $G(x)$ , a fda da distribuição-base e  $g(x)$ , a sua fdp. Também utilizaremos um conjunto de regras estabelecidas por Brito (2014a), coerentes às existentes na literatura, para nomear as classes de distribuições probabilísticas e as distribuições geradas por estas classes. As regras são definidas a seguir:

- **Pelo corolário 3.1.5 (BRITO, 2014a).** Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe + nome da expressão; quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(G_1, \dots, G_m)(x)$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.
- **Pelo corolário 3.1.6 (BRITO, 2014a).** Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe complementar + nome da expressão; quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(G_1, \dots, G_m)(x)$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.
- **Pelo corolário 3.1.7 (BRITO, 2014a).** Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe normalizada + nome da expressão; quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(G_1, \dots, G_m)(x)$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.

A seguir são apresentadas algumas classes de distribuições existentes na literatura.

### 2.6.1 Classes de distribuições exponencializadas

A classe exponencializada teve origem quando [Gompertz \(1825\)](#) elevou a um expoente  $\alpha > 0$ , a função de distribuição acumulada da exponencial, ou seja

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \text{ para } x > 0, \lambda > 0 \text{ e } \alpha > 0.$$

As propriedades da família exponencializada tem sido estudadas por diversos autores, dentre eles destacam-se: [Mudholkar, Srivastava e Freimer \(1993\)](#) com a distribuição Weibull exponencializada, [Gupta, Gupta e Gupta \(1998\)](#) introduziram a classe geral de distribuições exponencializadas, [Gupta e Kundu \(1999\)](#) propuseram a distribuição exponencial generalizada, [Nadarajah \(2005\)](#) definiu a Pareto exponencializada, [Nadarajah e Kotz \(2006\)](#) propuseram a beta exponencializada e [Nadarajah \(2011\)](#) discutiu sobre as propriedades da distribuição exponencial exponencializada. A seguir será definida a distribuição exponencializada generalizada.

Seja  $G(x)$  uma distribuição-base arbitrária, diz-se que  $X \sim \text{Exp-}G(\alpha)$ , com  $\alpha > 0$ , se a fda e a fdp de  $X$  são, respectivamente

$$G_\alpha(x) = G^\alpha(x) \tag{2.3}$$

e

$$g_\alpha(x) = \alpha g(x) G^{\alpha-1}(x), \tag{2.4}$$

em que  $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ .

Para o caso particular  $\alpha = 1$ , tem-se a própria distribuição-base. Muitos resultados obtidos da  $\text{Exp-}G$  são utilizados em diversas classes generalizadas. Isto porque as expansões da fda e fdp dessas classes são combinações em geral, da classe  $\text{Exp-}G$ . No capítulo 3 deste trabalho, aplicaremos os resultados da  $\text{Exp-}G$  para encontrar propriedades matemáticas da classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ .

Segundo [Gupta e Kundu \(2001\)](#), se  $X$  é uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial exponencializada de parâmetro de potência  $\alpha$  ( $X \sim \text{EE}(\alpha, \lambda)$ ), então tem-se que o momento de ordem  $j$  é

$$\mu_j = E(X^j) = \frac{\alpha \Gamma(j+1)}{\lambda^j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (\alpha-1)_{(i)}}{(1+i)^{1+j}},$$

em que  $(\alpha-1)_{(i)} = (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-i)$  representa o fatorial descendente de  $(\alpha-1)$  e

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt$$

é a função gama. A função geradora de momentos (fgm) de  $X$  é dada por

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 - \frac{t}{\lambda})}{\Gamma(1 + \alpha - \frac{t}{\lambda})}.$$

Tahir e Nadarajah (2014) apresentaram uma revisão significativa sobre as distribuições exponencializadas generalizadas.

## 2.6.2 Classe de distribuição Beta Generalizada

A classe de distribuições Beta- $G$  (beta tipo 1) foi proposta inicialmente por Eugene, Lee e Famoye (2002) quando definiram a distribuição beta-normal (BN) inserindo a acumulada da normal no limite superior da integral da distribuição clássica da beta. Com a inserção, os autores obtiveram uma distribuição mais vantajosa que a normal.

Desde então vários autores vêm contribuindo com estudos de casos particulares da Beta- $G$ , como Famoye, Lee e Eugene (2003) que desenvolveram pesquisa referente a região bimodal da BN, Nadarajah e Kotz (2004) que definiram a distribuição beta-Gumbel com cauda mais flexível que a Gumbel e Barreto-Souza, Santos e Cordeiro (2009) propuseram a distribuição beta exponencial generalizada.

Dado uma variável aleatória contínua  $X$  com fda  $G(x)$ , define-se a classe Beta- $G$  como

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt, \quad (2.5)$$

em que  $a > 0$  e  $b > 0$  são parâmetros de forma e  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$  é a função beta. A integral da expressão acima não apresenta forma analítica fechada, necessitando de algum procedimento numérico para ser obtida.

A Equação (2.5) pode ser reescrita como

$$F(x) = I_{G(x)}(a, b) = \frac{B_{G(x)}(a, b)}{B(a, b)}, \quad (2.6)$$

em que  $B_{G(x)}(a, b)$  é a função beta incompleta dada por

$$B_{G(x)}(a, b) = \int_0^{G(x)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt, \quad (2.7)$$

e  $I_{G(x)}(a, b)$  é a função beta regularizada.

A fda (2.5) pode ser expressa em termos da função hipergeométrica do seguinte modo

$$F(x) = \frac{G^a(x)}{a B(a, b)} {}_2F_1(a, 1-b, a+1; G(x)), \quad (2.8)$$

em que

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(\beta+j)}{\Gamma(\gamma+j)} \frac{x^j}{j!}$$

e  $\Gamma(\cdot)$  representa a função gama.

As propriedades da função hipergeométrica são bem estabelecidas na literatura e podem ser encontradas na seção 9.1 de [Gradshteyn e Ryzhik \(2007\)](#).

A Beta- $G$  generaliza a distribuição de uma variável aleatória com fda  $G(x)$  (caso em que  $a = b = 1$ ). Os parâmetros  $a$  e  $b$  proporcionam maior flexibilidade na forma da distribuição e isto reflete positivamente na modelagem dos dados, pois estes parâmetros inserem assimetria e variam os pesos da cauda.

A fdp correspondente é obtida derivando-se a fda dada na Equação (2.5) e portanto temos

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{B(a, b)} g(x) G^{a-1}(x) [1 - G(x)]^{b-1}, \quad x > 0. \quad (2.9)$$

O objetivo da Beta- $G$  é generalizar distribuições contínuas, embora a generalização também valha para as discretas. Neste trabalho assumimos  $G(x)$  como contínua, por este motivo é coerente chamar a Equação (2.9) de função densidade.

Seguindo o que foi feito em [Cordeiro e Nadarajah \(2011\)](#), podemos reescrever a fdp da classe de distribuições Beta- $G$ , através de uma expansão e caracterizar propriedades gerais de maneira mais prática.

Para  $b > 0$ , um número real não inteiro, temos a série de potência

$$[1 - G(x)]^{b-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} (-1)^k G^k(x),$$

em que o coeficiente binomial é definido para algum  $b$  real. A partir dessa série expressamos a fdp escrita na Equação (2.9) da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{B(a, b)} (-1)^k \binom{b-1}{k} g(x) G^{a+k-1}(x),$$

e portanto a Equação (2.9) pode ser escrita como uma combinação linear de funções densidade da distribuição exponencializada, dada na Equação (2.4). A equação anterior pode ser reescrita como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_{(a+k)}(x), \quad (2.10)$$

em que a constante  $c_k$  é dada por

$$c_k = \frac{(-1)^k}{B(a, b)(a+k)} \binom{b-1}{k}.$$

Para achar a fda correspondente, basta integrar a expressão acima. Então

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k G_{(a+k)}(x). \quad (2.11)$$

é a função de distribuição acumulada da Beta Generalizada.

As formas expandidas da fdp e da fda, respectivamente dadas nas Equações (2.10) e (2.11) são utilizadas para derivarem expressões fechadas para os momentos, para a função geradora de momentos e para outras características importantes desta classe.

As funções de sobrevivência e taxa de falha, em geral, são úteis para estudos de confiabilidade e de análise de sobrevivência. Uma propriedade importante da função beta incompleta é

$$B_{G(x)}(a, b) = B(a, b) - B_{1-G(x)}(b, a). \quad (2.12)$$

Sabendo-se que a função de sobrevivência é definida por  $S(x) = 1 - F(x)$  e utilizando a Equação (2.12), podemos definir a função de sobrevivência da classe de distribuição Beta Generalizada como

$$S(x) = 1 - \frac{B_{G(x)}(a, b)}{B(a, b)} = \frac{B_{1-G(x)}(b, a)}{B(a, b)} = \frac{B_{S^*(x)}(b, a)}{B(a, b)},$$

em que  $S^*(x) = 1 - G(x)$  é a função de sobrevivência da distribuição-base,  $G(x)$ . A taxa de falha é definida como  $\frac{f(x)}{S(x)}$ , sendo  $f(x)$  a fdp e  $S(x)$ , a função de sobrevivência. Assim, a taxa de falha de qualquer família da distribuição Beta- $G$  é dada por

$$h(x) = g(x) \frac{[1 - G(x)]^{b-1} G^{a-1}(x)}{B_{1-G(x)}(b, a)}.$$

Em [Tahir e Nadarajah \(2014\)](#) é apresentada uma importante revisão dos modelos baseados na classe Beta- $G$ . Até então, a classe Beta- $G$  foi responsável pela introdução de quarenta e cinco novos modelos de distribuição de probabilidade. Alguns importantes modelos baseados na classe Beta- $G$  foram a beta Gumbel, beta Fréchet, beta Weibull, dentre outros.

### 2.6.3 Classe de distribuição McDonald

McDonald (1984) introduziu duas distribuições da Beta- $G$ , a Beta Generalizada do tipo 1 e a do tipo 2, que contêm várias outras distribuições como casos especiais.

Alexander et al. (2012) substituiu o limite superior da integral na Equação (2.5) por  $G^c(x)$ , em que  $c$  é o terceiro parâmetro adicional de forma, e definiram uma nova classe de distribuição chamada beta-gerada generalizada ou McDonald- $G$  (Mc- $G$ ) de fda dada por

$$F(x) = I_{G^c(x)}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G^c(x)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (2.13)$$

e função densidade correspondente definida como

$$f(x) = F'(x) = \frac{c}{B(a, b)} g(x) G^{ac-1}(x) [1 - G^c(x)]^{b-1} \quad x > 0, \quad (2.14)$$

em que  $a, b, c > 0$  são parâmetros que definem a forma da distribuição. De acordo com Tahir e Nadarajah (2014), estes parâmetros têm o papel de introduzir assimetria, curtose e variar o peso nas caudas. Já segundo Cordeiro, Hashimoto e Ortega (2014), os parâmetros  $a$  e  $b$  são responsáveis pela assimetria e controle da cauda. O parâmetro  $c$  controla o pico da distribuição.

Podemos escrever as Equações (2.13) e (2.14) na forma expandida. Utilizando a expansão binomial

$$[1 - G^c(x)]^{b-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} (-1)^k G^{ck},$$

podemos expandir a fdp Mc- $G$  como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c}{B(a, b)} g(x) G^{ac-1}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} (-1)^k G^{ck} \\ &= \frac{c}{B(a, b)} g(x) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} (-1)^k G^{(a+k)c-1}. \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_{(a+k)c}(x), \quad (2.15)$$

em que  $g_{(a+k)c}(x)$  tem distribuição Exp- $G[(a+k)c]$  e

$$c_k = \binom{b-1}{k} \frac{(-1)^k}{(a+k)B(a, b)}.$$

Integrando a equação (2.15), obtemos

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k G_{(a+k)c}(x), \quad (2.16)$$

A fdp e a fda nas Equações (2.15) e (2.16) estão expressas, respectivamente, como uma combinação linear das densidades e acumuladas das exponencializadas  $G$ . As propriedades da  $Mc-G$  podem ser obtidas pelas propriedades já conhecidas das distribuições exponencializadas.

Muitos autores, como por exemplo, [Alexander et al. \(2012\)](#), [Marciano et al. \(2012\)](#), [Cordeiro e Lemonte \(2012\)](#), [Coreiro e Lemonte \(2014\)](#), [Lemonte e Cordeiro \(2013\)](#), [Gomes et al. \(2013\)](#) acreditam que a classe de distribuições da  $Mc-G$  se ajustam aos dados melhor do que algumas distribuições existentes e tem usado essa distribuição para desenvolver novas famílias.

A classe de distribuição  $Mc-G$  inclui como casos especiais a distribuição-base  $G(x)$  quando  $a = b = c = 1$ , a classe de distribuição exponencializada para  $b = c = 1$ , a classe  $Beta-G$  no caso em que  $c = 1$  e a classe  $Kumaraswamy-G$  quando  $a = c$ .



## 3 Classe Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$

### 3.1 Introdução

As distribuições generalizadas têm sido amplamente estudadas e muitos autores têm proposto modelos em que combinam duas ou mais distribuições já existentes na literatura. [Amoroso \(1925\)](#) foi quem iniciou os primeiros passos com funções generalizadas contínuas, abordando em seu trabalho a distribuição generalizada da gama. [Eugene, Lee e Famoye \(2002\)](#) propuseram a Beta- $G$ , mesclando a beta com a normal, seus trabalhos têm motivado outros autores a desenvolverem estudos desta e de outras classes de distribuições.

Recentemente, diversas classes de distribuições foram propostas. Entre elas, a gama- $G$  por [Zografos e Balakrishnan \(2009\)](#), a Kumaraswamy- $G$  por [Cordeiro e Castro \(2011\)](#) e a classe  $T$ - $X$  por [Alzaatreh, Lee e Famoye \(2013\)](#). O intuito de nosso trabalho, que generaliza a classe Beta- $G$  quando  $\theta = 0$ , é propor uma classe particular chamada Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ .

### 3.2 Função de distribuição acumulada da classe Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$

O presente trabalho propõe uma classe de distribuição generalizada que é uma aplicação do método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas apresentado por [Brito \(2014a\)](#). Este método é um teorema proposto com sete corolários, que estende o processo de construções de distribuições de probabilidades, a fim de que as classes de distribuições sejam construídas a partir de funções monotônicas univariadas pré-definidas e distribuições conhecidas.

A partir do funcional especial

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t),$$

em que  $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta)G(x) + \theta$  e  $\ell_1(\cdot)(x) = \theta(1 - G(x))$ , determinamos uma classe de distribuição Beta Generalizada com três parâmetros adicionais  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $\theta \in [0, 1]$ .

Para qualquer distribuição-base  $G(x)$ , ou seja, para qualquer distribuição de variável aleatória discreta ou contínua, temos que a fda dessa classe é dada por

$$F_G(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_{(1-G(x))\theta}^{(1-\theta)G(x)+\theta} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt, \quad (3.1)$$

em que  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$  é a função beta.

Em referência à nomenclatura estabelecida na Seção 2.6, vamos denominar esta nova classe como Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G+\theta)$ . Note que, as funções  $\theta(1-G)$  e  $(1-\theta)G+\theta$ , nesta denominação fazem alusão, respectivamente, aos limites inferior e superior vistos na Equação (3.1).

Diferentemente do que acontece na classe  $T-X$  (ALZAATREH; LEE; FAMOYE, 2013), utilizamos na acumulada geradora (3.1) limites de integração (tanto inferior, quanto superior) que constituem funções monótonas da distribuição-base  $G$ . Em um certo sentido, nossa proposta generaliza o método gerador proposto por estes autores.

Podemos reescrever a fda da Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G+\theta)$ , utilizando a definição da beta regularizada disponível no Wolfram Functions Site<sup>1</sup>. Da mesma forma que a acumulada da Beta- $G$  pode ser expressa como a função beta regularizada (fbr), definida na Equação (2.6), a acumulada da classe proposta pode ser reescrita a partir de uma extensão da fbr, conhecida como função beta regularizada generalizada apresentada por

$$F_G(x) = I_{\{(1-\theta)G(x)+\theta\}}(a, b) - I_{\{\theta(1-G(x))\}}(a, b). \quad (3.2)$$

Tanto a função especial em (3.2), quanto sua inversa podem ser calculadas, respectivamente, a partir do MATHEMATICA, como  $\text{BetaRegularized}[z_1, z_2, a, b] = I(z_2, a, b) - I(z_1, a, b)$  e  $\text{InverseBetaRegularized}[z_0, s, a, b]$ , em que  $s = I(z, a, b)$ .

Inspirado na classe Beta- $G$ , podemos expressar a nova Beta- $G$  (nosso modelo proposto) a partir de funções hipergeométricas. Utilizando a expressão em (2.8), temos

$$\begin{aligned} F_G(x) &= \frac{[(1-\theta)G(x) + \theta]^a}{aB(a, b)} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; (1-\theta)G(x) + \theta) \\ &\quad - \frac{\theta^a [1-G(x)]^a}{aB(a, b)} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; \theta(1-G(x))). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> <http://mathworld.wolfram.com/RegularizedBetaFunction.html>

### 3.2.1 Expansão para a função de distribuição acumulada

De modo a simplificar a expressão obtida na Equação (3.2) e facilitar o desenvolvimento de cálculos posteriores, faremos uso de expansões. Temos a seguinte expressão para a beta incompleta regularizada

$$1 - I_x(a, b) = \frac{(1-x)^b}{B(a, b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \frac{(1-x)^k}{b+k}. \quad (3.3)$$

Adicionando e subtraindo 1 na Equação (3.2) e usando a expansão dada pela Equação (3.3) podemos escrever

$$\begin{aligned} F_G(x) &= 1 - I_{\theta[1-G(x)]}(a, b) - \{1 - I_{(1-\theta)G(x)+\theta}(a, b)\} \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \frac{\{1 - \theta[1 - G(x)]\}^{b+k}}{b+k} \\ &\quad - \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-a}{j} \frac{(1-\theta)^{b+j} [1 - G(x)]^{b+j}}{b+j}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para qualquer real  $m$  e  $-1 < x < 1$ ,

$$(1-x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} (-1)^n x^n. \quad (3.5)$$

Aplicando a expansão binomial na Equação (3.5) em (3.4), uma vez que  $0 \leq \theta \leq 1$ , podemos reescrever a Equação (3.4) como uma mistura de exponencializadas

$$F_G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p G_p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h G_h(x), \quad (3.6)$$

em que

$$c_p = \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \binom{b+k}{l} \binom{l}{p} \frac{(-1)^{l+p} \theta^l}{(b+k) B(a, b)}$$

e

$$d_h = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-a}{j} \binom{b+j}{h} \frac{(-1)^h (1-\theta)^{b+j}}{(b+j) B(a, b)}.$$

A forma apresentada na Equação (3.6) é o principal resultado desta secção e nos revela que algumas propriedades do modelo proposto podem ser obtidas segundo as propriedades das distribuições exponencializadas.

### 3.3 Função densidade de probabilidade da classe Beta $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$

A função densidade de probabilidade (fdp) é obtida a partir da função de distribuição acumulada através da operação de derivação, isto é:

$$f_G(x) = F'_G(x) = \frac{dF_G(x)}{dx}.$$

Se a fda for derivável, determinamos a fdp pelo seguinte procedimento.

Seja

$$F_G(x) = \int_{\mu_1(x)}^{\mu_2(x)} f(t)dt = F(\mu_2(x)) - F(\mu_1(x)),$$

derivando-se  $F_G(x)$  pela regra da cadeia, encontra-se:

$$\begin{aligned} f_G(x) &= [F(\mu_2(x)) - F(\mu_1(x))]' \\ &= f(\mu_2(x))(\mu_2(x))' - f(\mu_1(x))(\mu_1(x))'. \end{aligned}$$

Sendo a fda da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$  dada em (3.1), tem-se que

$$\begin{aligned} P_G(X \leq x) &= F_G(x) \\ P_G(X = x) &= P_G(X \leq x) - P_G(X < x) \\ &= F_G(x) - F_G(x^-). \end{aligned}$$

Se  $G(x)$  for uma distribuição de variável aleatória contínua, então  $f_G(x) = F'_G(x)$ , a fdp para a classe, é definida por

$$\begin{aligned} f_G(x) &= \frac{1}{B(a,b)} [(1-\theta)G(x) + \theta]^{a-1} [1 - (1-\theta)G(x) - \theta]^{b-1} (1-\theta)g(x) \\ &\quad - \frac{1}{B(a,b)} \{\theta[1-G(x)]\}^{a-1} \{1 - \theta[1-G(x)]\}^{b-1} [-\theta g(x)] \\ &= \frac{g(x)}{B(a,b)} \left\{ (1-\theta)^b [(1-\theta)G(x) + \theta]^{a-1} [1-G(x)]^{b-1} + \theta^a [1-G(x)]^{a-1} \right. \\ &\quad \left. \times \{1 - \theta[1-G(x)]\}^{b-1} \right\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

em que  $g(x)$  é a fdp associada a fda  $G(x)$ .

#### 3.3.1 Expansão para a função densidade

Na Secção 3.3 foram desenvolvidos os cálculos para se determinar a fdp da classe estudada. A fdp obtida na Equação (3.7) é bastante simples, no entanto, se for escrita

como uma soma infinita ponderada de fdps de distribuições exponencializadas- $G$ , podemos obter algumas propriedades para a classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ .

Seja

$$F_G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p G_p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h G_h(x), \quad (3.8)$$

a forma expandida da função de distribuição acumulada da classe estudada, então

$$\begin{aligned} f_G(x) &= F'_G(x) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} p c_p g(x) G^{p-1}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h g(x) G^{h-1}(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

é uma expansão para a função de densidade, em que  $G(x)$  é uma distribuição de variável aleatória contínua e  $g(x)$  a fdp correspondente. Utilizando a pdf da Exp- $G$ ,  $f_G(x)$  pode ser escrita como

$$f_G(x) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h g_h(x), \quad (3.10)$$

em que

$$c_p = \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \binom{b+k}{l} \binom{l}{p} \frac{(-1)^{l+p} \theta^l}{(b+k) B(a,b)}$$

e

$$d_h = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-a}{j} \binom{b+j}{h} \frac{(-1)^h (1-\theta)^{b+j}}{(b+j) B(a,b)}.$$

### 3.4 Propriedades de caracterização da classe

As medidas estatísticas apresentam de forma resumida características da distribuição. Nesta secção serão apresentadas algumas propriedades que descrevem a classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  e também duas formas diferentes de escrever uma mesma expansão. A primeira forma utiliza a notação de distribuições exponencializadas vistas na Secção 2.6.1 e expressa as propriedades de caracterização da classe como uma combinação linear de exponencializadas. A segunda forma é através dos momentos probabilisticamente ponderados (MPP) definido mais adiante.

Apresentaremos nesta secção as propriedades de caracterização da classe proposta. Algumas delas serão mais eficientes utilizando as expansões do que pela computação direta da função densidade.

De agora em diante consideraremos que  $X \sim \text{Beta}(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)(a, b, \theta, \boldsymbol{\xi})$ , em que  $\boldsymbol{\xi}$  é um vetor de parâmetros da distribuição-base.

### 3.4.1 Expansão para os momentos de ordem $n$ e para a função geradora de momentos

Os momentos são importantes em qualquer análise estatística. Eles podem ser usados para estudar características da distribuição como por exemplo, tendência, dispersão, assimetria e curtose.

Se  $E(X^n)$  existe, então o momento de ordem  $n$  de uma variável aleatória  $X$  é definido por

$$\mu_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Apresentamos a primeira forma para a expansão dos momentos de ordem  $n$  utilizando as Exp- $G$ . Sejam  $Y_p \sim \text{Exp-}G(p)$  e  $Y_h \sim \text{Exp-}G(h)$ , a partir da Equação (3.10) denotamos

$$\mu_n = \sum_{p=0}^{\infty} c_p E(Y_p^n) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h E(Y_h^n). \quad (3.12)$$

A função geradora de momentos (fgm) é outra forma de caracterizar a classe. Um de seus resultados interessantes nos diz que se duas variáveis aleatórias possuem a mesma fgm, então elas seguem a mesma distribuição.

A fgm de uma variável aleatória  $X$  é definida como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x).$$

Uma expansão para  $M_X(t)$  é dada por

$$M_X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p M_{Y_p}(t) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h M_{Y_h}(t), \quad (3.13)$$

em que  $M_{Y_p}(t)$  e  $M_{Y_h}(t)$  são as respectivas fgms de  $Y_p \sim \text{Exp-}G(p)$  e  $Y_h \sim \text{Exp-}G(h)$ . Portanto,  $M_X(t)$  pode ser imediatamente determinada a partir de funções geradoras de momentos da classe Exp- $G$ .

Seja  $G$  a fda de uma variável aleatória  $Y$  e  $F$  a fda de uma variável aleatória  $X$  com função densidade dada pela Equação (3.7), os momentos da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$  podem ser obtidos a partir do  $(r; j)$ -ésimo momento probabilisticamente ponderado (MPP) de  $Y$  definido por

$$\tau_{r,j} = E[Y^r G^j(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^r G^j(y) g(y) dy. \quad (3.14)$$

Portanto, a segunda forma de representar os momentos de ordem  $n$  é dada por

$$E[X^r] = \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{r,h-1}, \quad (3.15)$$

e para a fgm, tem-se

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p c_p t^n}{n!} \tau_{n,p-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h d_h t^n}{n!} \tau_{n,h-1}.$$

Assim, os momentos de qualquer distribuição da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$  podem ser expressos como uma diferença de somas infinitas ponderadas de MPPs da distribuição-base. Outra forma de expressar  $\tau_{r,j}$  é baseada na função quantílica da distribuição-base denotada por  $Q_G(x) = G^{-1}(x)$ . Definindo  $g(x) = u$ , obtemos

$$\tau_{r,j} = \int_0^1 Q_G^r(u) u^j du. \quad (3.16)$$

A seguir, determinaremos os MPPs da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$  para as distribuições Fréchet (F) e exponencial (E) utilizando as Equações (3.14) e (3.16), respectivamente.

O  $(r; j)$ -ésimo MPP da distribuição Fréchet é

$$\tau_{r,j} = \lambda \sigma^\lambda \int_0^\infty x^{r-(\lambda+1)} e^{-(j+1)(\frac{\sigma}{x})^\lambda} dx,$$

em que  $\lambda > 0$  e  $\sigma > 0$ .

Utilizando  $u = (j+1)(\sigma/x)^\lambda$ ,  $\tau_{r,j}$  é escrito de maneira reduzida como

$$\tau_{r,j} = \frac{\sigma^r}{(j+1)^{1-r/\lambda}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-r/\lambda} du.$$

Para  $r < \lambda$ , a integral converge absolutamente. Através da Equação (3.15) podemos escrever o  $r$ -ésimo momento ordinário da Beta  $(\theta(1-F), (1-\theta)F + \theta)$  como

$$E(Y^r) = \sigma^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p p^{r/\lambda} - \sum_{h=1}^{\infty} d_h h^{r/\lambda} \right].$$

A quantílica da distribuição exponencial é  $Q_G(u) = -\lambda^{-1} \log(1-u)$ , com  $\lambda > 0$  e  $\tau_{r,j}$  é dado por

$$\tau_{r,j} = \frac{\sigma^r}{(j+1)^{1-r/\lambda}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-r/\lambda} du = r! \lambda^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+r} \binom{j}{m}}{(m+1)^{r+1}}.$$

Assim, os momentos da distribuição Beta  $(\theta(1-E), (1-\theta)E + \theta)$  são facilmente calculados pela Equação (3.15)

$$E(Y^r) = r! \lambda^r \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p c_p (-1)^{m+r} \binom{p-1}{m}}{(m+1)^{r+1}} - \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h d_h (-1)^{m+r} \binom{h-1}{m}}{(m+1)^{r+1}} \right].$$

### 3.4.2 Expansão para a função característica

A função geradora de momentos é bastante útil, porém nem sempre existe. Por este motivo, podemos usar a função característica, que sempre existe.

Seja a função característica dada por

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

Como  $e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n x^n}{n!}$ , temos

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n i^n t^n}{n!} = M_X(it).$$

As duas representações para a função característica da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$  são imediatamente obtidas a partir das representações vistas na secção anterior para função geradora de momentos e utilizando a expressão de  $\varphi_X(t)$  acima.

A primeira forma envolvendo Exp- $G$  é determinada baseada na Equação (3.12) e aplicando-a na função característica e assim

$$\varphi_X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \varphi_{Y_p}(t) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h \varphi_{Y_h}(t),$$

em que  $\varphi_{Y_p}(t)$  e  $\varphi_{Y_h}(t)$  são as funções características de  $Y_p \sim \text{Exp-}G(p)$  e  $Y_h \sim \text{Exp-}G(h)$ , respectivamente.

A segunda forma é escrita em termos dos momentos probabilisticamente ponderados. Utilizando a expansão para  $\varphi_X(t)$ , dada no início da seção, e a Equação (3.14), tem-se

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{n,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{n,h-1} \right].$$

em que  $i = \sqrt{-1}$ .

Ambas as formas apresentadas podem ser utilizadas para se determinar a função característica.

### 3.4.3 Momentos centrais de ordem $n$ e coeficiente geral

Os momentos centrais de ordem  $n$  são calculados de acordo com

$$\mu'_n = E[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n dF(x). \quad (3.17)$$



Uma importante medida é a variância, que nada mais é que o momento central de ordem dois. A seguir são realizados os cálculos para os momentos centrais de  $X$ .

Temos pela expansão binomial que

$$(x - \mu)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \mu^r x^{n-r},$$

então  $\mu'_n$  pode ser reescrita como

$$\mu'_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{n-r}.$$

Sabendo que  $\mu = E(X)$  e aplicando a Equação (3.12) na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n}{r} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p E(Y_p^{n-r}) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h E(Y_h^{n-r}) \right] \\ &\times \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p E(Y_p) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h E(Y_h) \right]^r, \end{aligned}$$

em que  $Y_p$  e  $Y_h$  seguem distribuições exponencializadas generalizadas com parâmetros  $p$  e  $h$ , respectivamente. .

Alternativamente podemos escrever os momentos centrais de ordem  $n$  em termos dos MPPs. Substituindo-se a Equação (3.9) em (3.17) e utilizando a Equação (3.14), resulta

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n}{r} \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{n-r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{n-r,h-1} \right) \\ &\times \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{1,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{1,h-1} \right)^r. \end{aligned}$$

Uma nova generalização chamada de coeficiente geral, que estende as medidas de assimetria e curtose, é dada por

$$C_g(n) = \frac{E[(X - \mu)^n]}{\sqrt{\{E[(X - \mu)^2]\}^n}} = \frac{\mu'_n}{\sigma^n}.$$

Podemos utilizar qualquer uma das formas para  $\mu'_n$ , seja através das Exp- $G$ 's ou dos MPPs. Aqui, utilizaremos a forma expressa em (3.14) e a substituiremos na equação acima. Portanto,

$$C_g(n) = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n}{r} \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{n-r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{n-r,h-1} \right) \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{1,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{1,h-1} \right)^r}{\left[ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{2}{r} \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{2-r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{2-r,h-1} \right) \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{1,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{1,h-1} \right) \right]^{n/2}}.$$

Note que, em particular, quando  $n = 3$  e  $n = 4$  em  $C_g(n)$ , obtemos uma expansão para as medidas de assimetria e curtose, respectivamente.

### 3.5 Casos especiais da classe Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$

A beta generalizada é uma classe rica de distribuições generalizadas e também uma das mais importantes em estatística devido a sua versatilidade na modelagem de dados. Para obtermos a composição, usaremos a fdp (3.7) por ser mais tratável quando  $G(x)$  e  $g(x)$  tiverem formas analíticas simples.

Nesta seção apresentaremos alguns casos especiais da classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ .

#### 3.5.1 Distribuição Beta $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$

A distribuição exponencial possui apenas um parâmetro e é uma das mais simples distribuições da estatística. Autores como [Nadarajah e Kotz \(2006\)](#) e [Barreto-Souza, Santos e Cordeiro \(2009\)](#) desenvolveram, respectivamente, a beta exponencial e a distribuição exponencial generalizada como casos especiais da Beta- $G$ , assim como também forneceram propriedades matemáticas importantes.

Tomando  $G(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente como fda e fdp da distribuição exponencial (E) com parâmetro  $\lambda$ , a função de distribuição da Beta  $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$ , obtida a partir de (3.2), é definida por

$$F(x) = I_{\{(1-\theta)(1-e^{-\lambda x})+\theta\}}(a, b) - I_{\{\theta[1-(1-e^{-\lambda x})]\}}(a, b),$$

em que  $x > 0, \lambda > 0, a > 0$  e  $b > 0$ .

A fdp da Beta  $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$  é obtida a partir de (3.7). Assim,

$$f(x) = \frac{\lambda}{B(a, b)} \left\{ e^{-b\lambda x} (1 - \theta)^b [1 - e^{-\lambda x} (1 - \theta)]^{a-1} + \theta^a e^{-a\lambda x} [1 - \theta e^{-\lambda x}]^{b-1} \right\}. \quad (3.18)$$

A fdp acima não envolve qualquer função complicada. A classe citada nesta seção generaliza várias distribuições já conhecidas na literatura. Obtemos a própria distribuição exponencial quando  $a = b = 1$  e quando  $\theta = 0$ , a distribuição beta generalizada exponencial é mais um caso especial generalizado pela classe.

É fácil notar que a densidade (3.18) é muito mais flexível que a distribuição beta generalizada exponencial.

A taxa de falha é dada por

$$R(x) = \frac{\lambda \{ e^{-b\lambda x} (1 - \theta)^b [1 - e^{-\lambda x} (1 - \theta)]^{a-1} + \theta^a e^{-a\lambda x} [1 - \theta e^{-\lambda x}]^{b-1} \}}{B(a, b) [1 - I_{\{(1-\theta)(1-e^{-\lambda x})+\theta\}}(a, b) + I_{\{\theta[1-(1-e^{-\lambda x})]\}}(a, b)]}.$$

A representação gráfica da fdp e da taxa de falha da Beta  $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$  para alguns valores dos parâmetros  $a, b, \theta$  e  $\lambda$  são apresentados nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

No Apêndice B apresentamos o código fonte para construção dos gráficos da fdp e taxa de falha desta distribuição.

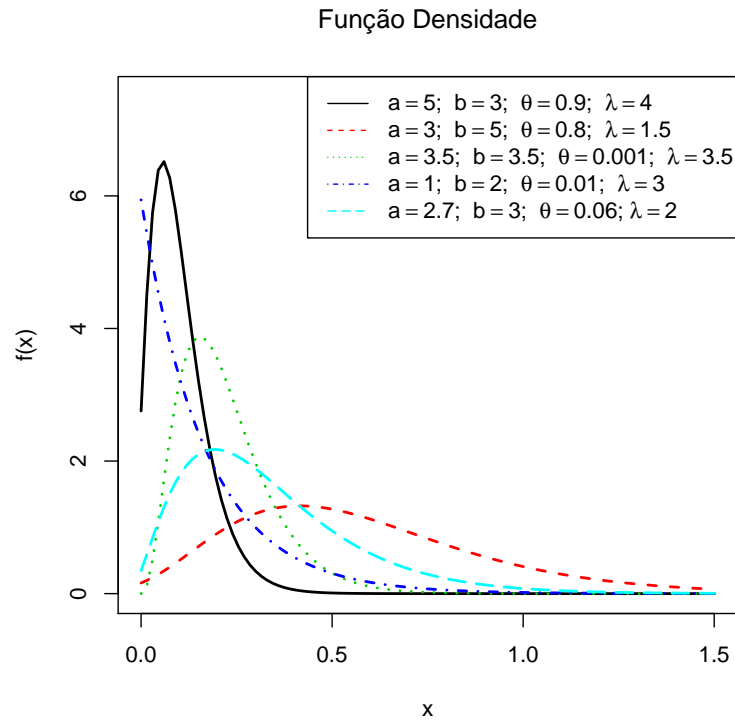


Figura 6: Função densidade da Beta  $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$  variando os parâmetros de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$  e  $\lambda$ .

### 3.6 Distribuição Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$

A distribuição beta-Weibull foi proposta por Famoye, Lee e Olumolade (2005), considerando a Weibull como a distribuição-base na classe Beta- $G$ . Lee, Famoye e Olumolade (2007) obtiveram algumas propriedades da taxa de falha, entropias e uma aplicação para dados censurados.

Seja  $G(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^c}$  e  $g(x) = c\lambda^c x^{c-1} e^{-(\lambda x)^c}$ , as respectivas fda e fdp da Weibull com parâmetros  $c > 0$  e  $\lambda > 0$ . Dizemos que  $X \sim \text{Beta}(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)(a, b, \theta, c, \lambda)$  se sua função de distribuição é dada por

$$F(x) = I_{\{(1-\theta)[1-e^{-(\lambda x)^c}] + \theta\}}(a, b) - I_{\{\theta[1-[1-e^{-(\lambda x)^c}]]\}}(a, b).$$

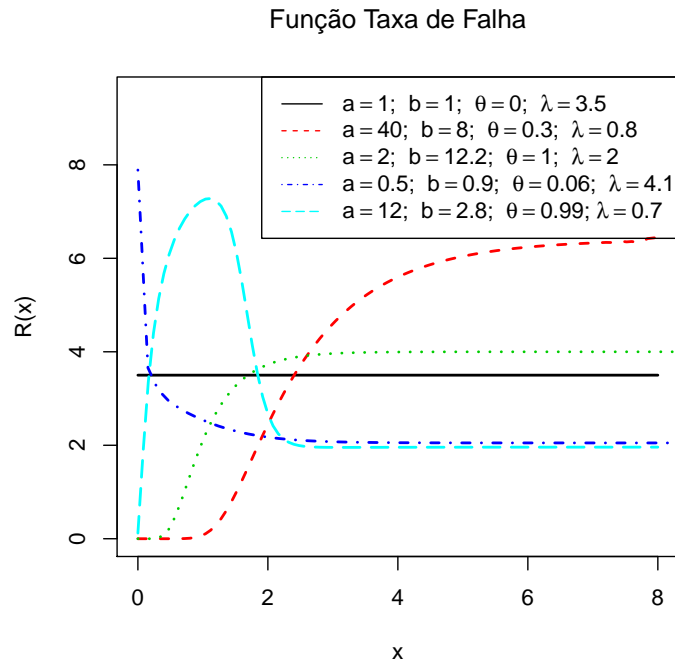


Figura 7: Taxa de falha da Beta  $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$  para diferentes valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$  e  $\lambda$ .

A fdp da distribuição Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  é dada por

$$f(x) = \frac{c \lambda^c x^{c-1}}{B(a, b)} \left\{ e^{-b(\lambda x)^c} (1 - \theta)^b [1 - e^{-(\lambda x)^c} (1 - \theta)]^{a-1} + \theta^a e^{-a(\lambda x)^c} \right. \\ \left. \times [1 - \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{b-1} \right\} \quad (3.19)$$

e a sua taxa de falha é dada pela expressão abaixo

$$R(x) = \frac{c \lambda^c x^{c-1} \{ e^{-b(\lambda x)^c} (1 - \theta)^b [1 - e^{-(\lambda x)^c} (1 - \theta)]^{a-1} + \theta^a e^{-a(\lambda x)^c} [1 - \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{b-1} \}}{B(a, b) [1 - I_{\{(1-\theta)[1-e^{-(\lambda x)^c]}+\theta\}}(a, b) + I_{\{\theta[1-(1-e^{-(\lambda x)^c)}]\}}(a, b)]}.$$

Algumas distribuições conhecidas são generalizadas a partir de (3.19). No caso  $a = b = 1$  tem-se a fdp da distribuição-base e a densidade da exponencial quando  $a = b = c = 1$ . O gráfico da Figura 8 ilustra a fdp para alguns valores de parâmetros escolhidos. A Figura 9 ilustra a taxa de falha correspondente.

### 3.7 Distribuição Beta $(\theta(1 - Kw), (1 - \theta)Kw + \theta)$

Seja  $G(x)$  a distribuição Kumaraswamy (Kw) com fda dada por

$$G(x) = 1 - (1 - x^\lambda)^{c-1},$$

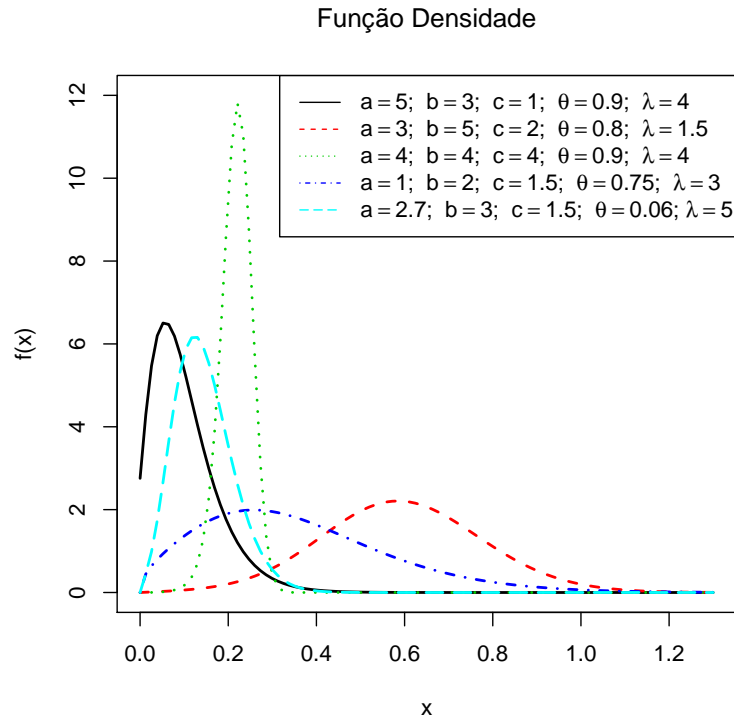


Figura 8: Função densidade da Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  para diferentes valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $c$  e  $\lambda$ .

e fdp definida como  $g(x) = \lambda c x^{\lambda-1} (1 - x^\lambda)^{c-1}$ , em que  $x \in [0, 1]$ ,  $c > 0$  e  $\lambda > 0$ . Inserindo essas funções em (3.2), a função acumulada da Beta  $(\theta(1 - Kw), (1 - \theta)Kw + \theta)$  é expressa por

$$F(x) = I_{\{(1-\theta)[1-(1-x^\lambda)^{c-1}]+\theta\}}(a, b) - I_{\{\theta[1-[1-(1-x^\lambda)^{c-1}]\}}(a, b),$$

e sua função densidade associada é dada por

$$f(x) = \frac{c \lambda x^{\lambda-1}}{B(a, b)} \left\{ (1 - \theta)^b [1 - x^\lambda]^{b(c-1)} [1 - (1 - x^\lambda)^{c-1} (1 - \theta)]^{a-1} + \theta^a [1 - x^\lambda]^{a(c-1)} \right. \\ \left. \times [1 - \theta(1 - x^\lambda)^{c-1}]^{b-1} \right\}. \quad (3.20)$$

A taxa de falha correspondente é dada por

$$R(x) = c \lambda x^{\lambda-1} \{ B(a, b) [1 - I_{\{(1-\theta)[1-(1-x^\lambda)^{c-1}]+\theta\}}(a, b) + I_{\{\theta[1-[1-(1-x^\lambda)^{c-1}]\}}(a, b)] \}^{-1} \\ \times \{ (1 - \theta)^b [1 - x^\lambda]^{b(c-1)} [1 - (1 - x^\lambda)^{c-1}]^{a-1} + \theta^a [1 - x^\lambda]^{a(c-1)} [1 - \theta(1 - x^\lambda)^{c-1}]^{b-1} \}.$$

Alguns valores dos parâmetros foram selecionados e apresentados na Figura 10.

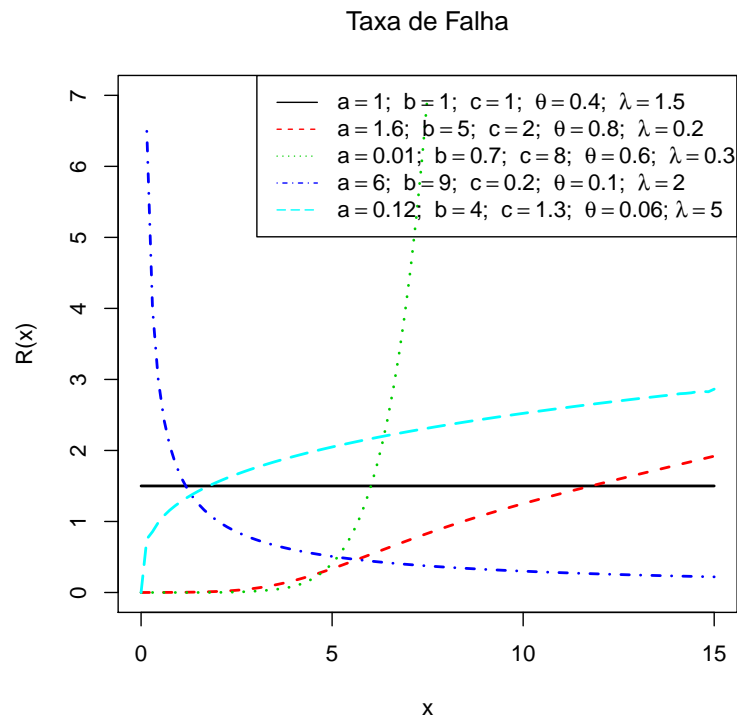


Figura 9: Taxa de falha da Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  para alguns valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $c$  e  $\lambda$ .

### 3.8 Distribuição Beta $(\theta(1 - \text{Burr}), (1 - \theta)\text{Burr} + \theta)$

Para dar maior flexibilidade para a distribuição Burr XII, [Paranaíba et al. \(2011\)](#) definiram a distribuição beta Burr XII.

A fda e a pdf da Burr XII, para  $x > 0$ ,  $c > 0$  e  $\lambda > 0$  são respectivamente iguais a

$$G(x) = 1 - (1 + x^c)^{-\lambda}$$

e

$$g(x) = c\lambda \frac{x^{c-1}}{(1 + x^c)^{\lambda+1}}.$$

Substituindo  $G(x)$  e  $g(x)$  em (3.2), obtemos a fda da Beta  $(\theta(1 - \text{Burr}), (1 - \theta)\text{Burr} + \theta)$  expressa por

$$F(x) = I_{\{(1-\theta)[1-(1+x^c)^{-\lambda}]+\theta\}}(a, b) - I_{\{\theta[1-[1-(1+x^c)^{-\lambda}]\}}(a, b).$$

A função densidade associada é definida por

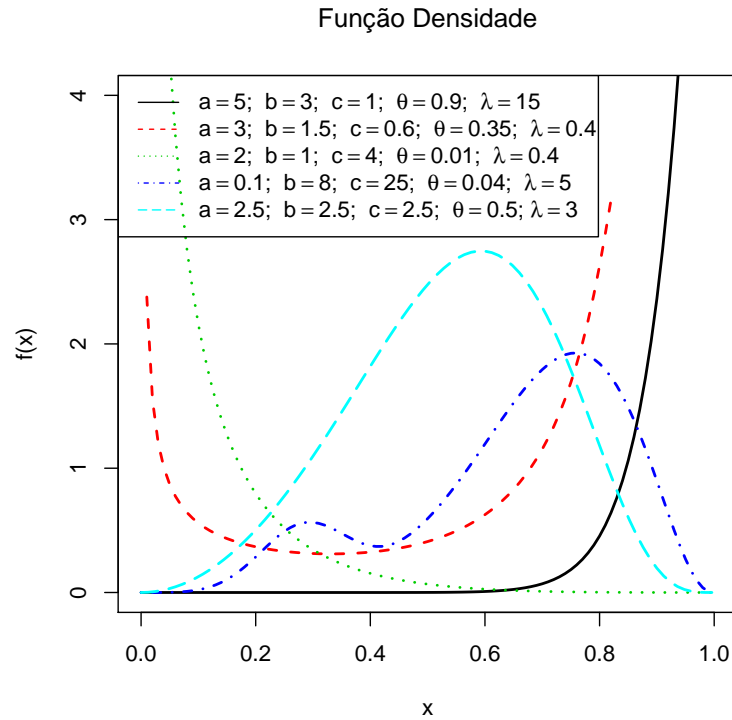


Figura 10: Curvas da função densidade da Beta  $(\theta(1 - Kw), (1 - \theta)Kw + \theta)$  para diferentes valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $c$  e  $\lambda$ .

$$f(x) = \frac{c \lambda x^{c-1}}{B(a, b)} \left\{ (1 - \theta)^b [1 - (1 + x^c)^{-\lambda} (1 - \theta)]^{a-1} [1 + x^c]^{-(b\lambda+1)} + \theta^a [1 + x^c]^{-(a\lambda+1)} \right. \\ \left. \times [1 - \theta(1 + x^c)^{-\lambda}]^{b-1} \right\}.$$

A taxa de falha correspondente é dada por

$$R(x) = \frac{c \lambda x^{c-1}}{B(a, b)} [1 - I_{\{(1-\theta)[1-(1+x^c)^{-\lambda}]+\theta\}}(a, b) + I_{\{\theta[1-[1-(1+x^c)^{-\lambda}]\}}(a, b)]^{-1} \\ \times \left\{ (1 - \theta)^b [1 - (1 + x^c)^{-\lambda} (1 - \theta)]^{a-1} [1 + x^c]^{-(b\lambda+1)} + \theta^a [1 + x^c]^{-(a\lambda+1)} \right. \\ \left. \times [1 - \theta(1 + x^c)^{-\lambda}]^{b-1} \right\}.$$

O gráfico a seguir mostra diferentes valores para os parâmetros da densidade da Beta  $(\theta(1 - Burr), (1 - \theta)Burr + \theta)$ .

### 3.9 Desvios médios

Duas importantes estatísticas que medem a dispersão de uma variável aleatória são os desvios médios. Os desvios médios em relação à média,  $\mu$  e a mediana,  $M_d$ , são

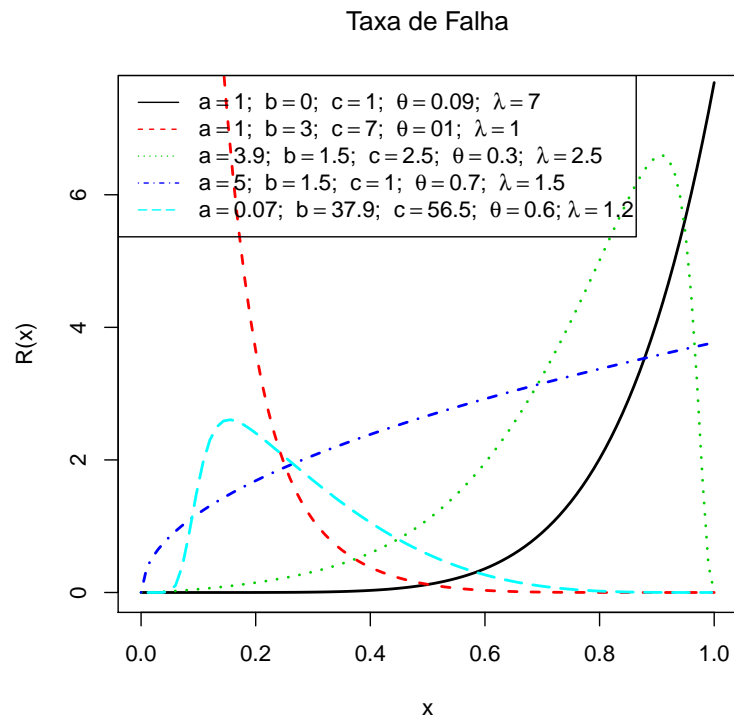


Figura 11: Gráficos da função taxa de falha da Beta  $(\theta(1 - Kw), (1 - \theta)Kw + \theta)$  para os parâmetros selecionados.

definidos, respectivamente por

$$d_1(X) = E(|X - \mu|) \quad \text{e} \quad d_2(X) = E(|X - M_d|).$$

Alternativamente, como definiram [Cordeiro e Lemonte \(2012\)](#), os desvios médios acima podem ser calculados como

$$d_1(X) = 2\mu F(\mu) - 2m_1(\mu) \quad \text{e} \quad d_2(X) = \mu - 2m_1(M_d), \quad (3.21)$$

em que  $\mu = E(X)$  e  $m_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} xf(x)dx$  é o primeiro momento incompleto.

Muito utilizadas em economia, confiabilidade, demografia e medicina, as curvas de Bonferroni e Lorenz, são a principal aplicação dos momentos incompletos.



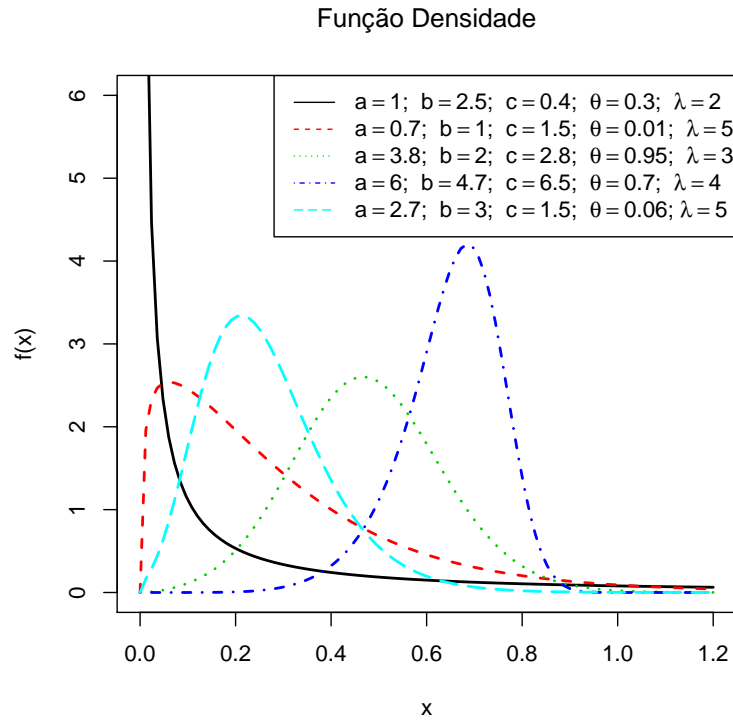


Figura 12: Gráficos da função densidade da Beta  $(\theta(1 - \text{Burr}), (1 - \theta)\text{Burr} + \theta)$  para alguns valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$  e  $\lambda$ .

A equação geral para  $m_1(\mu)$  é definida a partir de (3.10) como

$$\begin{aligned}
 m_1(\mu) &= \int_{-\infty}^{\mu} x f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\mu} x \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h g_h(x) \right] dx \\
 &= \sum_{p=1}^{\infty} c_p \int_{-\infty}^{\mu} x g_p(x) dx - \sum_{h=1}^{\infty} d_h \int_{-\infty}^{\mu} x g_h(x) dx \\
 &= \sum_{p=1}^{\infty} c_p J_p(\mu) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h J_h(\mu),
 \end{aligned}$$

em que  $J_{\alpha}(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} x g_{\alpha}(x) dx$ .

A quantidade  $J_{\alpha}(\mu)$  é a base para calcular os desvios médios das distribuições Exp-G. Logo, os desvios médios em (3.21) dependem apenas dos desvios médios da distribuição Exp-G. Assim, as representações alternativas para  $d_1(X)$  e  $d_2(X)$  são

$$d_1(X) = 2\mu F(\mu) - 2 \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p J_p(\mu) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h J_h(\mu) \right]$$

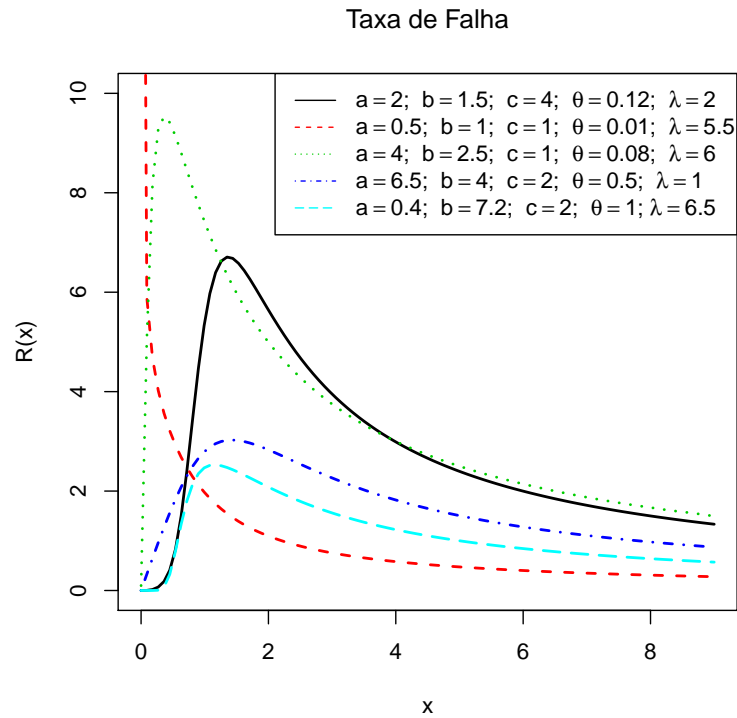


Figura 13: Taxa de falha da Beta  $(\theta(1 - \text{Burr}), (1 - \theta)\text{Burr} + \theta)$  para alguns valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$  e  $\lambda$ .

e

$$d_2(X) = \mu - 2 \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p J_p(M_d) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h J_h(M_d) \right].$$

Uma ilustração simples é realizada a seguir, com a distribuição-base sendo a exponencial (E), mostrando os cálculos para o desvio médio da variável aleatória  $X \sim \text{Beta}(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)(a, b, \theta, \xi)$ . Considere a distribuição exponencial exponencializada com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\lambda > 0$ , cuja fdp é dada por

$$g_\alpha(x) = \alpha x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}$$

e média  $\mu = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha-1}{i} \frac{(\alpha-1-i)!}{(1+i)^2}$  (GUPTA; KUNDU, 2001). Considere a seguinte quantidade

$$J_\alpha(\mu) = \int_0^\mu \alpha x^2 e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} dx.$$

Usando a expansão binomial em (3.5), obtemos

$$J_\alpha(\mu) = \alpha \sum_{w=0}^{\infty} (-1)^w \binom{\alpha-1}{w} \int_0^\mu x^2 e^{-\lambda x(w+1)} dx.$$

E assim, o primeiro momento incompleto é definido como

$$m_1(\mu) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p T_{w,\alpha,\mu} - \sum_{h=1}^{\infty} d_h T_{w,\alpha,\mu},$$

em que

$$T_{w,\alpha,\mu} = \alpha \sum_{w=0}^{\infty} (-1)^w \binom{\alpha-1}{w} \frac{[-2 - \lambda\mu(w+1)(2 + \lambda\mu + w\lambda\mu)]}{\lambda^3(w+1)^3}.$$

A partir do resultado acima, pode-se calcular o desvio médio para a distribuição Beta  $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$ .

Uma outra importante aplicação do primeiro momento incompleto está relacionada com o tempo de espera médio e a função de vida residual.

### 3.10 Função de vida residual

Muitas funções são definidas a partir da função de vida residual (fvr). A exemplo disso temos a taxa de falha, a função média de vida residual e a função de vitalidade. Estas três funções determinam unicamente  $F(X)$ , veja por exemplo, [Kotz e Shanbhag \(1980\)](#).

Segundo [Navarro, Franco e Ruiz \(1998\)](#), o  $n$ -ésimo momento da fvr de uma variável aleatória  $X$  determina unicamente a função de distribuição e é dado por

$$l_n(t) = E[(X - t)^n | X > t] = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} (x - t)^n f(x) dx,$$

em que  $t > 0$  e  $n = 1, 2, \dots$

Através do teorema binomial, a equação acima pode ser reescrita como

$$l_n(t) = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} t_{n,r} x^r f(x) dx, \quad (3.22)$$

em que  $t_{n,r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-t)^{n-r}$ .

Utilizando a forma exponencializada dada na Equação (3.10) e substituindo-a em (3.22), temos

$$l_n(t) = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,r} x^r c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} t_{n,r} x^r d_h g_h(x) \right] dx.$$

Podemos reescrever o  $n$ -ésimo momento da fvr da classe estudada em termos de exponencializadas como a seguir

$$l_n(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p l_{n,p}(t) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h l_{n,h}(t),$$

em que  $l_{n,p}(t)$  e  $l_{n,h}(t)$  são os  $n$ -ésimos momentos da fvr de  $Y_p \sim \text{Exp-G}(p)$  e  $Y_h \sim \text{Exp-G}(h)$ , respectivamente.

Outra função interessante é a função de vida residual média ou esperança de vida na idade  $x$  definida por  $l_1(t) = E[(X - t)|X > t]$ . Esta função corresponde a vida remanescente esperada da unidade,  $X - t$ , dado que ela sobreviveu até o tempo  $t$ .

### 3.11 Função de vida residual reversa

O  $n$ -ésimo momento da função de vida residual reversa(fvrr), determina unicamente  $F(x)$  (NAVARRO; FRANCO; RUIZ, 1998) e é definido como

$$L_n(t) = E[(t - X)^n | X \leq t] = \frac{1}{F(t)} \int_0^t (t - x)^n dF(x),$$

para  $t > 0$  e  $n = 1, 2, \dots$

Pelo teorema binomial podemos escrever  $L_n(t)$  como

$$L_n(t) = \frac{1}{F(t)} \int_0^t t_{n,r}^* x^r f(x) dx,$$

em que  $t_{n,r}^* = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r (t)^{n-r}$ . Então, o  $n$ -ésimo momento da fvrr de  $X$  se torna

$$L_n(t) = \frac{1}{F(t)} \int_0^t \left[ \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,r}^* x^r c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} t_{n,r}^* x^r d_h g_h(x) \right] dx.$$

Alternativamente, podemos escrever a equação acima como uma diferença de combinações dos  $n$ -ésimos momentos da fvrr das exponencializadas. Portanto,

$$L_n(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p L_{n,p}(t) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h L_{n,h}(t),$$

em que  $L_{n,p}(t)$  e  $L_{n,h}(t)$  são, respectivamente, os  $n$ -ésimos momentos das exponencializadas  $Y_p$  e  $Y_h$ .

O tempo médio de inatividade ou tempo de espera médio, também chamado de função média de vida residual reversa, é definido por  $L_1(t) = E[(t - X)|X \leq t]$ , e representa o tempo de espera decorrido desde o fracasso de um item na condição de que essa falha tivesse ocorrido em  $(0, x)$ . Propriedades da função média residual reversa são consideradas, por exemplo, em Kayid e Ahmad (2004).

### 3.12 Estatísticas de ordem

As estatísticas de ordem têm grande importância em muitos problemas estatísticos sendo aplicada em controle de qualidade, análise de confiabilidade e testes de vida, onde alguns preditores são muitas vezes baseadas nestas estatísticas. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da distribuição Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  e  $X_{i:n}$  a  $i$ -ésima estatística de ordem. A pdf de  $X_{i:n}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  é

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n - i + 1)} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k F^{i+k-1}(x) dx, \quad (3.23)$$

em que  $B(\cdot, \cdot)$  é a função beta.

A partir das expressões apresentadas em (3.6) e (3.10), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} f(x)F^{j+i-1}(x) &= \left[ \sum_{p=1}^{\infty} p c_p g(x) G^{p-1}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} h c_h g(x) G^{h-1}(x) \right] \\ &\times \left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} c_h G^h(x) \right]^{j+i-1}. \end{aligned}$$

Utilizando a expansão binomial podemos escrever para o último fator da expressão acima, a seguinte expansão

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} c_h G^h(x) \right]^{j+i-1} &= \sum_{w=0}^{j+i-1} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w \\ &\times \left[ \sum_{h=0}^{\infty} c_h G^h(x) \right]^w \\ &\times \left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) \right]^{j+i-1-w}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Na seção 0.314 de Gradshteyn e Ryzhik (2007) temos a seguinte equação para a série de potência elevada a um inteiro positivo  $n$

$$\left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right]^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

em que

$$c_0 = a_0^n, \quad c_m = \frac{1}{m a_0} \sum_{k=1}^m (kn - m + k) a_k c_{m-k} \quad \text{para } m \geq 1.$$

A partir dessa informação, podemos reescrever a Equação (3.24) como

$$\begin{aligned}
\left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h G^h(x) \right]^{j+i-1} &= \sum_{w=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w \sum_{p=0}^{\infty} f_{j+i-w-1,p} G^p(x) \\
&\times \sum_{h=0}^{\infty} f_{w,h} G^h(x) \\
&= \sum_{w,p,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w f_{j+i-w-1,p} f_{w,h} G^{p+h}(x).
\end{aligned}$$

em que

$$f_{j+i-w-1,0} = a_0^{j+i-w-1}, f_{j+i-w-1,p} = \frac{1}{p a_0} \sum_{m=1}^p [m(j+i-w)-p] a_m f_{j+i-w-1,p-m} e f_{j+i-w-1,h} = \frac{1}{h a_0} \sum_{m=1}^h [m(j+i-w)-h] a_m f_{j+i-w-1,h-m}.$$

Portanto, depois de algumas manipulações algébricas, podemos expressar o seguinte produto como

$$\begin{aligned}
f(x) F^{j+i-1}(x) &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{w,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w p c_p f_{j+i-w-1,p} f_{w,h} g(x) G^{2p+h-1}(x) \\
&- \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{w,p=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w h c_h f_{j+i-w-1,p} f_{w,h} g(x) G^{2h+p-1}(x).
\end{aligned}$$

Fazendo-se uso das Equações (2.3) e (2.4), podemos escrever

$$f(x) F^{j+i-1}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} d_{p,w,h} g_{(2p+h)}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} e_{p,w,h} g_{(2h+p)}(x), \quad (3.25)$$

com

$$d_{p,w,h} = \frac{\sum_{w,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w p c_p f_{j+i-w-1,p} f_{w,h}}{2p+h}$$

e

$$e_{p,w,h} = \frac{\sum_{w,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w h c_h f_{j+i-w-1,p} f_{w,h}}{2h+p}.$$

Substituindo o resultado obtido em (3.25) na expressão (3.23) determinamos a estatística de ordem expressa como uma diferença de combinações lineares de densidades exponencializadas

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \left[ \sum_{p=1}^{\infty} d_{p,w,h} g_{(2p+h)}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} e_{p,w,h} g_{(2h+p)}(x) \right].$$

### 3.13 Estimação

Várias abordagens para estimativas de parâmetros são propostas na literatura, porém o método de máxima verossimilhança (ver Secção 2.2) é o mais utilizado. Os EMVs desfrutam de propriedades desejáveis e podem ser usados na construção de intervalos de confiança e testes estatísticos. A aproximação normal para estes estimadores em distribuições de grandes amostras é facilmente manipulada, seja analítica ou numericamente. Neste trabalho, faremos uso do método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros da classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ .

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma amostra aleatória a partir de (3.7) e seja  $\Theta = (a, b, \theta, \boldsymbol{\xi})^\top$  o vetor de parâmetros de dimensão  $p \times 1$ . A função de log-verossimilhança para  $\Theta$  é dada por

$$l(\Theta) = -n \log B(a, b) + \sum_{i=1}^n \log[g(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \sum_{i=1}^n \log \left\{ (1 - \theta)^b [(1 - \theta)G(x_i, \boldsymbol{\xi}) + \theta]^{a-1} \right. \\ \left. \times [1 - G(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + \theta^a [1 - G(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \{1 - \theta[1 - G(x_i, \boldsymbol{\xi})]\}^{b-1} \right\}, \quad (3.26)$$

em que  $g(x_i, \boldsymbol{\xi}) = g(x)$  e  $G(x_i, \boldsymbol{\xi}) = G(x)$ . Assumimos que as seguintes condições de regularidade para a função de log-verossimilhança são válidas: i) O suporte de  $X$  associado à distribuição não depende de parâmetros desconhecidos; ii) O espaço paramétrico de  $X$ , digamos  $\boldsymbol{\Psi}$ , é aberto e  $l(\Theta)$  tem um máximo global em  $\boldsymbol{\Psi}$ ; iii) Para quase todos os  $x$ , existem as derivadas de quarta ordem da log-verossimilhança com respeito aos parâmetros do modelo e são contínuas em um subconjunto aberto de  $\boldsymbol{\Psi}$  que contém o parâmetro verdadeiro; iv) A matriz de informação esperada é definida positiva e finita; v) Os valores absolutos das derivadas de terceira ordem da log-verossimilhança em relação aos parâmetros são delimitados por funções finitas das esperanças de  $X$ .

Seja a função score definida como  $U(\Theta) = \frac{\partial l(\Theta)}{\partial \Theta}$ , então suas componentes  $U_a$ ,  $U_b$ ,  $U_\theta$  e  $U_\boldsymbol{\xi}$  são apresentadas a seguir como

$$U_a = \sum_{i=1}^n \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} \\ \times \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + (1 - \theta)^b \\ \times \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) + G(x_i, \boldsymbol{\xi})] \Big\} - n[\psi(a) \\ - \psi(a + b)];$$

$$\begin{aligned}
U_b &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \right. \right. \\
&\times \left. \left. \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + (1 - \theta)^b \right. \\
&\times \left. \left. \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log\{(1 - \theta)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]\} \right\} - n[\psi(b) \right. \\
&\left. - \psi(a + b)]; \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_\theta &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \right. \right. \\
&\times \left. \left. \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} \theta^{a-1} \bar{G}^a(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \{a \bar{G}^{-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) - \theta(b - 1) \right. \\
&\times \left. \left. [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{-1} \right\} + [(1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^b [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \{(a - 1) \right. \\
&\times \left. \left. [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{-1} - b[(1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{-1} \right\} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\boldsymbol{\xi}_k} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \right. \right. \\
&\times \left. \left. \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G(x_i, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_k}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \{(1 - a) \right. \\
&\times \left. \left. \bar{G}^{-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) + \theta(b - 1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{-1} \right\} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \right. \\
&\times \left. \left. \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-2} \frac{\partial G(x_i, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_k} \{(a - 1)(1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) - (b - 1)[1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]\} \right\} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x_i, \boldsymbol{\xi}) / \partial \boldsymbol{\xi}_k}{g(x_i, \boldsymbol{\xi})},
\end{aligned}$$

em que  $\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) = 1 - G(x_i, \boldsymbol{\xi})$  e  $\psi(\cdot)$  é a função digamma.

Os estimadores de máxima verossimilhança,  $\hat{\Theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\theta}, \hat{\boldsymbol{\xi}})^\top$  de  $\Theta = (a, b, \theta, \boldsymbol{\xi})^\top$  são obtidos resolvendo simultaneamente as equações não-lineares  $U_a = 0$ ,  $U_b = 0$ ,  $U_\theta = 0$  e  $U_{\boldsymbol{\xi}} = 0$ . Estas equações não podem ser resolvidas analiticamente e softwares podem ser usados para resolvê-las numericamente. Aqui, adotamos o software R.

Para estimação intervalar e testes de hipóteses com respeito aos parâmetros do modelo, obtemos a matriz de informação de Fisher observada  $J(\Theta)$  de dimensão  $4 \times 4$  dada por

$$J(\Theta) = - \begin{pmatrix} U_{aa} & U_{ab} & U_{a\theta} & U_{a\xi} \\ \cdot & U_{bb} & U_{b\theta} & U_{b\xi} \\ \cdot & \cdot & U_{\theta\theta} & U_{\theta\xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & U_{\xi\xi} \end{pmatrix},$$



cujos elementos são apresentados no Apêndice [A](#). A matriz  $J(\Theta)$  é útil para obter intervalos de confiança aproximados para os parâmetros.

## 4 Aplicação

Nesta seção, demonstramos a potencialidade da distribuição Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  apresentada na Seção 3, através de uma aplicação a um conjunto de dados reais.

### 4.1 Distribuição Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$ aplicada a dados de pobreza

A seguir, mostraremos uma aplicação a dados reais para a distribuição proposta beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ . O conjunto de dados representa a taxa de pobreza obtida a partir de 533 distritos escolares com mais de 15.000 estudantes com faixa etária de 5 a 17 anos de idade no ano de 2009 (Digest of Education Statistics [http://nces.ed.gov/programs/digest/d11/tables/dt11\\_096.asp](http://nces.ed.gov/programs/digest/d11/tables/dt11_096.asp)). Os cálculos foram executados utilizando-se o pacote AdequacyModel do software R (R Development Core Team, 2012). A massa de dados é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1: Taxa de pobreza de 533 distritos escolares com mais de 15.000 estudantes com faixa etária de 5 a 17

18,0	32,0	16,4	16,5	10,2	25,0	26,6	9,7	17,5	8,3	9,2	19,8	26,7	12,6	11,6	14,2	9,7	6,4
19,4	13,8	13,2	29,6	10,3	36,5	23,1	21,2	24,7	18,8	22,7	15,1	22,6	16,2	20,9	16,5	21,5	13,6
22,3	37,0	23,6	12,1	16,6	7,1	16,8	11,6	15,3	13,2	36,0	20,8	29,5	7,8	11,9	5,3	18,2	17,1
13,8	16,5	17,2	14,0	13,1	22,3	8,0	34,6	13,3	18,7	16,6	15,0	18,6	15,8	19,8	24,2	11,8	7,0
20,4	26,1	14,7	17,8	25,4	24,6	33,7	13,8	28,3	20,2	23,1	16,4	10,8	8,7	11,2	11,9	15,7	21,3
19,0	23,4	11,6	20,2	17,6	20,2	20,8	19,3	18,0	21,7	16,5	8,8	22,3	6,1	14,1	21,1	17,0	18,2
26,0	7,0	34,7	19,6	14,5	12,9	16,7	13,8	3,9	21,0	7,9	25,8	18,9	8,0	8,7	12,2	9,7	28,4
18,7	15,4	12,0	24,1	15,9	15,4	9,3	4,7	11,6	23,4	8,0	9,5	15,3	25,9	3,3	20,9	9,0	8,9
14,1	12,2	26,7	10,3	11,0	20,1	27,9	27,8	9,7	28,1	12,8	12,3	29,0	18,0	22,0	14,7	14,9	18,4
22,9	11,2	16,9	22,3	20,5	25,7	19,2	21,0	17,5	18,0	15,8	18,4	19,9	23,4	19,9	17,0	17,1	20,3
18,6	17,3	16,7	22,7	9,1	24,2	13,9	17,6	13,3	20,7	30,2	28,4	21,6	9,3	21,8	11,7	8,3	13,2
22,1	36,9	16,0	6,3	6,9	15,3	15,2	16,8	10,8	18,5	23,5	18,4	9,3	31,6	17,2	12,4	13,1	9,5
19,7	9,3	28,6	14,1	4,0	4,1	4,5	5,6	28,4	25,4	11,4	20,3	4,7	15,5	21,5	4,9	35,4	16,5
25,1	23,9	24,5	11,8	19,5	18,4	3,2	30,2	7,3	8,2	20,7	9,0	16,9	20,0	13,2	17,1	25,0	21,2
23,0	20,5	16,0	14,9	21,9	19,9	29,6	12,6	25,9	20,5	7,8	25,5	8,5	6,2	5,1	10,6	7,1	6,0
6,6	4,6	7,1	8,8	9,8	13,2	24,5	15,2	32,3	20,4	9,9	8,1	39,7	43,4	28,9	8,5	6,3	5,8
9,1	9,2	15,3	7,8	25,7	10,0	9,9	5,4	30,7	4,7	12,4	35,0	12,9	16,1	5,4	4,6	14,4	28,5
7,0	11,3	4,8	3,8	39,2	19,8	12,6	4,6	19,1	15,6	14,7	22,6	22,6	31,0	33,7	8,4	18,9	27,9
10,3	14,2	36,1	26,6	36,4	34,6	18,7	17,9	18,1	13,0	15,7	18,1	22,5	23,3	13,8	20,3	19,3	19,2
19,3	20,2	16,3	20,8	23,8	18,8	21,4	24,0	17,4	37,8	21,0	12,2	10,2	25,3	30,0	28,7	40,4	37,8
9,6	6,8	22,5	33,2	10,6	8,2	21,8	9,3	31,2	18,8	25,6	14,8	9,3	18,3	12,7	11,2	12,1	16,5
20,8	30,4	2,7	30,5	27,6	36,5	35,4	21,3	19,4	21,3	22,5	15,1	22,5	18,1	24,3	10,4	8,0	17,9
23,2	12,4	17,6	12,1	22,1	20,7	15,8	31,3	15,3	12,3	10,0	14,0	4,6	9,3	22,9	31,0	32,2	4,9
13,2	22,5	18,9	23,8	26,0	15,3	46,3	26,4	14,7	9,1	10,4	12,1	27,3	14,3	13,5	31,4	10,8	10,4
21,6	42,6	32,6	9,1	28,6	4,6	24,3	20,3	19,8	23,0	32,9	28,3	10,1	15,5	25,1	18,5	11,5	6,5
20,1	13,4	53,6	13,6	48,7	5,8	6,8	23,6	11,4	33,8	9,2	21,0	16,5	45,7	15,3	15,5	24,4	6,3
15,0	42,7	6,9	19,2	6,7	34,3	24,7	20,2	22,3	25,8	32,0	33,4	47,3	29,8	9,1	9,4	9,0	7,5
13,3	7,8	9,0	20,7	17,7	8,5	9,6	9,3	7,6	6,1	19,4	5,0	10,7	3,2	18,5	26,1	22,8	7,4
35,4	8,7	5,3	9,1	7,5	11,5	9,7	13,6	15,1	12,6	15,4	4,1	17,4	11,0	5,0	5,0	9,1	13,2
20,3	20,0	20,4	13,5	20,2	10,3	15,6	15,9	14,3	36,4	20,2							

Na Tabela 2 é apresentado um resumo descritivo dos dados expostos anteriormente. Nota-se que os dados possuem assimetria positiva e distribuição platicúrtica.

Tabela 2: Estatísticas Descritivas

Média	Mediana	Moda	Variância	Assimetria	Curtose	Mínimo	Máximo
17,71	16,80	9,3	77,38	0,79	0,69	2,70	53,60

Comparamos o ajuste da distribuição Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  aos ajustes dos modelos beta-Dagum (BDa), Kumaraswamy Weibull exponencializada (KWE), McDonald-Dagum (McDa) e beta exponencial exponencializada (BEE) cujas densidades são dadas como segue (para  $x > 0$ ):

- densidade da Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  é dada por

$$\frac{c \lambda^c x^{c-1}}{B(a, b)} \{(1 - \theta)^b e^{-b(\lambda x)^c} [1 - e^{-(\lambda x)^c} + \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{a-1} + \theta^a e^{-a(\lambda x)^c} [1 - \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{b-1}\};$$

- densidade da BDa é dada por

$$\frac{1}{B(a, b)} \beta \lambda \delta x^{-\delta-1} (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta-1} (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta(a-1)} [1 - (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta}]^{b-1};$$

- densidade da KWE é dada por

$$a b c \alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} [1 - e^{-(\beta x)^\alpha}]^{a-1} [1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^a]^{b-1} \{1 - [1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^a] b\}^{(c-1)};$$

- densidade da McDa é dada por

$$\frac{1}{B(a, b)} c \beta \lambda \delta x^{-\delta-1} (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta a c - 1} [1 - (1 + \lambda x^{-\delta})^{-c \beta}]^{b-1};$$

- A densidade da BEE é dada por

$$\frac{1}{B(a, b)} \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1} [1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha]^{b-1}.$$

Os parâmetros das densidades acima são todos números reais positivos.

Calculamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos ajustados, bem como os erros-padrão (entre parênteses) listados na Tabela 3. Consideramos as estatísticas AIC, BIC, AICc e HQIC para a seleção do modelo mais adequado ao conjunto de dados citado anteriormente. Também são apresentados na Tabela 4 os testes de Kolmogorov-Smirnov (K-S), Crámer-von Mises ( $W^*$ ) e Anderson-Darling ( $A^*$ ).

Tabela 3: EMVs (erros-padrão entre parênteses)

Distribuição	Estimativas					
Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$	$\hat{a}$ 0,0145 (0,0052)	$\hat{b}$ 8,8566 (13,0181)	$\hat{c}$ 1,9667 (0,0798)	$\hat{\theta}$ 0,7705 (1,0538)	$\hat{\lambda}$ 0,4441 (0,0763)	
BDa	$\hat{a}$ 0,2551 (0,1410)	$\hat{b}$ 11,1117 (9,7964)	$\hat{\beta}$ 8,8839 (5,3082)	$\hat{\lambda}$ 57,6598 (118,1263)	$\hat{\delta}$ 1,5071 (0,5727)	
KWE	$\hat{a}$ 0,0146 (0,0143)	$\hat{b}$ 0,2584 (0,0284)	$\hat{c}$ 17,4024 (6,7843)	$\hat{a}$ 1,0301 (0,0162)	$\hat{\beta}$ 0,4829 (0,0345)	
McDa	$\hat{\lambda}$ 6,5087 (11,0319)	$\hat{\delta}$ 1,0534 (0,3440)	$\hat{\beta}$ 4,2763 (6,0102)	$\hat{a}$ 0,2572 (0,1084)	$\hat{b}$ 31,3347 (28,2547)	$\hat{c}$ 5,1477 (7,2353)
BEE		$\hat{a}$ 0,1680 (0,1258)	$\hat{b}$ 2,0406 (0,5208)	$\hat{\lambda}$ 0,0958 (0,0155)	$\hat{a}$ 21,8988 (18,2772)	

Tabela 4: Estatísticas K-S,  $W^*$  e  $A^*$ 

Distribuições	K-S	$W^*$	$A^*$
Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$	<b>0,0269</b>	<b>0,0835</b>	<b>0,4747</b>
BDa	0,0295	0,0855	0,5000
KWE	0,0429	0,1973	1,0966
McDa	0,0299	0,0956	0,5250
BEE	0,0291	0,0857	0,5005

De acordo com as informações da Tabela 4 podemos verificar que os valores fornecidos para as estatísticas AIC e AICc são muito próximos, visto que o tamanho da amostra é grande. Ambos os valores tendem a se aproximar segundo o que foi exposto na Seção 2.3.2.

Tabela 5: Estatísticas AIC, AICc, BIC e HQIC

Distributions	AIC	BIC	AICc	HQIC
Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$	3757,850	3779,242	3757,964	3766,221
BDa	3760,962	3778,000	3760,962	3767,583
KWE	3772,120	3793,518	3772,239	3780,497
McDa	3762,850	3788,527	3763,016	3772,902
BEE	3760,908	3778,022	3760,984	3767,605

Mais informações sobre os ajustes das respectivas densidades são obtidos através de uma comparação visual no histograma apresentado na Figura 14.

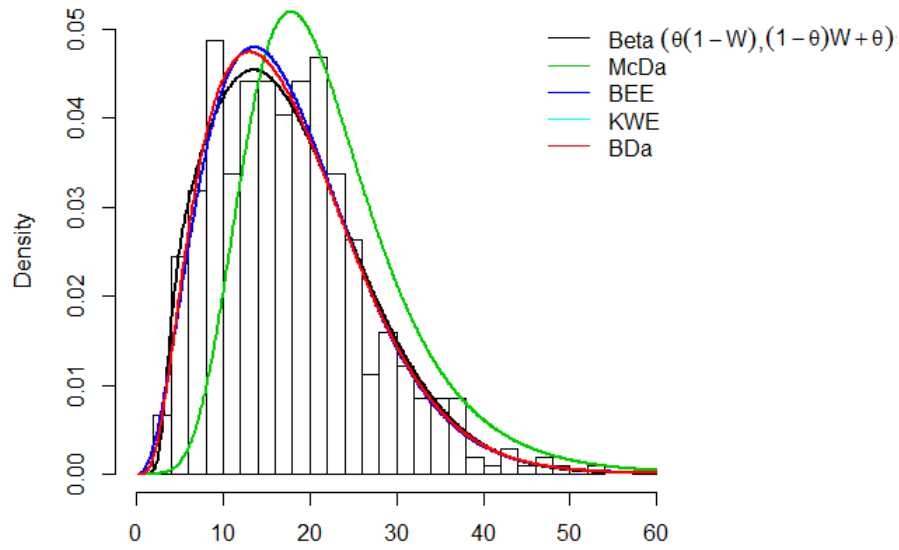


Figura 14: Ajuste das densidades para o histograma dos dados atuais.

De acordo com os valores das estatísticas K-S,  $W^*$ ,  $A^*$ , AIC, BIC, AICc e HQIC apresentados nas Tabelas 4 e 3, e sabendo que, quanto menor forem os valores destas estatísticas, melhor será o ajuste, é evidente que o modelo  $\text{Beta}(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$ , dentre os modelos comparados fornece o melhor ajuste aos dados e portanto, deverá ser o modelo indicado para escolha. O Apêndice C traz o código fonte dos ajustes dessas distribuições.

## 5 Conclusões, contribuições e trabalhos futuros

Neste capítulo são apresentadas as conclusões, contribuições e trabalhos futuros que podem dar continuidade a esta obra.

### 5.1 Conclusões

Em muitas áreas aplicadas existe a necessidade de se obter formas mais abrangentes das distribuições já conhecidas. De um modo geral, as novas distribuições são mais flexíveis para modelar os dados reais que apresentam um elevado grau de assimetria e curtose. Este trabalho propôs uma nova classe de distribuição generalizada com três parâmetros adicionais ( $a$ ,  $b$  e  $\theta$ ), a Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G+\theta)$  gerada, pelo método gerador apresentado por Brito (2014a).

Várias propriedades estruturais da nova classe, que sevem para qualquer modelo da distribuição-base, são derivadas, incluindo expressões explícitas para os momentos de ordem  $n$ , a função de geradora de momentos, a função característica, momentos centrais de ordem  $n$ , o coeficiente geral, o desvio médio, função de vida residual, função de vida reversa e estatísticas de ordem. Uma das classes mais conhecidas na literatura de novas distribuições de probabilidade, a Beta- $G$ , surge como caso especial da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G+\theta)$  quando fazemos  $\theta = 0$ .

Através das estatísticas AIC, BIC, AICc, HQIC e testes de aderência tais como K-S,  $W^*$  e  $A^*$  concluímos que a distribuição Beta  $(\theta(1-W), (1-\theta)W+\theta)$  (subcaso da classe proposta) é bastante competitiva, na modelagem a dados reais, quando comparada com outras distribuições bem estabelecidas na literatura.

Esperamos que a nova classe e seus modelos derivados possam atrair aplicações em várias áreas do conhecimento.

### 5.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são listadas a seguir.

1. Apresentação de uma nova classe de distribuição beta generalizada de três parâmetros gerada a partir do método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas apresentado por Brito (2014a);
2. Desenvolvimento de propriedades matemáticas da distribuição proposta, incluindo expansões úteis para a função acumulada, função densidade, momentos de ordem  $n$ , função geradora de momentos, função característica, momentos centrais de ordem  $n$ , coeficiente geral, desvios médios, função de vida residual, função de vida residual reversa e estatística de ordem;
3. Apresentação da taxa de falha para a classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  e de alguns casos particulares;
4. Aplicação de dados reais mostrando o potencial da classe proposta;
5. Criação de modelos mais flexíveis.

### 5.3 Trabalhos futuros

Como sugestão de trabalhos futuros destacamos:

1. Encontrar outros modelos a partir da classe de distribuição Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ ;
2. Aplicar o modelo proposto a outros conjuntos de dados;
3. Obter expressão para a função quantílica da classe;
4. Obter entropia de Renny e Shannon.

## Referências Bibliográficas

- AKAIKE, H. Use of an information theoretic quantity for statistical model identification. **Hawaii International Conference on System Sciences**, v. 5, p. 249–250, 1972.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 19, p. 716–723, 1974.
- ALEXANDER, C. et al. Generalized beta-generated distributions. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 56, n. 6, p. 1880–1897, 2012.
- ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **Metron**, Springer, v. 71, p. 63–79, 2013.
- AMOROSO, L. Ricerche intorno alla curva dei redditi. **Annali di Matematica**, v. 2, p. 123–159, 1925.
- ANDERSON, T.; DARLING, D. Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 23, p. 193–212, 1952.
- BARRETO-SOUZA, W.; SANTOS, A.; CORDEIRO, G. The beta generalized exponential distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 80, p. 159–172, 2009.
- BARROS, K. N. N. O. **Classes de distribuições Marshall-Olkin generalizada exponenciada**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, Dezembro 2014.
- BARROS, P. S. N. **Classes de distribuições weibull generalizada: teoria e aplicações**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, Maio 2015.
- BRITO, C. C. R. **Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, Agosto 2014.
- BRITO, E. **Algumas novas distribuições: desenvolvimento e aplicações**. Tese (Doutorado) — Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 2014.
- BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. **Model selection and multi-model inference: a practical information-theoretic approach**. [S.l.]: Springer, 2002.



- CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, v. 27, p. 154–161, 1995.
- CORDEIRO, G.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 81, p. 883–898, 2011.
- CORDEIRO, G.; HASHIMOTO, E. M.; ORTEGA, E. M. The mcdonald weibull model. **Statistics**, New York, v. 48, p. 256–278, 2014.
- CORDEIRO, G.; LEMONTE, A. The mcdonald inverted beta distribution. **Journal of the Franklin Institute**, v. 349, p. 1174–1197, 2012.
- CORDEIRO, G. M.; NADARAJAH, S. Closed form expressions for moments of a class of beta generalized distributions. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, v. 25, n. 1, p. 14–33, 2011.
- COREIRO, G.; LEMONTE, A. The mcdonald arcsine distribution: A new model to proportional data. **Statistics**, v. 48, p. 182–199, 2014.
- DARLING, D. The kolmogorov-smirnov, cramer-von mises tests. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 28, p. 823–838, 1957.
- EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, v. 31, p. 497–512, 2002.
- FAMOYE, F.; LEE, C.; EUGENE, N. Beta-normal distribution: Bimodality properties and application. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**, v. 2, p. 314–326, 2003.
- FAMOYE, F.; LEE, C.; OLUMOLADE, O. The beta-weibull distribution. **Journal of Statistical Theory and Applications**, v. 4, p. 121–136, 2005.
- GOMES, A. et al. The beta burr iii model for lifetime data. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, v. 27, p. 502–543, 2013.
- GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series B: Biological Sciences**, v. 115, p. 513–585, 1825.
- GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. **Table of Integrals, Series, and Products**. seventh edition. San Diego: Academic Press, 2007.
- GUPTA, R. C.; GUPTA, P. L.; GUPTA, R. D. Modeling failure time data by lehmann alternatives. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v. 27, p. 887–904, 1998.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distributions. **Australian e New Zealand Journal of Statistics**, Oxford, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and weibull distributions. **Biometrical Journal**, v. 43, p. 117–130, 2001.

- HANNAN, E. J.; QUINN, B. G. The determination of the order of an autoregression. **Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 190–195, 1979.
- KAYID, M.; AHMAD, I. On the mean inactivity time ordering with reliability applications. **Probability in the Engineering and Informational Science**, v. 18, p. 395–409, 2004.
- KOTZ, S.; SHANBHAG, D. N. Some new approaches to probability distributions. **Advances in Applied Probability**, v. 12, p. 903–921, 1980.
- LEE, C.; FAMOYE, F.; OLUMOLADE, O. Beta-weibull distribution: Some properties and applications to censored data. **Journal Of Modern Applied Statistical Methods**, v. 6, p. 173–186, 2007.
- LEMONTE, A.; CORDEIRO, G. An extended lomax distribution. **Statistics**, v. 47, p. 800–816, 2013.
- MARCIANO, F. et al. The mc- distribution and its properties: An application in reliability data. **International Journal of Statistics and Probability**, v. 1, p. 53–71, 2012.
- MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. **Biometrika**, v. 84, n. 3, p. 641–652, 1997.
- MCDONALD, J. Some generalized functions for the size distribution of income. **Econometrica**, v. 52, n. 3, p. 647–664, 1984.
- MUDHOLKAR, G.; SRIVASTAVA, D.; FREIMER, M. Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 42, p. 229–302, 1993.
- NADARAJAH, S. Exponentiated pareto distributions. **Statistics**, London, v. 39, p. 255–260, 2005.
- NADARAJAH, S. The exponentiated exponential distribution: a survey. **AStA Advances in Statistical Analysis**, New York, v. 95, p. 219–251, 2011.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, b. The beta exponential distribution. **Reliability Engineering System Safety**, v. 91, p. 689–697, 2006.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, Amsterdam, v. 4, p. 323–332, 2004.
- NAVARRO, J.; FRANCO, M.; RUIZ, J. M. Characterization through moments of the residual life and conditional spacing. **Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A**, v. 60, p. 36–48, 1998.
- PARANAÍBA, P. et al. The beta burr xii distribution with application to lifetime data. **Computational Statistics Data Analysis**, v. 55, p. 1118–1136, 2011.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 6, p. 461–464, 1978.

SUGIURA, N. Further analysis of the data by akaike's information criterion and the finite corrections: Further analysis of the data by akaike's. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor e Francis, v. 7, p. 13–26, 1978.

TAHIR, M. H.; NADARAJAH, S. Parameter induction in continuous univariate distributions: Well-established g families. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v. 87, n. 2, p. 539–568, 2014.

ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta-and generalized gamma-generated distribution and associate inference. **Statistical Methodology**, v. 6, p. 344–362, 2009.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Elementos da matriz de informação

Os elementos da matriz de informação observada  $J(\Theta)$  para a classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  são dados abaixo. Como a matriz é simétrica, listamos alguns deles.

$$\begin{aligned}
 U_{aa} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + (1 - \theta)^b \right. \right. \\
 & \times \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \left. \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right. \right. \\
 & \times [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \left. \left. \right\}^{-1} \right\}^2 \\
 & + \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \{ \log \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[\theta^2 \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \log \theta \right. \right. \\
 & + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^2 \left. \right\} \\
 & \times \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \right. \\
 & \left. \left. \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} \right\} - n[\psi'(a) - \psi'(a + b)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{ab} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left\{ (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[(1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \right. \right. \\
 & + \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \log[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \left. \left\{ (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right. \right. \\
 & \times [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \\
 & \times [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \left. \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \right. \right. \\
 & \times \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \left. \left. \right\}^{-2} + \left\{ (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \right. \right. \\
 & \times \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \log[(1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \\
 & \times [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \log[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \left. \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \right. \right. \\
 & \left. \left. \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} \right\} + n \psi'(a + b);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{a\theta} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \{ (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} + \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right. \\
& \times [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \{ \theta^a \bar{G}^{a-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-2} \\
& \times G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \{ \theta(b-1)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) - (a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \} + (1-\theta)^b \\
& \times \bar{G}^{b-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-2} G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \{ (a-1)(1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \\
& - (b-1)[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \} \} \{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1-\theta)^b \\
& \times \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \}^{-2} + \{ -\theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \bar{G}^{a-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \\
& \times G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) + (1-\theta)^{b+1} \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-2} G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \\
& + \{ -(a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \theta(b-1)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \} \{ \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-2} \bar{G}^{a-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \\
& \times G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \} + \{ (1-\theta)^b \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})^{b-2} \} [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-2} \\
& \times \log[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \} \{ (a-1)(1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) - (b-1) \\
& \times [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \} \{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \\
& \times [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \}^{-1} \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{a\xi_k} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left\{ \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[\theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + (1-\theta)^b \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right. \right. \\
& \times [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \Big\} \left\{ \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-2} \right. \\
& \times \bar{G}^{a-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \} \{ -(a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \theta(b-1)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \} \\
& + \{ (1-\theta)^b \bar{G}^{b-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-2} G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \} \{ (a-1)(1-\theta) \\
& \times \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) - (b-1)[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \} \Big\} \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \right. \\
& + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \Big\}^{-2} + \left\{ \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-2} \right. \\
& \times \bar{G}^{a-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \} \left\{ - [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] - (a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \log \theta \right. \\
& + \theta(b-1)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log \theta - (a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \log \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) + \theta(b-1) \\
& \times \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \Big\} + \left\{ (1-\theta)^b \bar{G}^{b-2}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-2} G'_k(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right\} \\
& \times \left\{ (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) + (a-1)(1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] - (b-1) \right. \\
& \times [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \log[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \Big\} \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \right. \\
& + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \Big\}^{-1} \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{bb} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left\{ (1-\theta)\overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[(1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \right. \right. \\
& + \theta^a \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \log[1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \left. \right\}^2 \left\{ \theta^a \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right. \\
& \times [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1-\theta)^b \overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \left. \right\}^{-2} \\
& + \left\{ (1-\theta)\overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \{ \log(1-\theta)^2 + 2 \log(1-\theta) \right. \\
& \times \log[\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \log[\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^2 \left. \right\} + \theta^a \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \\
& \times \log[1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^2 \left. \right\} \left\{ \theta^a \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1-\theta)^b \right. \\
& \times \left. \overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} \left. \right\} - n[\psi'(b) - \psi'(a+b)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{b\theta} = & \sum_{i=1}^n \left\{ \left\{ \theta^a [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-2} \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \{ -\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) + a\theta [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \right. \right. \\
& \times \log[1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] - (b-1)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \\
& + (1-\theta)^{b-1} \overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-2} \{ -[1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \} \\
& + (a-1)(1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[(1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] - b[1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \\
& \times \log[(1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \left. \right\} \left\{ \theta^a \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1-\theta)^b \right. \\
& \times \left. \overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \right\}^{-1} - \left\{ \theta^a [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-2} \right. \\
& \times \left. \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \{ a[1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] - \theta(b-1)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \} + (1-\theta)^{b-1} \overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right. \\
& \times [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-2} \{ (a-1)(1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi}) - b[1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \} \\
& \times \left. \left\{ (1-\theta)^b \overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \log[(1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] + \theta^a \right. \right. \\
& \times [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \log[1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})] \left. \left. \right\} \left\{ \theta^a \overline{G}^{a-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) \right. \right. \\
& \times [1 - \theta\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{b-1} + (1-\theta)^b \overline{G}^{b-1}(x_i, \boldsymbol{\xi}) [1 - (1-\theta)\overline{G}(x_i, \boldsymbol{\xi})]^{a-1} \left. \left. \right\}^{-2} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{b\xi_k} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left\{ (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \log[(1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)] \right. \right. \\
& + \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \log[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)] \left. \right\} \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-2}(x_i, \xi) \right. \\
& \times [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-2} G'_k(x_i, \xi) \{ -(a-1)[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)] + \theta(b-1)\bar{G}(x_i, \xi) \} \\
& + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-2}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} G'_k(x_i, \xi) \{ (a-1)(1-\theta) \\
& \times \bar{G}(x_i, \xi) - (b-1)[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)] \} \left. \right\} \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \right. \\
& + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-2} + \left\{ \theta^a [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-2} \right. \\
& \times \bar{G}^{a-2}(x_i, \xi) G'_k(x_i, \xi) \{ \theta\bar{G}(x_i, \xi) - (a-1)[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)] \log[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)] \\
& + \theta\bar{G}(x_i, \xi) \log[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)] \} + (1-\theta)^b \bar{G}^{a-2}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} \\
& \times G'_k(x_i, \xi) \{ [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)] + (a-1)(1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi) \log(1-\theta) - (b-1) \\
& \times [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)] \log(1-\theta) + (a-1)(1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi) \log \bar{G}(x_i, \xi) \} \\
& \times \left. \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \right. \right. \\
& \times \left. \left. \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-1} \right\} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\theta\theta} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left\{ \theta^{a-1} [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-2} \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) \{ a[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)] - \theta(b-1) \right. \right. \\
& \times \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) + (1-\theta)^{b-1} \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} \{ (a-1)(1-\theta) \\
& \times \bar{G}(x_i, \xi) - b[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)] \} \left. \right\}^2 \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \right. \\
& + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-2} + \left\{ \theta^{a-2} [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-3} \right. \\
& \times \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) \{ a(a-1)[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^2 - 2a\theta(b-1)[1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]\bar{G}(x_i, \xi) \\
& + \theta^2(b-2)(b-1)\bar{G}^2(x_i, \xi) \} + (1-\theta)^{b-2} \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-3} \\
& \times \{ (a-2)(a-1)(1-\theta)^2 \bar{G}^2(x_i, \xi) - 2b(a-1)(1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \\
& \times \bar{G}(x_i, \xi)] + b(b-1)[1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^2 \} \left. \right\} \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta\bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \right. \\
& + \left. \left. (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta)\bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-1} \right\};
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
U_{\theta\xi_k} = & \sum_{i=1}^n \left\{ \left\{ \theta^{a-1} [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-3} \bar{G}^{a-2}(x_i, \xi) G'_k(x_i, \xi) \{-a(a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^2 \right. \right. \\
& + \theta(b-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] \bar{G}(x_i, \xi) - a\theta(b-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] \bar{G}(x_i, \xi) - \theta^2 \\
& \times (b-2)(b-1) \bar{G}^2(x_i, \xi) \left. \right\} + (1-\theta)^{b-1} \bar{G}^2(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} \\
& \times G'_k(x_i, \xi) \{-2b(a-1)(1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi) + b(b-1)[1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)] \left. \right\} \\
& \times \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \right\}^{-1} \\
& - \left\{ \theta^{a-1} [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-2} \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) \{a[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] - \theta(b-1) \bar{G}(x_i, \xi) \} \right. \\
& + (1-\theta)^{b-1} [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) \{(a-1)(1-\theta) \bar{G}^b(x_i, \xi) - b \\
& \times [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)] \left. \right\} \left\{ \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-2} \bar{G}^{a-2}(x_i, \xi) G'_k(x_i, \xi) \{-(a-1) \right. \\
& \times [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] + \theta(b-1) \left. \right\} + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-2}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} \\
& \times G'_k(x_i, \xi) \{(a-1)(1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi) - (b-1)[1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)] \left. \right\} \left\{ \theta^a \right. \\
& \times \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \left. \right\}^{-1} \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\xi_k \xi_l} = & \sum_{i=1}^n \left\{ - \left\{ \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-2} \bar{G}^{a-2}(x_i, \xi) G'_k(x_i, \xi) \{-(a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] \right. \right. \\
& + \theta(b-1) \bar{G}(x_i, \xi) \left. \right\} + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-2}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} G'_k(x_i, \xi) \\
& \times \left\{ (a-1)(1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi) - (b-1)[1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)] \right\}^2 \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) \right. \\
& \times [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \left. \right\}^{-1} + \left\{ \theta^a \right. \\
& \times [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-3} \bar{G}^{a-3}(x_i, \xi) [G'_k(x_i, \xi)]^2 \{(a-2)(a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^2 \\
& - 2\theta(a-1)(b-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] \bar{G}(x_i, \xi) + \theta^2(b-2)(b-1) \bar{G}^2(x_i, \xi) \left. \right\} \\
& + (1-\theta)^b \bar{G}^{b-3}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-3} [G'_k(x_i, \xi)]^2 \{(a-2)(a-1) \\
& \times (1-\theta)^2 \bar{G}^2(x_i, \xi) - 2(a-1)(b-1)(1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)] \\
& + (b-2)(b-1)[1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^2 \left. \right\} + \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-2} \bar{G}^{a-2}(x_i, \xi) \\
& \times G''_{kl}(x_i, \xi) \{-(a-1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] + \theta(b-1) \bar{G}(x_i, \xi) \} + (1-\theta)^b \\
& \times \bar{G}^{b-2}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} G''_{kl}(x_i, \xi) \{(a-1)(1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi) \\
& - (b-1)[1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)] \left. \right\} \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1-\theta)^b \right. \\
& \times \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1-\theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \left. \right\}^{-1} \left. \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ - \left[ \frac{g'_k(x_i, \xi)}{g(x_i, \xi)} \right]^2 + \frac{g''_{kl}(x_i, \xi)}{g(x_i, \xi)} \right\}.
\end{aligned}$$

em que  $\psi'(\cdot)$  é primeira derivada da função digamma,  $t'_k(\cdot, \xi) = \partial t(\cdot, \xi) / \partial \xi_k$  e  $t''_{kl}(\cdot, \xi) = \partial^2 t(\cdot, \xi) / \partial \xi_k \partial \xi_l$ .

# APÊNDICE B – Código R utilizado para a fdp, fda e taxa de falha dos casos especiais da Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$

A seguir é apresentado o arquivo fonte para a Beta  $(\theta(1 - \text{Exp}), (1 - \theta)\text{Exp} + \theta)$ .

```
#####
#                               Densidade da beta Exp                               #
#####

fdpBE <- function(par,x){
a = par[1]
b = par[2]
theta = par[3]
lambda = par[4]

fdpBE <- function(x) (lambda/beta(a,b)) * (exp(-b*lambda*x) *
(1-theta)^b * (1-exp(-lambda*x) * (1-theta))^(a-1) + theta^a *
exp(-a*lambda*x) * (1-theta*exp(-lambda*x))^(b-1))

}

#####
#                               Gráfico da densidade                               #
#####

xmax<-1.5
ymax<-7.5

a<-5
b<-3
theta<-0.9
```

```
lambda<-4
```

```
fdpBE <- function(x) (lambda/beta(a,b))*(exp(-b*lambda*x)*
(1-theta)^b*(1-exp(-lambda*x)*(1-theta))^(a-1)+theta^a*
exp(-a*lambda*x)*(1-theta*exp(-lambda*x))^(b-1))
```

```
plot(fdpBE, from=0.0,to=xmax,ylim=c(0.0,ymax), xlab="x",
ylab="f(x)",main=expression(paste("Função Densidade")),
pch=1, lty=1, col=1, lwd=2)
```

```
#####
#                               Acumulada da beta Exp                               #
#####
```

```
cdf_BE <- function(par,x){
a = par[1]
b = par[2]
theta = par[3]
lambda = par[4]
pbeta(1-exp(-lambda*x)*(1-theta),a,b)-pbeta(theta*
exp(-lambda*x),a,b)
}
```

```
#####
#                               Taxa de falha                               #
#####
```

```
tx_BE <- function(par,x){
a = par[1]
b = par[2]
theta = par[3]
lambda = par[4]
((lambda/beta(a,b))*(exp(-b*lambda*x)*(1-theta)^b*
(1-exp(-lambda*x)*(1-theta))^(a-1)+theta^a*exp(-a*lambda*x)*
(1-theta*exp(-lambda*x))^(b-1)))/(1-(pbeta(1-exp(-lambda*x)*
(1-theta),a,b)-pbeta(theta*exp(-lambda*x),a,b)))
```

```

}

#####
#           Gráfico da Taxa de falha           #
#####

xmax<-10
ymax<-14

a<-0.2
b<-1
theta<-1
lambda<-13.5

gratxBE <- function(x) ((lambda/beta(a,b))*(exp(-b*lambda*x)*
(1-theta)^b*(1-exp(-lambda*x)*(1-theta))^(a-1)+theta^a*
exp(-a*lambda*x)*(1-theta*exp(-lambda*x))^(b-1)))/
(1-(pbeta(1-exp(-lambda*x)*(1-theta),a,b)-pbeta(theta*
exp(-lambda*x),a,b)))

plot(gratxBE, from=0.0,to=xmax,ylim=c(0.0,ymax),
xlab="x", ylab="f(x)",main=expression(paste("BE")),
pch=1, lty=1, col=1, lwd=2)

```

# APÊNDICE C – Código R Utilizado na Aplicação a dados de pobreza do capítulo 4

Algoritmo utilizado no Capítulo 4 para aplicação a dados reais de pobreza.

```
#####
#                               Dados                               #
#####
require(zipfR)
require(normalp)

y<-sort(c(18.0, 32.0, 16.4, 16.5, 10.2, 25.0, 26.6, 9.7,17.5,
8.3,9.2,19.8,26.7,12.6,11.6,14.2,9.7,6.4,19.4,13.8,13.2,29.6,
10.3, 36.5,23.1,21.2,24.7,18.8,22.7,15.1,22.6,16.2,20.9,16.5,
21.5,13.6,22.3,37.0, 23.6,12.1,16.6,7.1,16.8, 11.6,15.3,13.2,
36.0, 20.8, 29.5,7.8, 11.9,5.3,18.2,17.1,13.8,16.5,17.2,14.0,
13.1 ,22.3,8.0, 34.6,13.3,18.7,16.6,15.0,18.6,15.8,19.8,24.2,
11.8, 7.0,20.4,26.1,14.7, 17.8,25.4,24.6,33.7,13.8,28.3,20.2,
23.1,16.4,10.8,8.7,11.2,11.9, 15.7,21.3,19.0, 23.4,11.6,20.2,
17.6, 20.2,20.8, 19.3,18.0, 21.7,16.5,8.8,22.3,6.1,14.1,21.1,
17.0, 18.2,26.0,7.0,34.7,19.6,14.5,12.9, 16.7,13.8, 3.9,21.0,
7.9,25.8,18.9,8.0,8.7,12.2,9.7,28.4,18.7,15.4,12.0,24.1,15.9,
15.4,9.3, 4.7,11.6, 23.4,8.0, 9.5,15.3,25.9,3.3,20.9,9.0,8.9,
14.1, 12.2,26.7, 10.3,11.0,20.1,27.9,27.8,9.7,28.1,12.8,12.3,
29.0,18.0,22.0,14.7,14.9,18.4,22.9,11.2,16.9,22.3, 20.5,25.7,
19.2,21.0,17.5,18.0,15.8 ,18.4,19.9,23.4,19.9,17.0,17.1,20.3,
18.6, 17.3,16.7,22.7,9.1,24.2, 13.9,17.6,13.3,20.7,30.2,28.4,
21.6,9.3,21.8,11.7,8.3,13.2,22.1,36.9,16.0,6.3,6.9,15.3,15.2,
16.8, 10.8,18.5, 23.5,18.4,9.3, 31.6,17.2,12.4,13.1,9.5,19.7,
9.3, 28.6,14.1,4.0, 4.1,4.5,5.6,28.4,25.4,11.4,20.3,4.7,15.5,
21.5, 4.9,35.4, 16.5,25.1,23.9,24.5,11.8, 19.5,18.4,3.2,30.2,
7.3, 8.2, 20.7,9.0,16.9, 20.0,13.2,17.1,25.0,21.2,23.0, 20.5,
16.0,14.9,21.9,19.9,29.6,12.6,25.9,20.5,7.8,25.5,8.5,6.2,5.1,
```

```

10.6,7.1,6.0,6.6,4.6, 7.1,8.8,9.8,13.2, 24.5,15.2,32.3, 20.4,
9.9, 8.1,39.7, 43.4,28.9, 8.5,6.3, 5.8,9.1,9.2,15.3,7.8,25.7,
10.0,9.9,5.4,30.7,4.7,12.4,35.0,12.9,16.1,5.4,4.6,14.4, 28.5,
7.0,11.3,4.8,3.8,39.2,19.8,12.6,4.6,19.1,15.6,14.7,22.6,22.6,
31.0, 33.7,8.4,18.9, 27.9,10.3,14.2,36.1,26.6,36.4,34.6,18.7,
17.9,18.1, 13.0,15.7,18.1,22.5,23.3,13.8,20.3,19.3,19.2,19.3,
20.2,16.3,20.8,23.8,18.8,21.4,24.0,17.4,37.8,21.0, 12.2,10.2,
25.3,30.0,28.7,40.4,37.8,9.6,6.8,22.5,33.2,10.6,8.2,21.8,9.3,
31.2,18.8, 25.6,14.8,9.3,18.3, 12.7,11.2,12.1,16.5,20.8,30.4,
2.7,30.5,27.6, 36.5,35.4,21.3,19.4,21.3, 22.5,15.1,22.5,18.1,
24.3,10.4,8.0,17.9, 23.2,12.4,17.6,12.1,22.1,20.7,15.8, 31.3,
15.3, 12.3,10.0, 14.0,4.6,9.3, 22.9,31.0,32.2, 4.9,13.2,22.5,
18.9,23.8,26.0,15.3,46.3,26.4,14.7,9.1, 10.4,12.1,27.3, 14.3,
13.5, 31.4,10.8,10.4, 21.6,42.6,32.6, 9.1,28.6,4.6,24.3,20.3,
19.8,23.0,32.9,28.3,10.1,15.5,25.1, 18.5,11.5, 6.5,20.1,13.4,
53.6, 13.6,48.7,5.8, 6.8,23.6,11.4,33.8, 9.2,21.0, 16.5,45.7,
15.3,15.5,24.4,6.3,15.0, 42.7,6.9, 19.2,6.7, 34.3,24.7, 20.2,
22.3,25.8,32.0,33.4,47.3,29.8, 9.1,9.4,9.0,7.5,13.3,7.8, 9.0,
20.7,17.7,8.5,9.6, 9.3,7.6,6.1, 19.4,5.0,10.7,3.2, 18.5,26.1,
22.8,7.4,35.4,8.7,5.3,9.1,7.5, 11.5,9.7,13.6,15.1,12.6, 15.4,
4.1,17.4,11.0,5.0,5.0,9.1,13.2,20.3,20.0,20.4,13.5,20.2,10.3,
15.6,15.9,14.3,36.4,20.2)
)

```

```

#####
#      Distribuição Beta Weibul(modelo proposto)      #
#####

```

```

fdpBWeibull<-function(x,a0,b0,c0,theta0,lambda0){
fx<- ((c0*lambda0^c0*x^(c0-1))/beta(a0,b0))*
((1-theta0)^b0*exp(-b0*(lambda0*x)^c0)*
(1-(1-theta0)*exp(-(lambda0*x)^c0))^(a0-1)
+(theta0)^a0*exp(-a0*(lambda0*x)^c0)*
(1-theta0*exp(-(lambda0*x)^c0))^(b0-1))
}

```

```

a0<-0.01453129
b0<-8.85663567
c0<-1.96667135
theta0<-0.77048422
lambda0<-0.44411421

```

```

#####
#   Distribuição Kumaraswamy Weibull exponenciada   #
#####

```

```

fdpEKwW<-function(x,a1,b1,c1,alpha1,beta1) {
fx<- a1*b1*c1*alpha1*beta1^alpha1*x^(alpha1-1)*
exp(-(beta1*x)^alpha1)*(1-exp(-(beta1*x)^alpha1))^(a1-1)*
(1-(1-exp(-(beta1*x)^alpha1))^a1)^(b1-1)*
(1-(1-(1-exp(-(beta1*x)^alpha1))^a1)^b1)^(c1-1)
}

```

```

a1<-0.145834
b1<-0.2584070
c1<-17.4023712
alpha1<-1.0301405
beta1<-0.4828623

```

```

#####
#   Distribuição Beta exponencial exponenciada   #
#####

```

```

fdpBGE<-function(x,a7,b7,lamda7,alfa7) {
fx<-(1/beta(a7,b7))*alfa7*lambda7*exp(-lambda7*x)*
(1-exp(-lambda7*x))^(alfa7*a7-1)*
(1-(1-exp(-lambda7*x))^alfa7)^(b7-1)
}

```

```

a7=0.16795628
b7=2.04060190
lambda7=0.09577518
alfa7=21.89877783

```

```

#####
#           Distribuição McDonald Dagum           #
#####

```

```

fdpMCda<-function(x,lambda9,delta9,beta9,a9,b9,c9){
(1/beta(a9,b9))*c9*beta9*lambda9*delta9*x^(-delta9-1)*
(1+lambda9*x^(-delta9))^(-beta9*a9*c9-1)*(1-(1+lambda9*
x^(-delta9))^(-c9*beta9))^(b9-1)
}

```

```

a9=0.257216
b9=31.334698
c9=5.147746
beta9=4.276328
lambda9=6.508724
delta9=1.053375

```

```

x<-seq(0.1,60,0.1)
hist(y,freq = FALSE,main="",xlab="",ylab="Density",xlim=
c(0,60),ylim=c(0,0.05),lwd=1,nclass=20)
lines(x,fdpBWeibull(x,a0,b0,c0,theta0,lambda0),
col=1,lty=1,lwd=2)
lines(x,fdpEKwW(x,a1,b1,c1,alpha1,beta1),col=3,
lty=1,lwd=2)
lines(x,fdpBGE(x,a7,b7,lambda7,alfa7),col=4,
lty=1,lwd=2)
lines(x,fdpBDa(x,a8,b8,beta8,lambda8,delta8),
col=5,lty=1,lwd=2)
lines(x,fdpMCda(x,lambda9,delta9,beta9,a9,b9,c9),

```



```
col=2,lty=1,lwd=2)
legend("topright", legend=c("BW","McDa","BEE","KWE",
"BDa"),
lty=c(1,1,1,1,1),col=c(1,3,4,5,2), bty="n")
```